

Matematyka Dyskretna – dodatkowe zadania
(odpowiedzi do niektórych zadań na ostatniej stronie)

Zad. 1. Na ile sposobów można wylosować dwie pary w pokerze (52 karty)?

Zad. 2. Na ile sposobów może 7 osób wysiąść z autobusu na dziesięciu przystankach?

Zad. 3. Na ile sposobów można pomalować osiem przedmiotów siedmioma kolorami, jeśli:

- (a) przedmioty są rozróżnialne?
- (b) przedmioty nie są rozróżnialne?

Zad. 4. Wadliwość w zakładzie A produkującym pewien wyrób wynosi 0,08, a w zakładzie B produkującym taki sam wyrób wynosi 0,1. W magazynie 40% wyrobów jest z zakładu A, reszta z zakładu B. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany wyrób jest dobry.

Zad. 5. Pewna drużyna futbolowa rozgrywa 70% meczów po południu, a 30% późnym wieczorem. Wiadomo ponadto, że wygrywa 50% meczów popołudniowych i 90% wieczornych. Drużyna wygrała mecz. Jakie jest prawdopodobieństwo, że był to mecz grany późnym wieczorem?

Zad. 6. Z talii 52 kart wybrano losowo 5 kart. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród wybranych kart będą:

- (a) dokładnie 3 asy,
- (b) co najwyżej 2 asy,
- (c) dokładnie 2 asy i dokładnie 2 króle.

Zad. 7. Rzucamy jednocześnie dwoma symetrycznymi monetami, aż do otrzymania dokładnie dwóch reszek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucimy co najmniej 4 razy? Jakie jest prawdopodobieństwo, że zakończymy rzuty rzutem nieparzystym?

Zad. 8. Niech $P(A \cap B) = 0,08$, $P(A') = 0,6$, $P(B \setminus A) = 0,1$. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

Zad. 9. Rozważmy następującą zmienną losową na przestrzeni Ω złożonej z 36 jednakowo prawdopodobnych wyników rzutu dwiema symetrycznymi kostkami: $M(k, l) = \min\{k, l\}$.

- (a) Znajdź zbiór wartości zmiennych M
- (b) Podaj rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej M
- (c) zdefiniuj i narysuj dystrybuantę zmiennej losowej M
- (d) Oblicz $P(M \geq 3)$, $P(|M - 4| < 2)$

Zad. 10. Oblicz wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe zmiennej losowej M z zadania 9.

Zad. 11. Ile by trzeba było losować kart z talii 52 (ze zwracaniem), aby oczekiwana liczba króli wynosiła 2?

Zad. 12. Niech dany będzie graf $G: V(G) = \{u, v, w, y, x, z\}$, $E(G) = \{\{u, w\}, \{w, w\}, \{w, x\}, \{x, y\}, \{y, y\}, \{y, v\}, \{v, x\}, \{x, v\}\}$. Czy graf ten ma cykl Eulera? Czy graf ten ma drogę Eulera? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 13. Wylosowano pięciocyfrowy numer. Jaka jest szansa, że zawiera on dokładnie dwie cyfry 2, jeśli wiadomo, że na przedostatniej pozycji znajduje się cyfra 1 (dopuszczamy numery zaczynające się cyfrą 0)?

Zad. 14. Która zmienna losowa ma mniejsze odchylenie standardowe jeśli:

$$P(D = 1) = 0,25, P(D = 2) = 0,2, P(X = 4) = 0,4, P(X = -1) = 0,15$$

$$P(M = 0) = 0,25, P(M = 2) = 0,25, P(M = 3) = 0,35, P(M = -2) = 0,15$$

Zad. 15. Gra polega na trzykrotnym rzucie symetryczną kostką. Jeśli gracz wyrzuci 3 razy szóstkę wygrywa 100 zł wraz ze stawką, jeśli dokładnie 2 razy wyrzuci szóstkę to wygrywa 10 zł wraz ze stawką. W przeciwnym wypadku przegrywa stawkę. Jaka powinna być stawka, aby gra była sprawiedliwa?

Zad. 16. Losujemy 4 karty z talii 52 kart (bez zwracania). Niech zmienna losowa X oznacza liczbę wylosowanych asów. Obliczyć $E(X)$ oraz $D(X)$.

Zad. 17. Losujemy 4 karty z talii 52 kart (ze zwracaniem). Niech zmienna losowa X oznacza liczbę wylosowanych asów. Obliczyć $E(X)$ oraz $D(X)$.

Zad. 18. Dystrybuanta zmiennej losowej dyskretnej X ma postać:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -1 \\ \frac{1}{3} & \text{dla } -1 \leq x < 1 \\ \frac{2}{5} & \text{dla } 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{3} & \text{dla } 2 \leq x < 4 \\ 1 & \text{dla } x \geq 4 \end{cases}$$

Proszę podać rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X , wartość oczekiwaną oraz odchylenie standardowe.

Zad. 19. $X \sim B(10, \frac{1}{6})$. Proszę znaleźć $P(|X - 3| \leq 1)$.

Zad. 20. Zbuduj graf mający zbiór wierzchołków $\{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}$, w którym wierzchołki v i w są połączone krawędzią, jeśli ciągi v i w różnią się na dokładnie jednej współrzędnej.

(a) Ile składowych ma ten graf?

(b) Ile krawędzi ma ten graf?

Czy ten graf ma cykl Eulera? Czy ten graf ma drogę Eulera?

Zad. 21. Rzucamy monetą tak długo, aż upadnie dwa razy z rzędu na tę samą stronę. Znaleźć prawdopodobieństwo następujących zdarzeń:

(a) doświadczenie zakończy się nie później niż przy szóstym rzucie

(b) potrzebna będzie parzysta liczba rzutów

Zad. 22. Na kartce egzaminacyjnej jest 5 pytań i 3 możliwe odpowiedzi na każde z nich. Należy wybrać jedną poprawną odpowiedź na każde pytanie. Ile wynosi prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie 4 poprawnych odpowiedzi, jeżeli egzaminowany odpowiedzi zgaduje?

Zad. 23. Na strzelnicy jest pięć karabinów. Prawdopodobieństwa trafienia do celu, gdy się strzela z tych karabinów, są odpowiednio równe: 50%, 60%, 70%, 80%, 90%. Obliczyć prawdopodobieństwo trafienia do celu przy jednym strzale, jeżeli strzelec bierze jeden z karabinów na chybił trafił.

Zad. 24. Wiadomo, że z trzech niezależnie pracujących elementów urządzenia, dwa zawiodły. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że zawiodły element pierwszy i drugi, jeśli prawdopodobieństwa awarii pierwszego, drugiego i trzeciego elementu są odpowiednio równe: 20%, 40%, 30%.

Zad. 25. Gracz dostał 13 kart z 52, obejrzał 8 z nich i stwierdził, że nie ma asa. Jaka jest szansa, że w ogóle nie ma asa?

Zad. 26. Gra polega na zarzucaniu krążków na kołek. Gracz otrzymuje sześć krążków i rzuca je aż do pierwszego celnego rzutu. Znaleźć prawdopodobieństwo, że po zarzuceniu krążka na kołek zostanie graczowi co najmniej jeden krążek, jeżeli prawdopodobieństwo trafienia na kołek przy każdym rzucie jest równe 0,1.

Zad. 27. Narysuj wszystkie drzewa regularne o jedenastu wierzchołkach z dokładnością do izomorfizmu.

Zad. 28. Narysuj wszystkie drzewa binarne nieregularne o siedmiu wierzchołkach z dokładnością do izomorfizmu.

Zad. 29. Udowodnij:

$$(a) (A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$$

$$(b) (A \setminus C) \cup (C \setminus B) = ((A \cup C) \setminus (B \setminus A)) \setminus (B \cap C)$$

Zad. 30. Ile jest liczb naturalnych ośmiocyfrowych, których suma cyfr jest równa 4?

Zad. 31. Ile jest liczb dziewięciocyfrowych, w których suma każdych trzech kolejnych cyfr jest równa 10?

Zad. 32. Na ile sposobów można rozmieścić sześć kul w pięciu szufladach tak, aby w każdej szufladzie była przynajmniej jedna kula?

Zad. 33. Ile jest permutacji zbioru $\{a, A, b, B, c, C, d, D, e, E\}$ takich, w których mała litera stoi przed wielką literą (niekoniecznie obok, np. $(c, a, b, B, e, A, C, E, d, D)$)?

Zad. 34. Oblicz ile jest dziewięciocyfrowych liczb naturalnych parzystych, w zapisie których każda z cyfr 5 i 3 występuje dokładnie 3 razy.

Zad. 35.* Udowodnij, że $2344^{140} - 2344^{20}$ jest wielokrotnością 7.

Zad. 36. Czy jest możliwe, aby owad poruszający się wzdłuż krawędzi sześcianu przeszedł każdą krawędź dokładnie raz? Odpowiedź poprzyj odpowiednim rysunkiem grafu.

Odpowiedzi do niektórych zadań:

Zad. 1. $\binom{13}{2} \binom{4}{2} \binom{4}{2} \binom{11}{1} \binom{4}{1}$

Zad. 2. 10^7

Zad. 3. (a) 7^8 , (b) $|K_7^8|$

Zad. 4. 0,908

Zad. 5. $\approx 0,435$

Zad. 6. (a) $\frac{|C_4^3||C_{48}^2|}{|C_{52}^5|}$, (b) $\frac{|C_{48}^5|+|C_4^1||C_{48}^4|+|C_4^2||C_{48}^3|}{|C_{52}^5|}$, (c) $\frac{|C_4^2||C_4^2||C_{44}^1|}{|C_{52}^5|}$

Zad. 7. $\frac{27}{64}, \frac{4}{7}$

Zad. 8. nie

Zad. 9. (a) $M(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$, (b) $P(M = 1) = \frac{11}{36}, P(M = 2) = \frac{9}{36}$,
 $P(M = 3) = \frac{7}{36}, P(M = 4) = \frac{5}{36}, P(M = 5) = \frac{3}{36}, P(M = 6) = \frac{1}{36}$, (d) $\frac{16}{36}, \frac{15}{36}$

Zad. 10. $E(M) = \frac{91}{36}, D(M) = \sqrt{\frac{2555}{36^2}}$

Zad. 11. 26

Zad. 12. nie ma cyklu Eulera, ani drogi Eulera (nie jest spójny)

Zad. 13. $\frac{486}{10000}$

Zad. 14. $M(D(M)) \approx 1,785, D(D) \approx 1,786$

Zad. 15. 1,25 zł

Zad. 17. $E(X) = \frac{4}{13}, D(X) = \sqrt{\frac{48}{169}}$

Zad. 18. $P(X = -1) = \frac{1}{3}, P(X = 1) = \frac{1}{15}, P(X = 2) = \frac{4}{15}, P(X = 4) = \frac{1}{3}$

$E(X) = \frac{24}{15}, D(X) = \sqrt{\frac{102}{15} - \left(\frac{24}{15}\right)^2}$

Zad. 19. $\binom{10}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^8 + \binom{10}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7 + \binom{10}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^6$

Zad. 20. (a) 1, (b) 12, graf nie ma cyklu Eulera i nie ma drogi Eulera

Zad. 21. (a) $\frac{31}{32}$, (b) $\frac{2}{3}$

Zad. 22. $\binom{5}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \frac{2}{3}$

Zad. 23. 0.7

Zad. 24. $\approx 0,298$

Zad. 25. $\frac{\binom{40}{5}}{\binom{44}{5}}$

Zad. 26. $1 - (0,9)^5 \cdot 0,1 - (0,9)^6 \approx 0,410$

Zad. 30. 120

Zad. 31. 18 (z jednym zerem) + 12 (bez zera, dwie takie same) + 24 (bez zera, wszystkie różne) = 54

Zad. 32. 5 (wybór szuflady z dwoma kulami) $\cdot \binom{6}{2}$ (wybór dwóch kul do wybranej szuflady) $\cdot 4!$ (ułożenie pozostałych kul w 4 szufladach) = 1800

Zad. 33. $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 113400$

Zad. 34. 39200 (bez 3 i 5 na początku) + 67200 (z 3 na początku) + 67200 (z 5 na początku) = 173600