Instytut Informatyki Stosowanej
Politechnika Łódzka

Teoretyczne podstawy informatyki

Języki formalne i automaty

© dr hab. inż. Lidia Jackowska-Strumiłło, prof. PŁ

Alfabet i język

Alfabet Σ to skończony zbiór symboli.

Łańcuch (słowo nad alfabetem) to skończony zbiór zestawionych razem symboli z Σ.

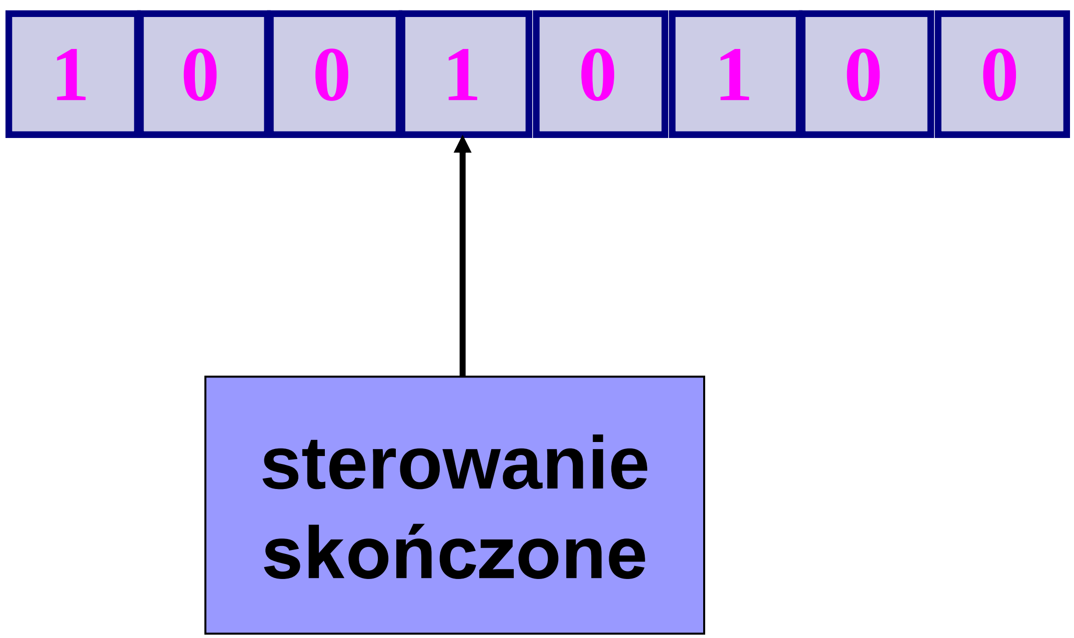
Język formalny L to podzbiór zbioru łańcuchów skończonych złożonych z symboli **alfabetu**.

Przykłady języków

1) Zbiór palindromów nad alfabetem małych liter łacińskich, $\Sigma = \{a, b, c, \dots , z\}$
2) Zbiór liczb binarnych bez nieznaczących zer, $\Sigma = \{0,1\}$
3) Zbiór liczb binarnych podzielnych przez 3, $\Sigma = \{0,1\}$
4) Zbiór liczb pierwszych dziesiętnych, $\Sigma = \{0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Automat skończony - AS

AS – układ o skończonej liczbie stanów, który czyta symbole zapisane na taśmie i zmienia swój stan zgodnie ze zdefiniowaną funkcja przejścia.



Deterministyczny automat skończony

Definicja DAS (deterministyczny automat skończony):

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

gdzie:

Q – skończony zbiór stanów,

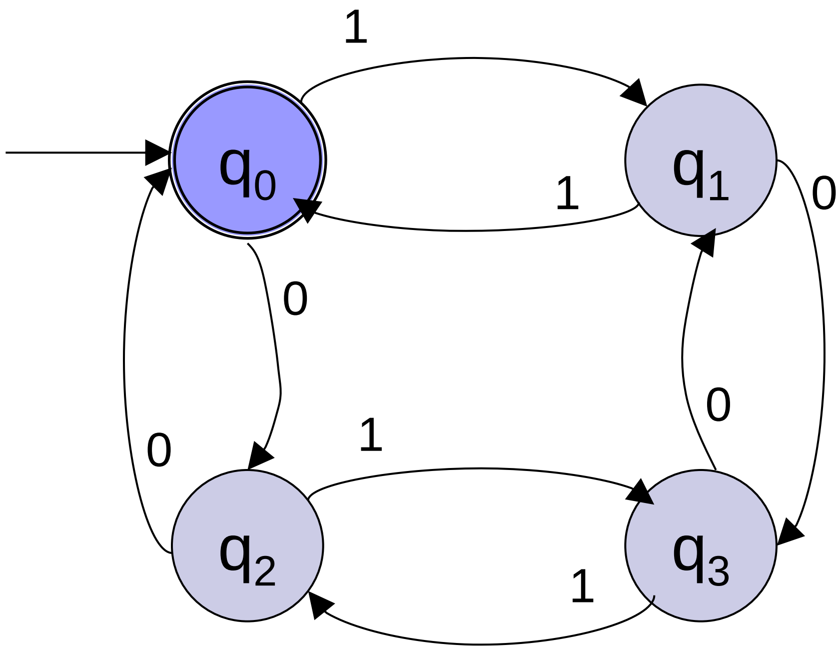
Σ – skończony alfabet wejściowy,

δ – funkcja przejścia odwzorowująca $Q \times \Sigma \rightarrow Q$,

q_0 – stan początkowy, $q_0 \in Q$

F – zbiór stanów końcowych.

Automat skończony – przykład DAS



$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$

$F = q_0$

δ	0	1
q_0	q_2	q_1
q_1	q_3	q_0
q_2	q_0	q_3
q_3	q_1	q_2

Diagram przejść i tabela z funkcją przejścia $\delta(q,a)$, $a \in \Sigma$

Słowa należące do L(M): 11, 00, 1010, 0101, 110101, 010001, …

Deterministyczny automat skończony

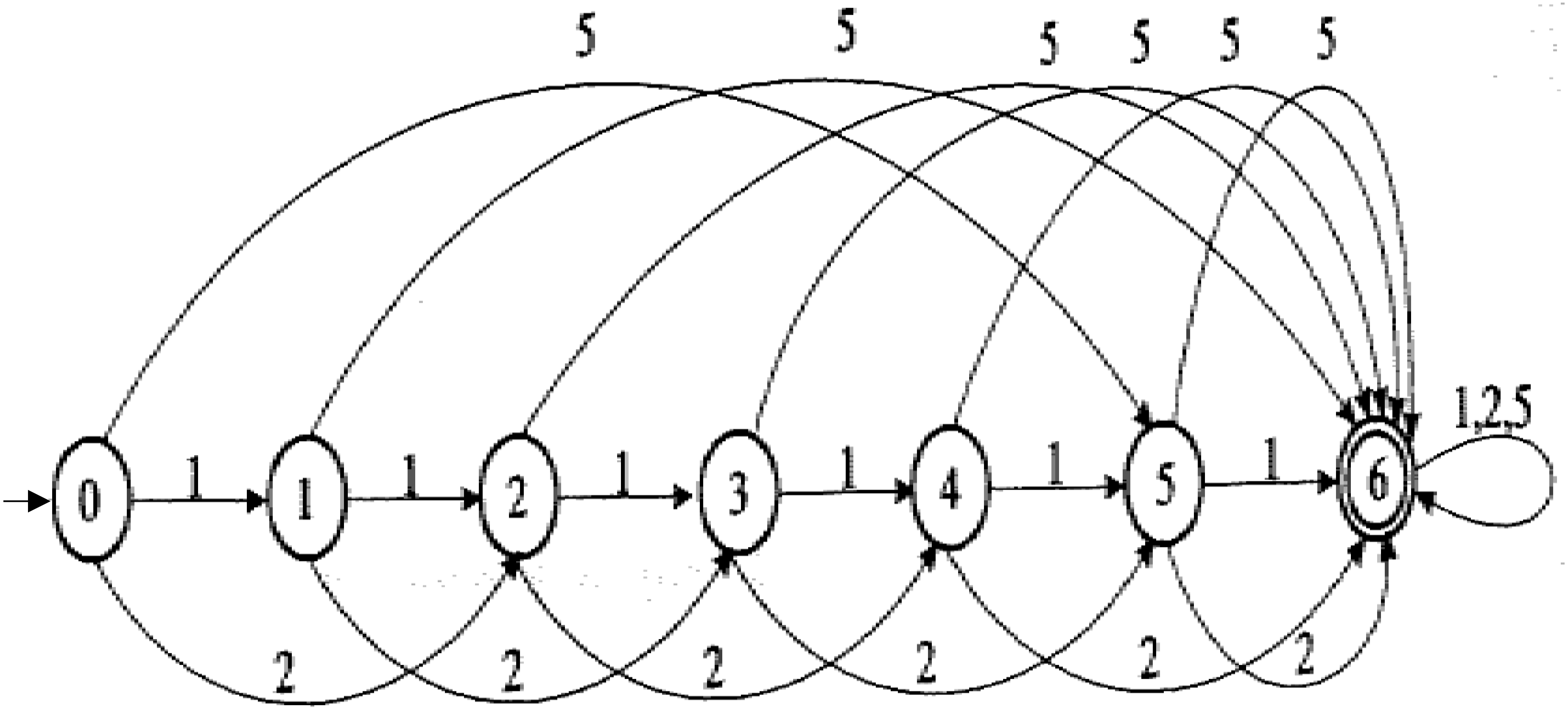
Definicja języka akceptowanego przez DAS:

Językiem akceptowanym przez DAS nazywamy zbiór słów nad alfabetem Σ, dla którego automat kończy obliczenia w stanie akceptującym.

Przykład 1

Zaprojektuj automat skończony – automat sprzedający, który wydaje rzecz, gdy suma wrzuconych pieniędzy wynosi 6 zł lub więcej. Automat nie wydaje reszty i akceptuje monety:
1 zł, 2 zł i 5 zł.

Przykład 1



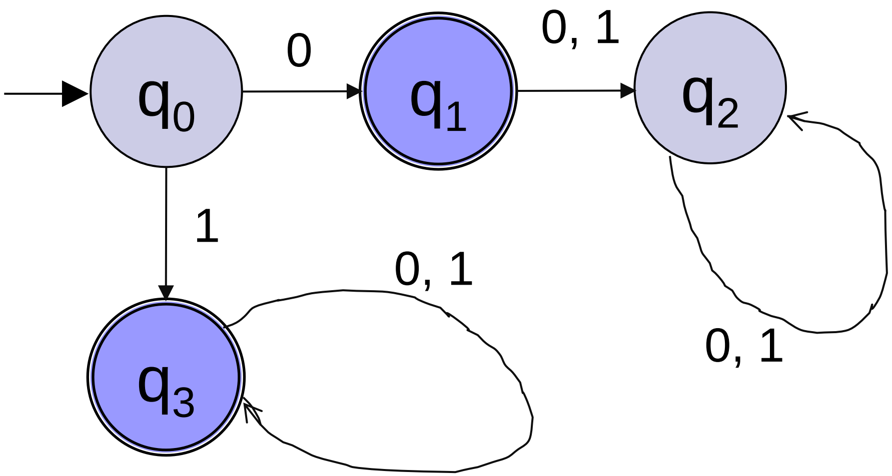
Przykład 2

Zaprojektuj automat skończony deterministyczny akceptujący liczby binarne bez nieznaczących zer.

Przykład 2

Słowa należące do L(M):
0, 1, 101, 11010, …

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$
$F = \{q_1, q_3\}$



δ	0	1
q_0	q_1	q_3
$\mathbf{q_1}$	q_2	q_2
q_2	q_2	q_2
$\mathbf{q_3}$	q_3	q_3

Podana funkcja przejścia opisuje automat:

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1, q_3\})$$

Niedeterministyczny automat skończony

Definicja NAS:

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

gdzie:

Q – skończony zbiór stanów,

Σ – skończony alfabet wejściowy,

δ – funkcja przejścia odwzorowująca

$$Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q,$$

q_0 – stan początkowy, $q_0 \in Q$

F – zbiór stanów końcowych.

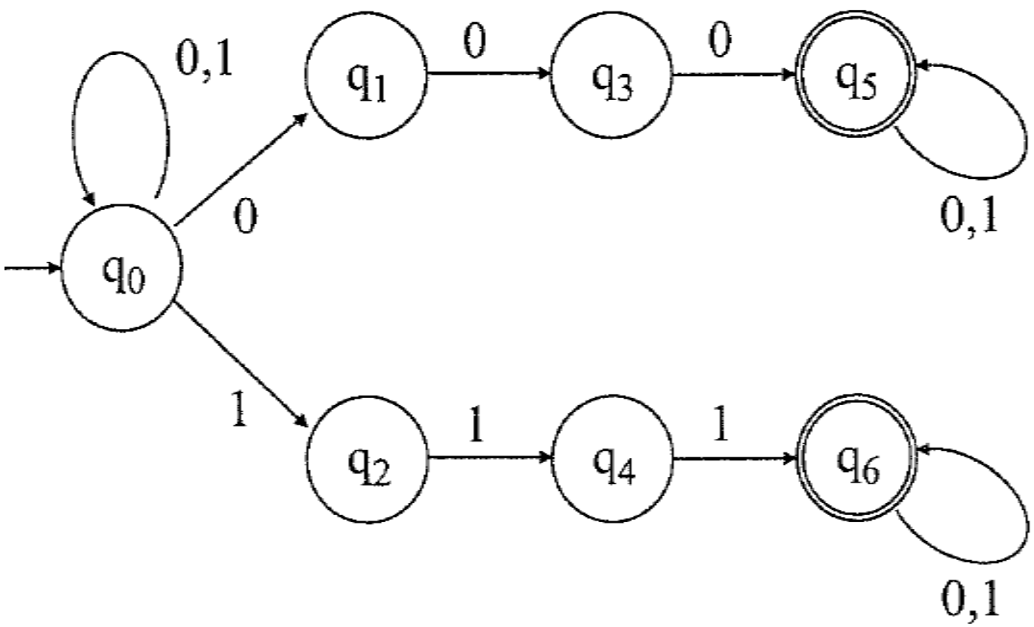
Przykład 3

Zaprojektuj automat skończony niedeterministyczny akceptujący język złożony ze słów binarnych zawierających ciąg trzech zer lub trzech jedynek.

Przykład 3

Słowa należące do L(M):
000, 111, 10111, 1100010, …

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$,
$\Sigma = \{0, 1\}$, $F = \{q_5, q_6\}$



δ	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
q_1	$\{q_3\}$	$\varnothing$
q_2	$\varnothing$	$\{q_4\}$
q_3	$\{q_5\}$	$\varnothing$
q_4	$\varnothing$	$\{q_6\}$
$q_5 \rightarrow$	$\{q_5\}$	$\{q_5\}$
$q_6 \rightarrow$	$\{q_6\}$	$\{q_6\}$

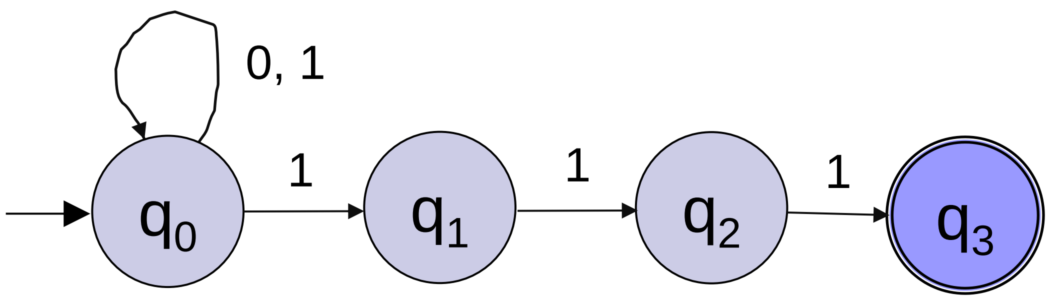
Przykład 4

Zaprojektuj automaty skończone: niedeterministyczny i deterministyczny akceptujące ciągi binarne kończące się trzema jedynkami.

Przykład 4

Słowa należące do L(M):
111, 10111, 11010111, …

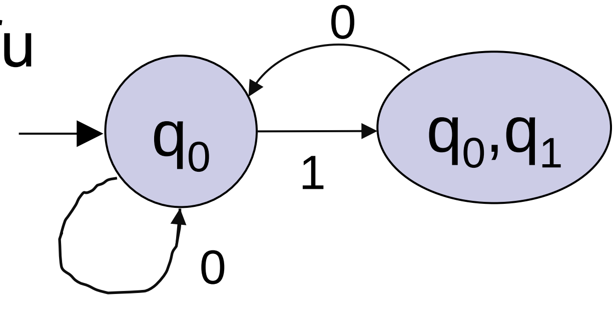
$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$,
$\Sigma = \{0, 1\}$, $F = \{q_3\}$



NAS

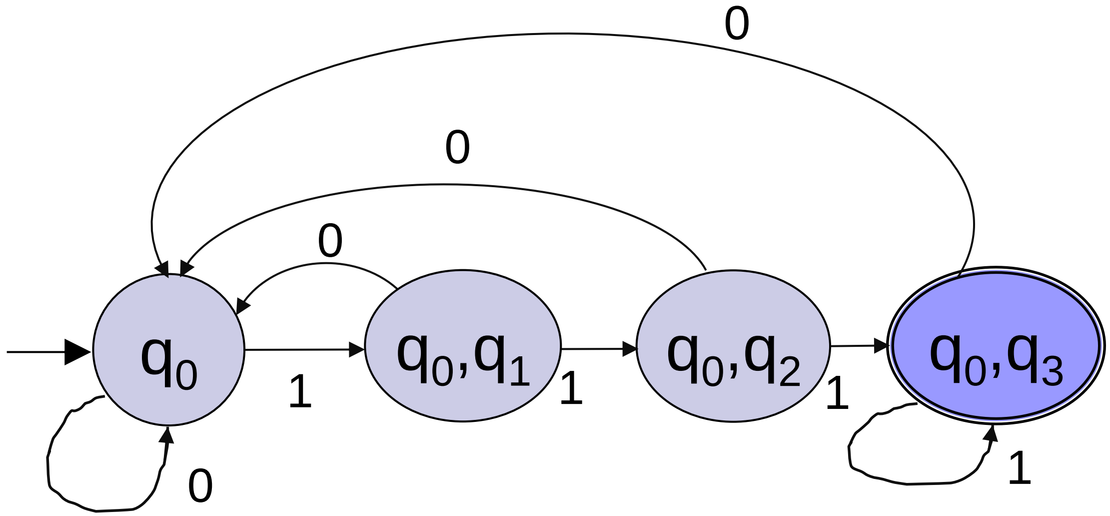
Projekt równoważnego DAS

1) Początkowa część grafu

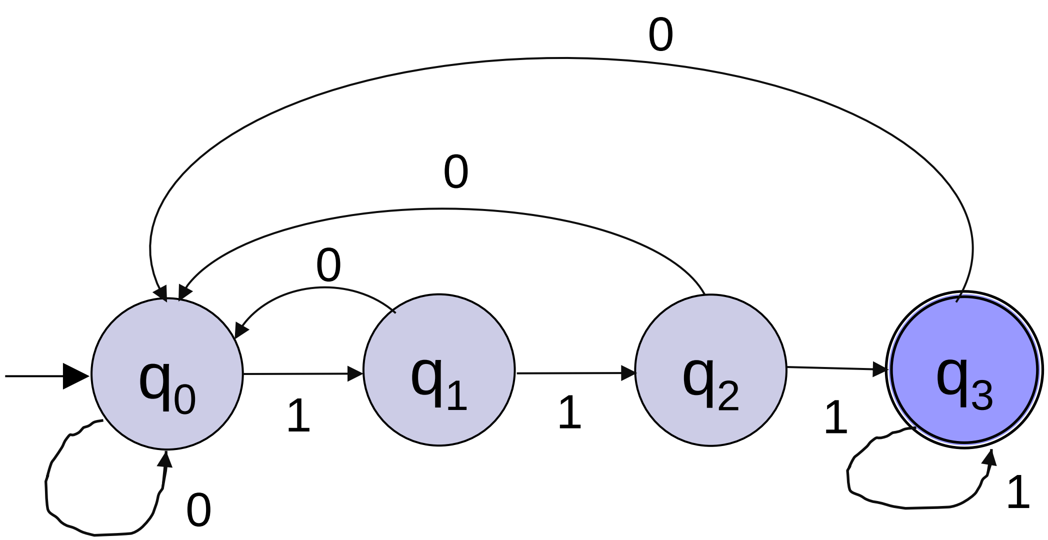


Przykład 4

2) Równoważny DAS



3) DAS po uporządkowaniu



DAS

Równoważność DAS i NAS

Tw. 1

Każdy deterministyczny automat skończony jest niedeterministycznym automatem skończonym, tzn. $DAS \subset NAS$

Tw. 2

Niech L będzie językiem akceptowanym przez niedeterministyczny automat skończony. Wtedy istnieje deterministyczny automat skończony akceptujący L.

NAS z ε-ruchami

Definicja NAS z ε-ruchami:

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

gdzie:

Q – skończony zbiór stanów,

Σ – skończony alfabet wejściowy,

δ – funkcja przejścia odwzorowująca

$Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q$, (gdzie: ε - słowo puste)

q_0 – stan początkowy, $q_0 \in Q$

F – zbiór stanów końcowych.

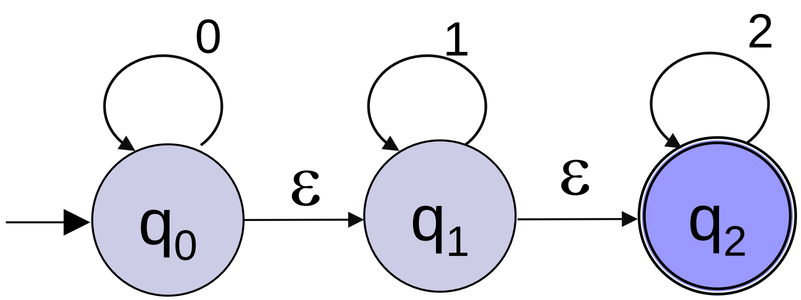
Przykład 5

Zaprojektuj niedeterministyczny automat skończony akceptujący język złożony z wyrazów zawierających dowolną liczbę zer, po których następuje dowolna liczba jedynek, a następnie dowolna liczba dwójek.

Przykład 5

Słowa należące do L(M):
012, 002, 112, 011222, …

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$,
$\Sigma = \{0,1,2\}$, $F = \{q_2\}$



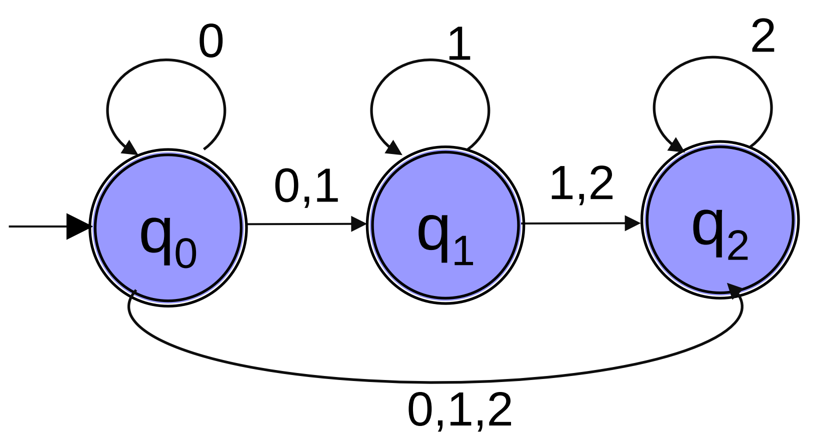
NAS z ε-ruchami

δ	0	1	2	ε
q_0	$\{q_0\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_1\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$
$\mathbf{q_2}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_2\}$	$\varnothing$

Przykład 5

Projekt równoważnego NAS

δ	0	1	2
q_0	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
$\mathbf{q_2}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_2\}$



Równoważność NAS z ε-ruchami i NAS

Tw. 3

Jeśli język L jest akceptowany przez niedeterministyczny automat skończony z ε-przejściami, to jest też akceptowany przez NAS bez ε-przejść.

Maszyna Turinga

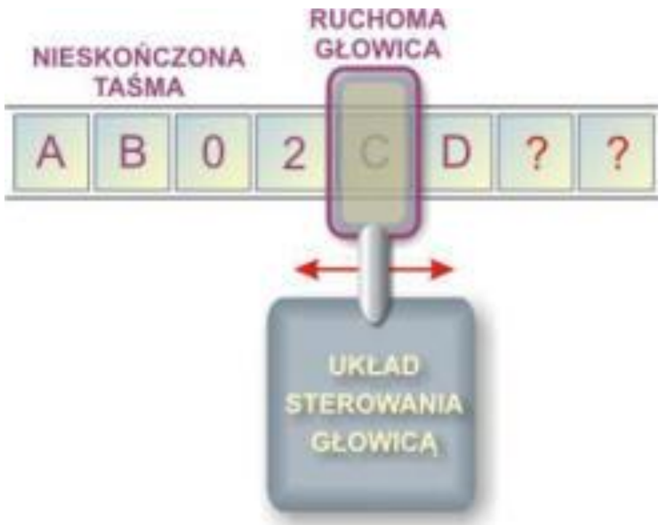
Alan Turing

Maszyna Turinga jest bardzo prostym abstrakcyjnym modelem matematycznym komputera.

Maszyna Turinga

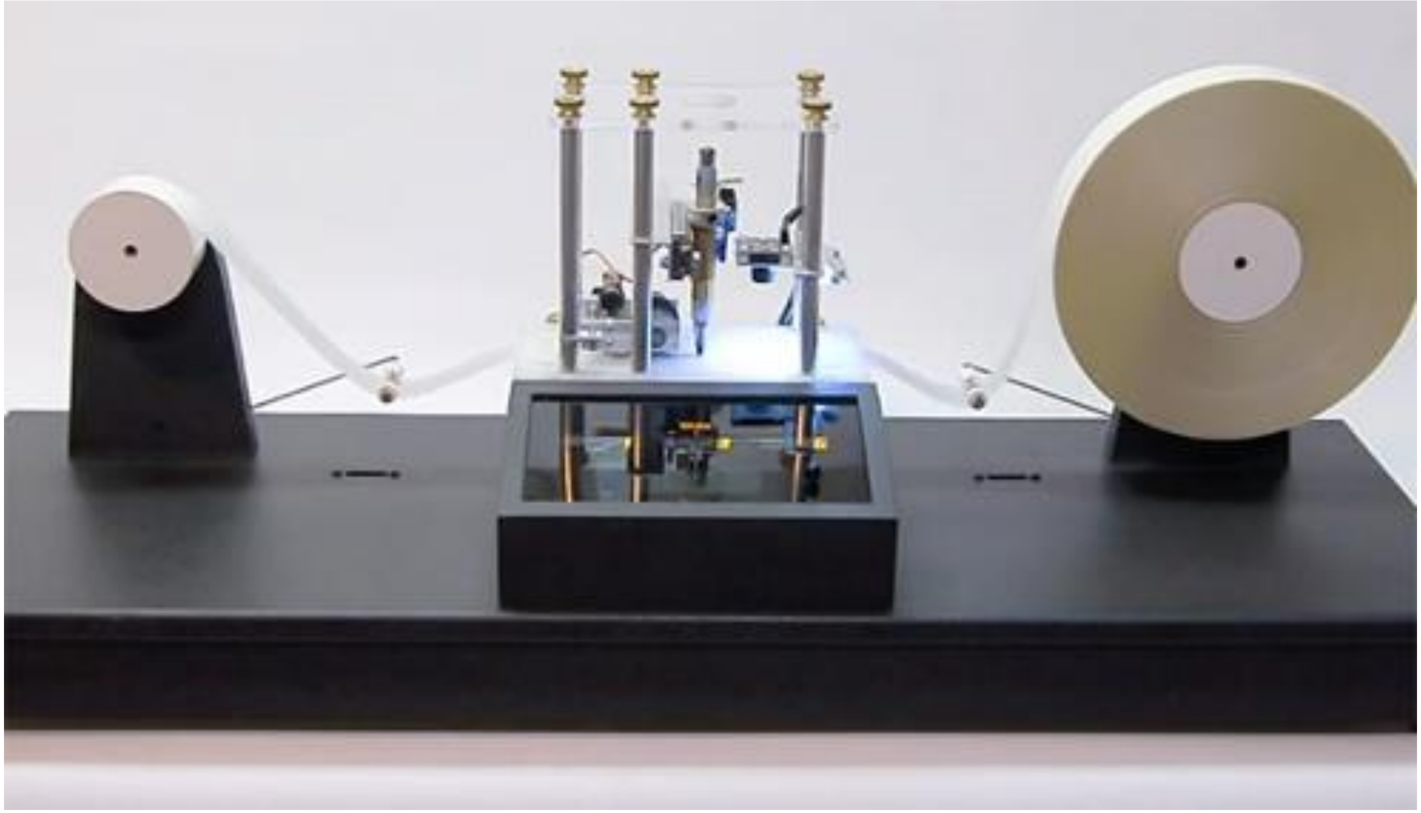
Z czego składa się maszyna Turinga

- Nieskończona taśma – pamięć
- Ruchoma głowica – układ wejścia/wyjścia
- Układ sterujący – procesor



Maszyna Turinga

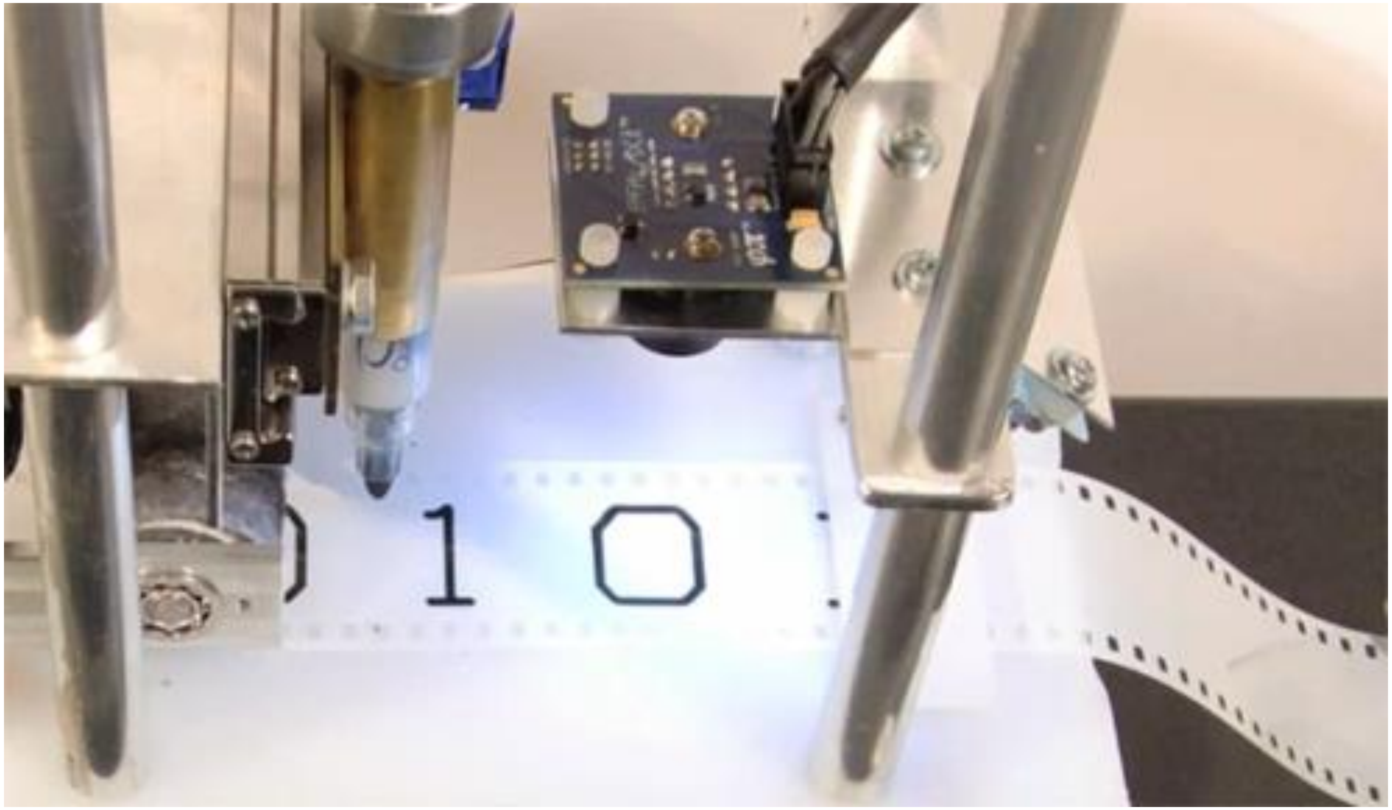
Model maszyny zbudowany przez Mike'a Davey



http://gadzetomania.pl/2010/03/27/wykonana-metoda-chalupnicza-maszyna-turinga-wideo

Maszyna Turinga

Model maszyny zbudowany przez Mike'a Davey



http://gadzetomania.pl/2010/03/27/wykonana-metoda-chalupnicza-maszyna-turinga-wideo

Maszyna Turinga (MT) – model podstawowy

Definicja MT:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Theta, F)$$

gdzie:

Q – skończony zbiór stanów,

Γ – alfabet taśmy - skończony zbiór dopuszczalnych symboli taśmowych,

Θ – symbol pusty należący do Γ, $\Sigma \subset \Gamma - \{\Theta\}$

Σ – alfabet wejścia - zbiór symboli wejściowych,

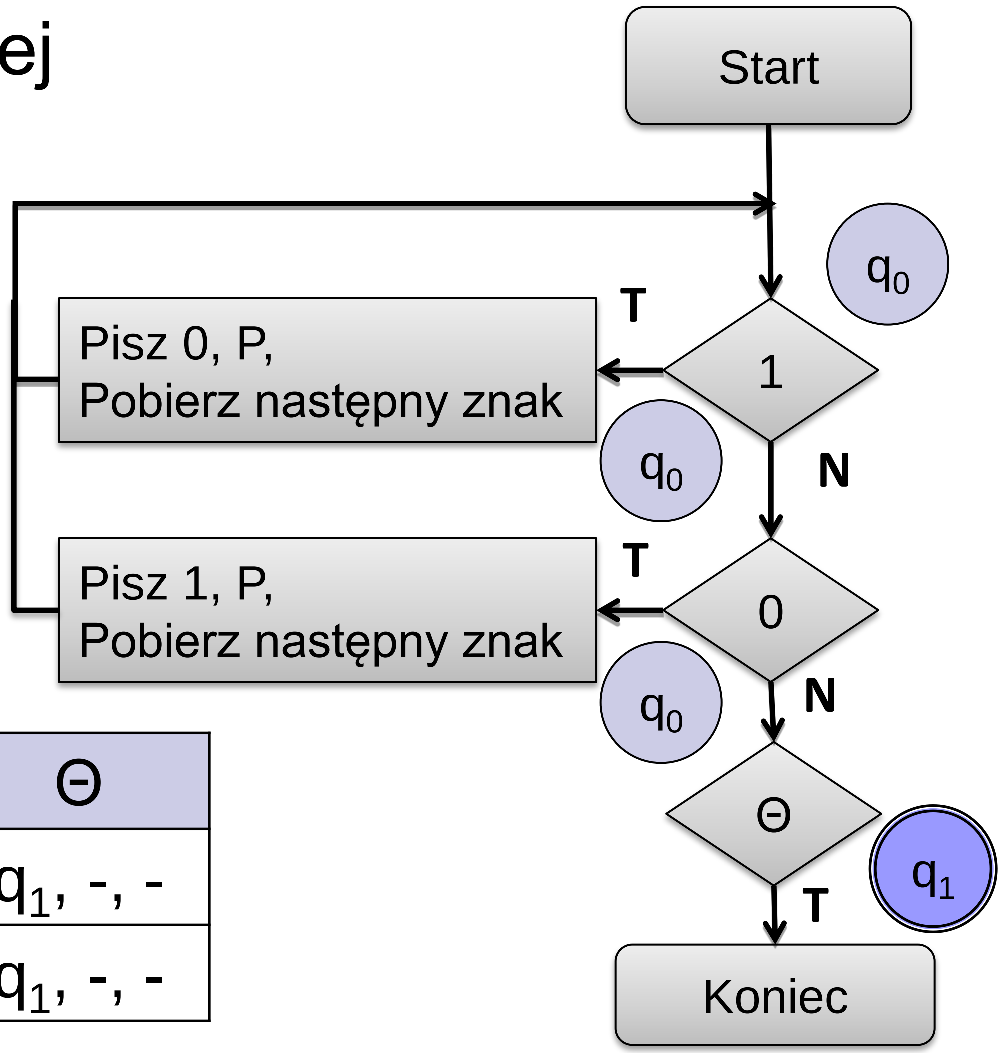
q_0 – stan początkowy należący do Q,

F – zbiór stanów końcowych

δ – funkcja przejścia, δ: $Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, P\}$, przy czym symbole L i P oznaczają kierunek ruchu głowicy w lewo lub w prawo.

Maszyna Turinga - przykładowy program

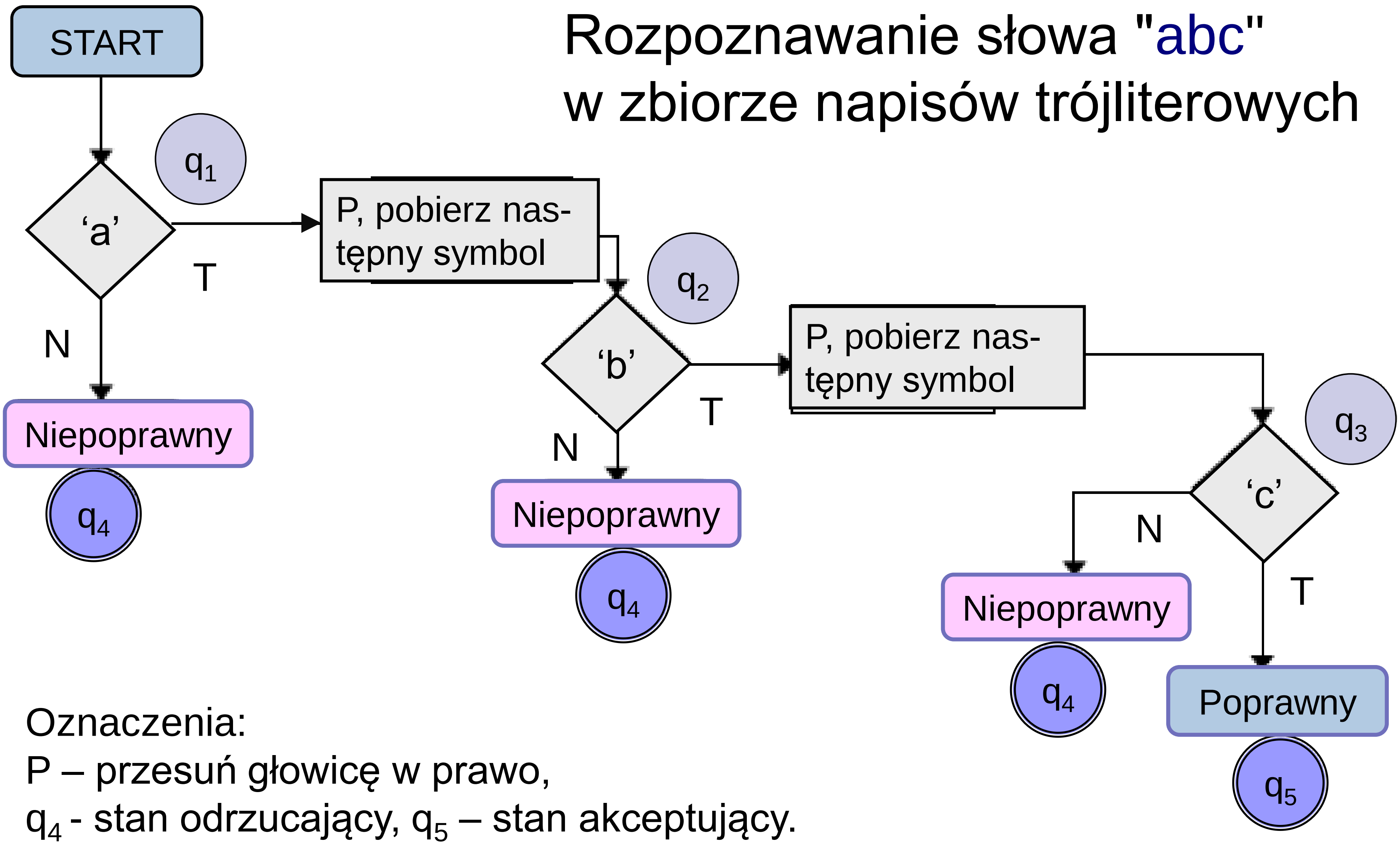
Negacja wartości binarnej



δ	0	1	Θ
q_0	q_0 ,1, P	q_0, 0, P	q_1, -, -
q_1	q_1, -, -	q_1, -, -	q_1, -, -

P – przesuń głowicę w prawo

Maszyna Turinga – przykład 2



Rozpoznawanie słowa "abc"
w zbiorze napisów trójliterowych

Oznaczenia:
P – przesuń głowicę w prawo,
q_4 - stan odrzucający, q_5 – stan akceptujący.

Maszyna Turinga – przykład 2

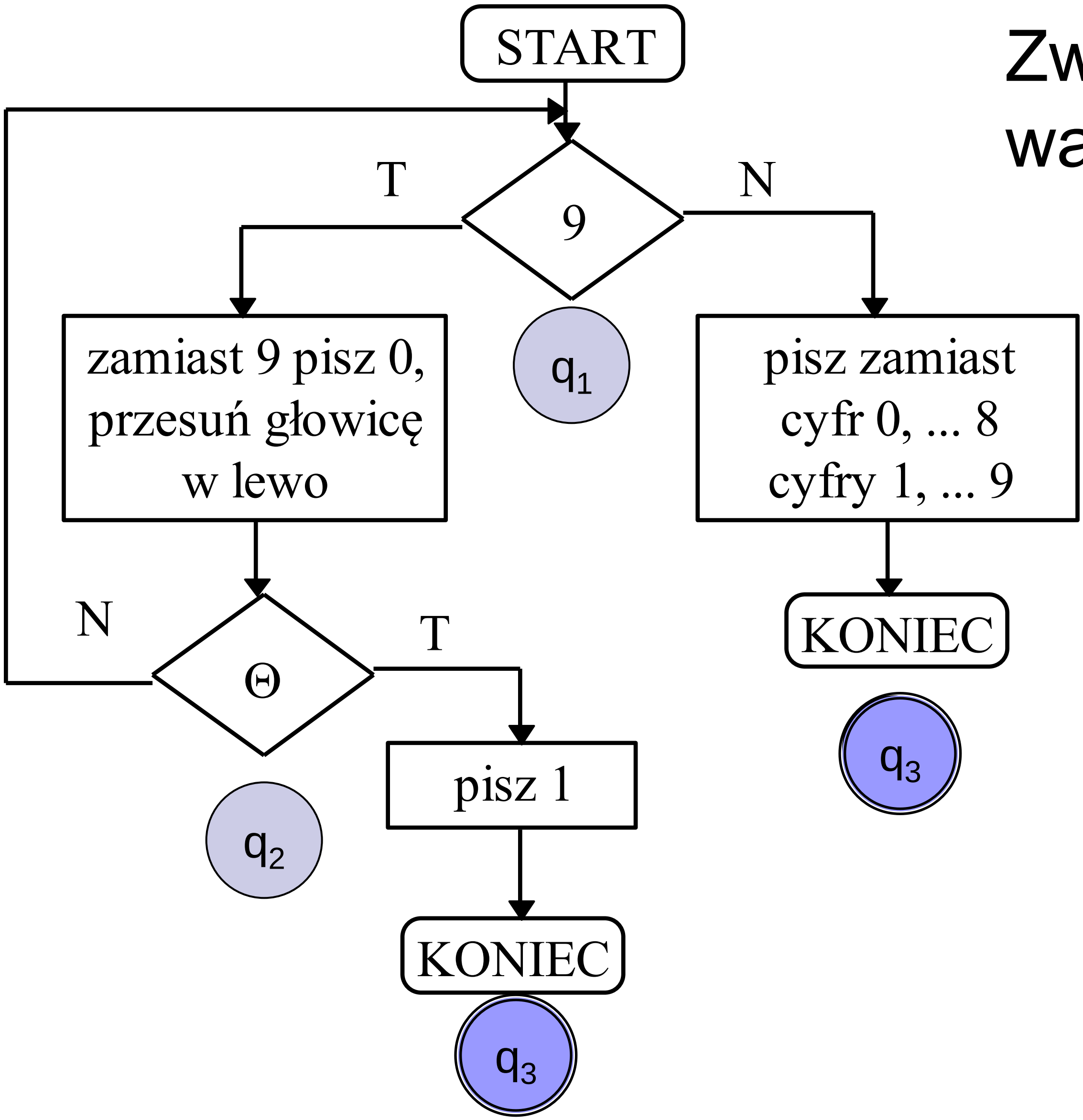
δ	a	b	c
q_1	q_2 , -, P	q_4 , -, -	q_4 , -, -
q_2	q_4 , -, -	q_3 , -, P	q_4 , -, -
q_3	q_4 , -, -	q_4 , -, -	q_5 , -, -
q_4	q_4 , -, -	q_4 , -, -	q_4 , -, -
q_5	q_5 , -, -	q_5 , -, -	q_5 , -, -

Oznaczenia:

P – przesuń głowicę w prawo i pobierz kolejny symbol,

q_4 - stan odrzucający, q_5 – stan akceptujący.

Maszyna Turinga – przykład 3



Zwiększenie wartości liczby o 1.

Maszyna Turinga – przykład 3

δ	9	Θ	0	1	…	8
q_1	q_2,0, L	-	q_3,1,-	q_3,2,-	…	q_3,9,-
q_2	q_1,-,-	q_3,1,-	q_1 ,-,-	q_1 ,-,-	…	q_1 ,-,-
q_3	q_3 ,-,-	q_3 ,-,-	q_3 ,-,-	q_3 ,-,-	…	q_3 ,-,-

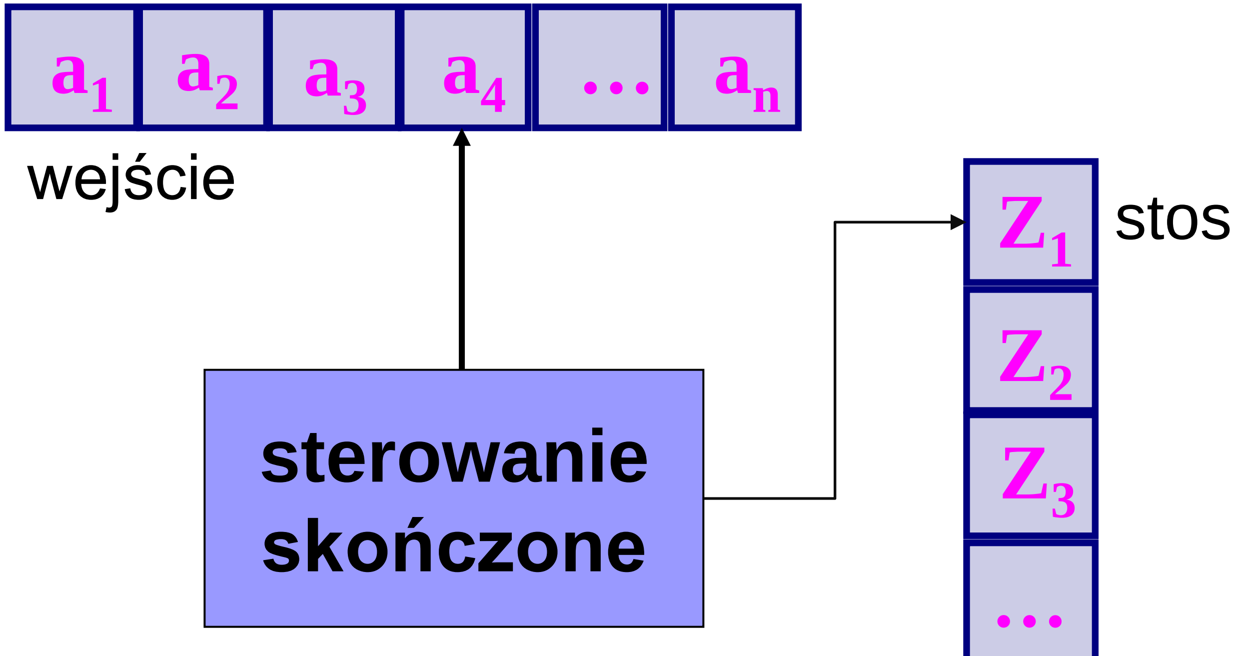
L – przesuń głowicę w lewo i pobierz kolejny symbol

Stan maszyny	q_1	q_2	q_1	q_3
Stan taśmy	89	80	80	90
	_↑	↑_	↑_	↑_

Automat ze stosem (AZS)

Automat ze stosem jest automatem skończonym wyposażonym dodatkowo w sterowanie stosem.

AZS jest podklasą maszyny Turinga.



Automat ze stosem (AZS)

Definicja AZS:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

gdzie:

Q – skończony zbiór stanów,

Σ – alfabet wejścia - zbiór symboli wejściowych,

Γ – alfabet stosu - zbiór symboli stosu,

Z_0 – symbol początkowy należący do Γ,

q_0 – stan początkowy należący do Q,

F – zbiór stanów końcowych

δ – funkcja przejścia, δ:

$$Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma^*$$

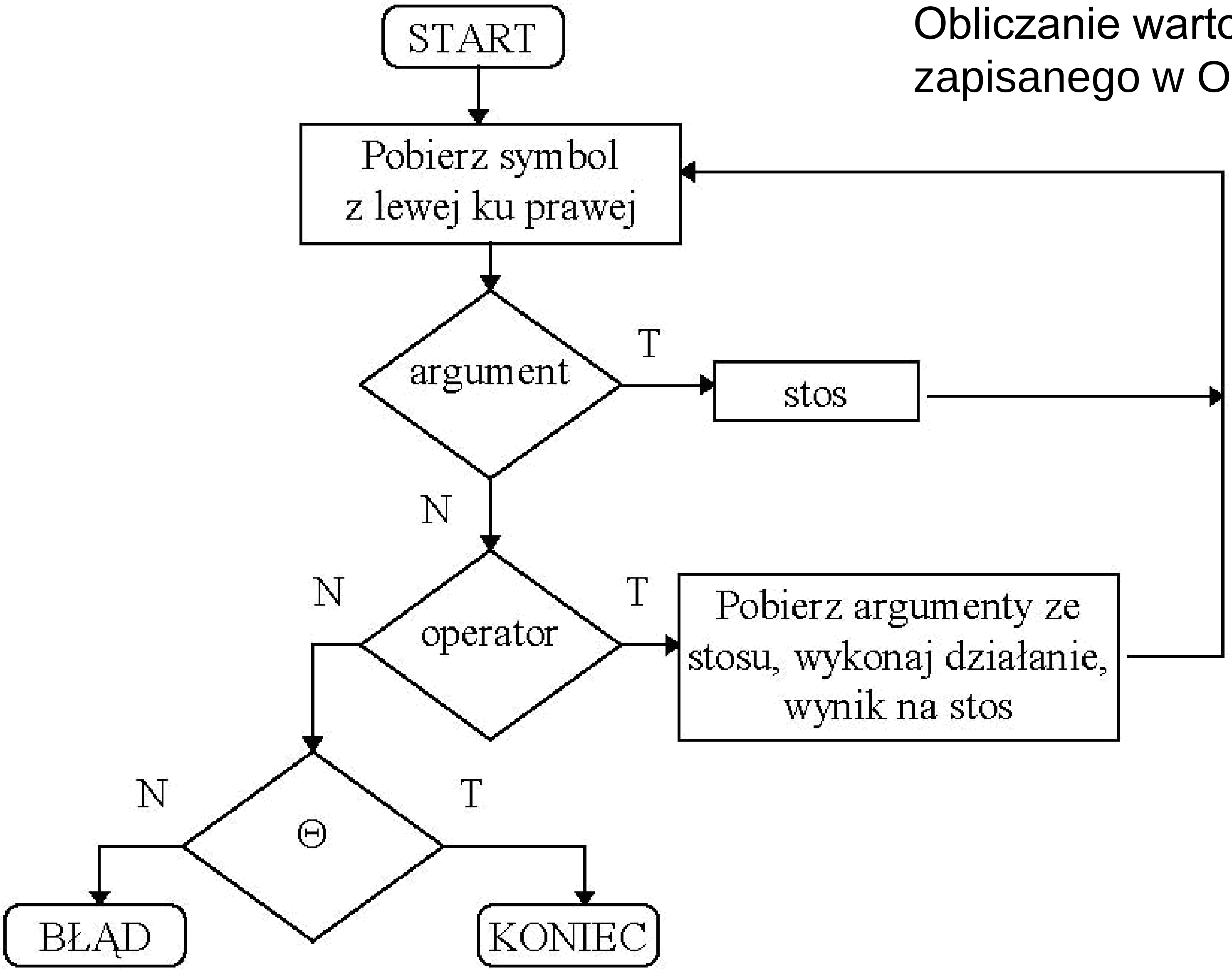
ONP – Odwrotna Notacja Polska

Notacja wrostkowa	Notacja przyrostkowa (ONP)
$x+y$	$xy+$
$(x–y)+z$	$xy–z+$
$x– (y+z)$	$xyz+–$
$x*(y+z)*w$	$xyz+*w*$

Jan Łukasiewicz

ONP – Odwrotna Notacja Polska

Obliczanie wartości wyrażenia zapisanego w ONP



ONP – Odwrotna Notacja Polska - przykład

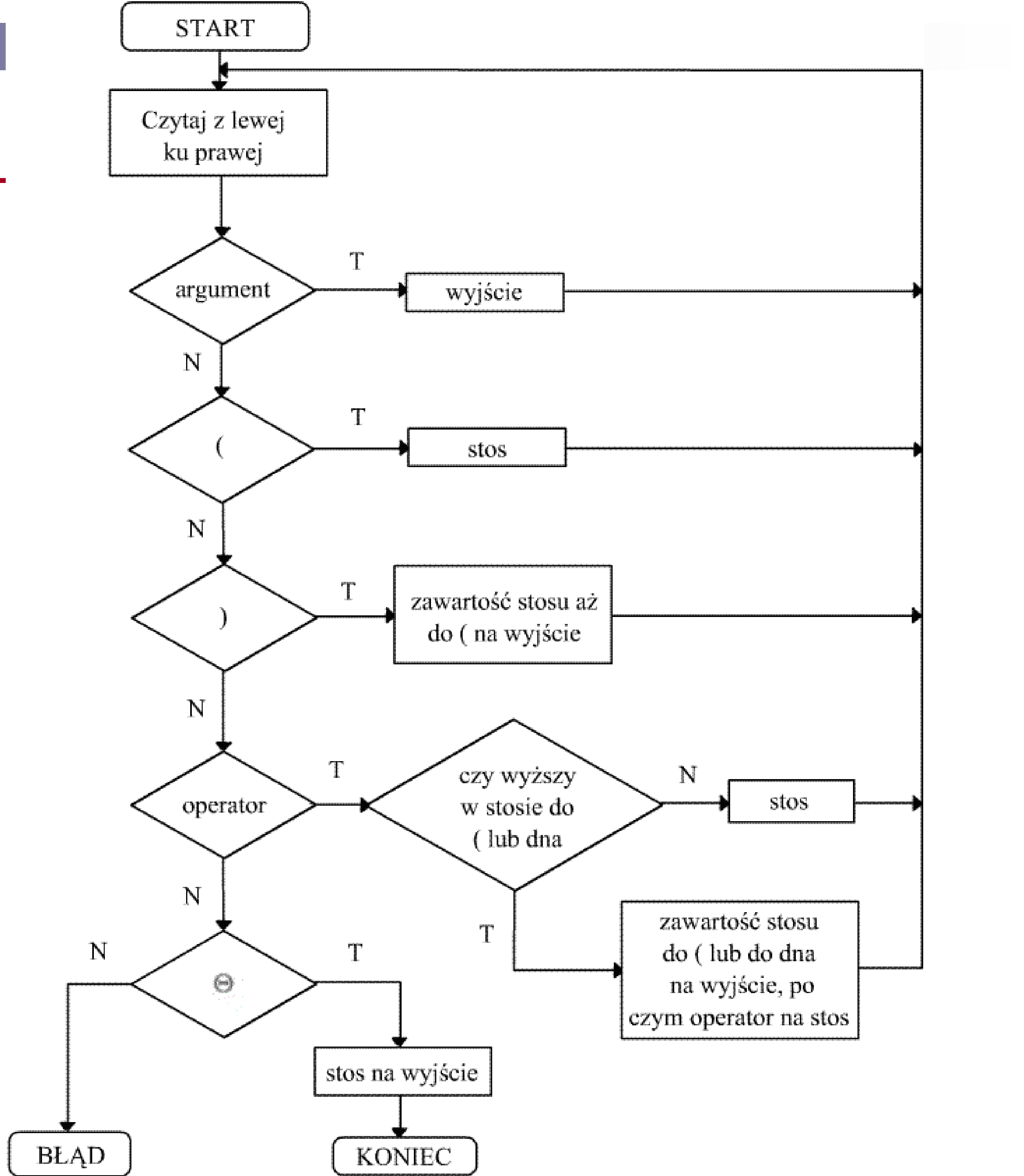
Obliczanie wartości wyrażenia zapisanego w ONP

3 5 * 1 + 2 /

Wejście	Stos	Wyjście
3	3	
5	3 5	
*	15	
1	15 1	
+	16	
2	16 2	
/	8	
Θ		8

ONP

Konwersja wyrażenia zapisanego w arytmetyce nawiasowej na ONP



ONP – Odwrotna Notacja Polska - przykład

Konwersja wyrażenia zapisanego w arytmetyce nawiasowej na ONP

(3*5+1)/2

Wejście	Stos	Wyjście
(	(	
3	(	3
*	(*	
5	(*	5
+	(+	*
1	(+	1
)		+
/	/	
2	/	2
Θ		/

3 5 * 1 + 2 /

Literatura

1. Hopcroft J.E., Ullman J.D.: *Wprowadzenie do teorii automatów, języków i obliczeń.* PWN, Warszawa, 2003.
2. Homenda W.: *Elementy lingwistyki matematycznej i teorii automatów.* Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, W-wa 2005.
3. Krasiński T.: *Automaty i języki formalne.* Uniwersytet Łódzki, Łódź, 2005.