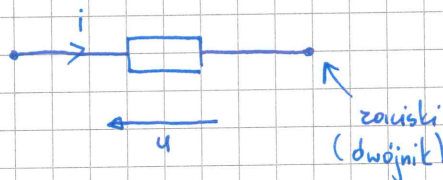


Literatura

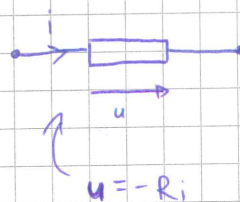
1. Michał Tadeusiewicz - Teoria Obwodów cz. 1 wyd. Pt
2. Jerzy Osowski, Jerzy Szabat - Podstawy Teorii Obwodów tom I WNT
3. Teoria Obwodów - zadania M. Tadeusiewicz wyd. Pt

1 paź 2015, Temat: Podstawowe wiadomości o obwodach

Elementy obwodów - strzałkowanie prądów i napięć

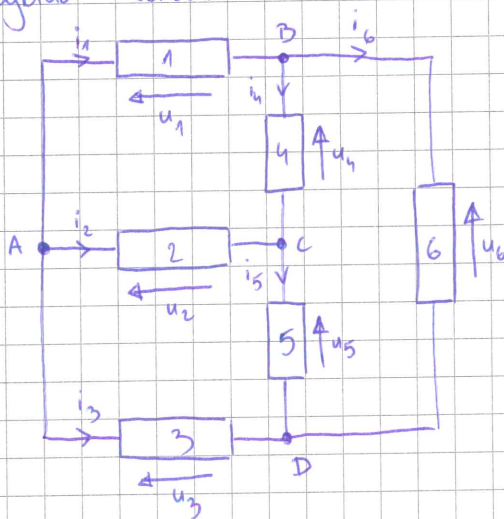


rezystor = opornik



$$u = Ri$$

Przykład obwodu



najprostsze pętle nazywamy "oczkami"
Wewnątrz oczka nie ma innych gałęzi

$$A: i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$B: -i_1 + i_4 + i_6 = 0$$

Prawa Kirchhoffa

PPK

Odpykujące +

Przypływające -

Dla każdego obwodu dla każdego jego węzła w każdej chwili + suma algebraiczna wszystkich prądów w gałęziach zbiegających się w węzle jest równa 0

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0$$

dzielnik napięcia

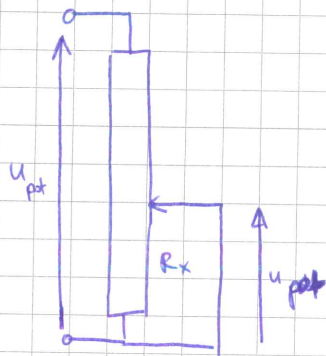


$$R_2 = R_1 + R_1$$

$$i = \frac{U}{R_1 + R_1}$$

$$U_1 = iR_1 = U \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_1}$$

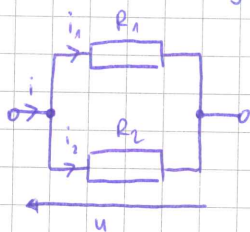
$$U_2 = iR_2 = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$



$$U_{pot} = U \cdot \frac{R_x}{R_p}$$

$$U_{pot} = \langle 0, U \rangle$$

Połączenie równoległe



$$i = i_1 + i_2$$

$$U = U_1 = R_1 \cdot i_1 \rightarrow i_1 = \frac{U}{R_1}$$

$$U = U_2 = R_2 \cdot i_2 \rightarrow i_2 = \frac{U}{R_2}$$

$$i = i_1 + i_2 = U \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Konduktancja
(Przewodność)

$$1[R] = 1\Omega$$

$$1[G] = 1\Omega^{-1} = 1S$$

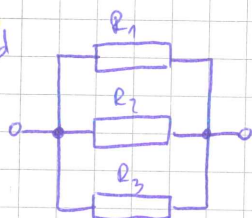
↑
simens

$$G = \frac{1}{R}$$

$$G_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{U}$$

$$\frac{1}{R_2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

Przykład



$$R_1 = 6\Omega$$

$$R_2 = 3\Omega$$

$$R_3 = 2\Omega$$

$$G_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1S$$

$$R_2 = 1\Omega$$

Zawsze piszemy o 1 równanie mniej niż liczba węzłów

\mathcal{L} - liczba węzłów w obwodzie

$\mathcal{L}-1$ równań

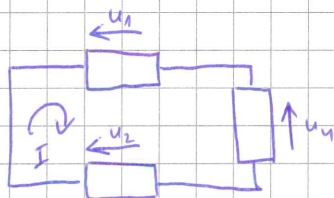
NPK

Dla każdego obwodu, dla każdej jego petli w każdej chwili + suma algebraiczna napięć gałęziowych w rozpatrywanej petli jest równa 0

+ napięcia zgodny z przyjętym kierunkiem obiegu petli

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0$$

Sumowanie odbywa się po wszystkich gałęziach tworzących petle



$$I: -u_1 + u_2 - u_3 = 0$$

Ile równań zapisaliśmy na podstawie praw Kirchhoffa

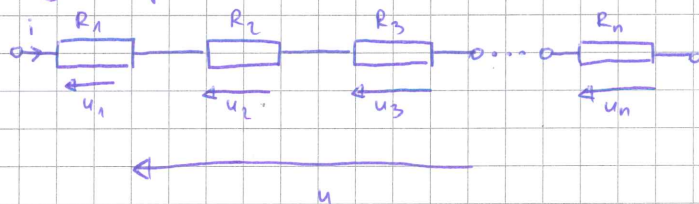
$\mathcal{L}-1$

Przyjmijmy, że gałęzi jest b , potrzebne jest zatem b równań - tyle, ile jest niewiadomych prądów w gałęzi

$$b - \mathcal{L} + 1$$

↑ il. oczek w obwodzie

Szczególne połączenie elementów

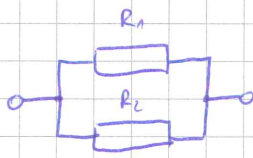


$$u = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = iR_1 + iR_2 + iR_3 + \dots + iR_n = i(R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n)$$

$$iR_z = i(R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n)$$

↑
rezystancja zastępcza

$$R_z = \sum_{k=1}^n R_k$$



$$\frac{1}{R_Z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2}$$

$$R_Z = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

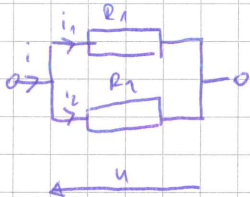
dzielnik prądu

$$\begin{cases} i = i_1 + i_2 \\ i_1 R_1 = i_2 R_2 \end{cases}$$

$$u = R_Z i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i$$

$$i_1 = \frac{u}{R_1} = i \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = \frac{u}{R_2} = i \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$



$$i = 9A$$

$$R_1 = 6\Omega$$

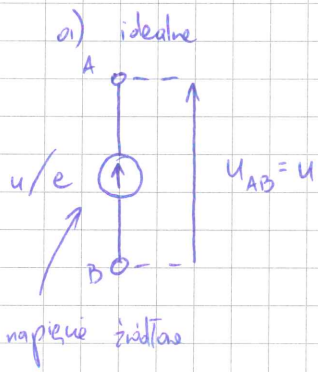
$$R_2 = 3\Omega$$

$$i_1 = i \cdot \frac{3}{6+3} = 3A$$

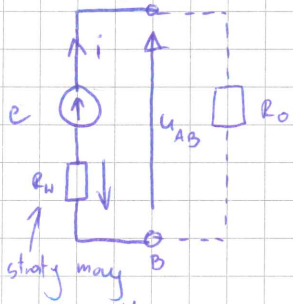
$$i_2 = 6A$$

$$R_1 i_1 = R_2 i_2 = R_Z i$$

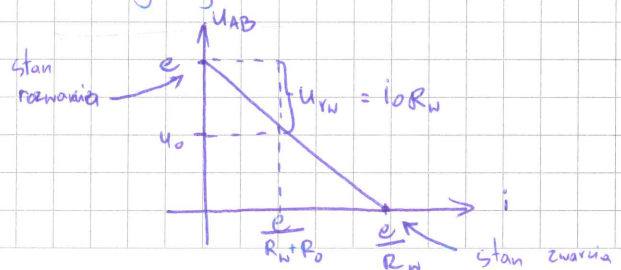
Źródło napięcia



b) rzeczywiste

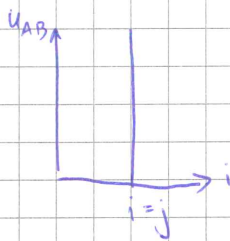
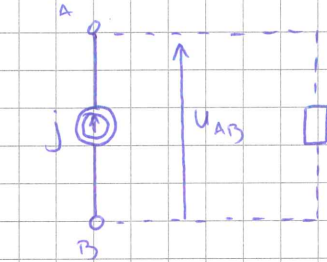


$$u_{AB} = e - i R_W$$

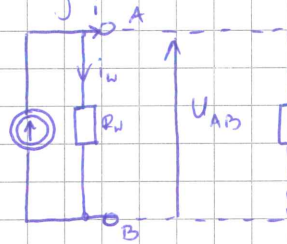


Źródło prądu

a) idealne



b) rzeczywiste



$$U_{AB} = i_w \cdot R_W = (j - i) R_W$$

$$e = j R_W$$

np. przekształć źródło napięcia na źródło prądu

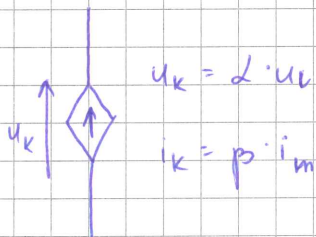
$$e = 12V$$

$$R_W = 2\Omega$$

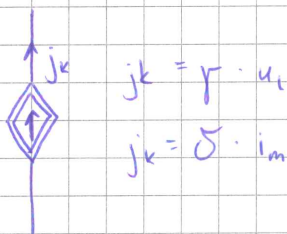
$$\Rightarrow j = \frac{e}{R_W} = \frac{12}{2} = 6A$$

$$R_W = 2\Omega$$

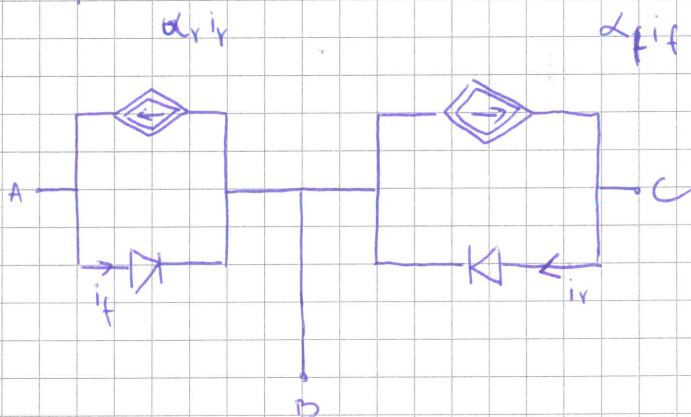
$$G_W = \frac{1}{2} S$$



Sterowane źródło napięcia

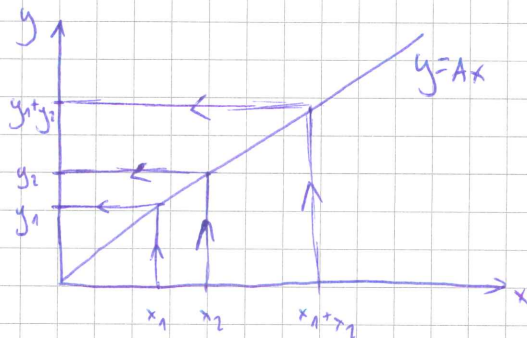


Sterowane źródło prądowe

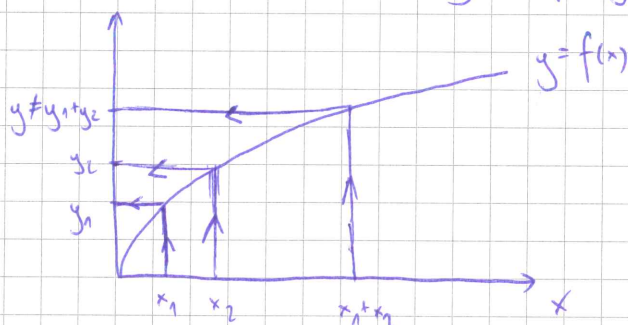


Zasada superpozycji

Odpowiedź układu liniowego na sumę wymuszeń równa się sumie odpowiedzi na poszczególne wymuszenia działające osobno



Dlatego nie wolno zasady superpozycji stosować do układów nieliniowych



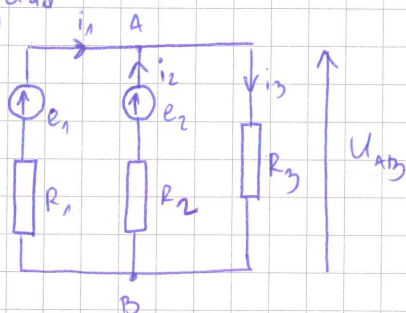
Co to znaczy usunąć źródło

a) źródło napięcia zwieramy

b) źródło prądu rozwieramy

pozostawiając ich rezystancje wewnętrzne

Przykład



pozostawiamy tylko e_1 , a zwieramy e_2

źródło e_1 , kiedy dwa oporniki równoległe +

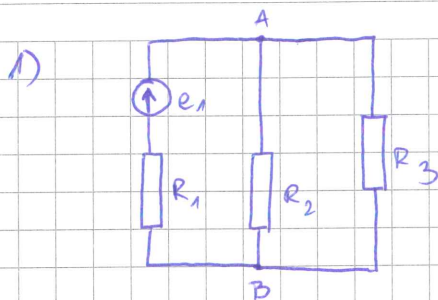
1 szeregowo

dojdzie to R_2'

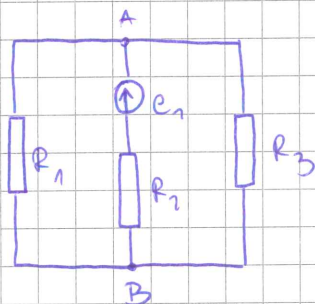
$$R_2' = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_1$$

$$i_1' = \frac{e_1}{R_2'}$$

$$U_{AB}' = i_1' \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$



2) przestawiamy w obwodzie e_2 , e_1 zwijamy



$$R_2'' = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + R_2$$

$$i_2'' = \frac{e_2}{R_2''}$$

$$U_{AB}'' = i_2'' \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}$$

zwarty opornik $R_2 = 0$

$$U_{AB} = U_{AB}' + U_{AB}''$$

na koniec
zrobić

Przykład

$$R_2 = 1\Omega = R_1$$

$$R_2' = \frac{4}{5} + 1 = 1,8\Omega$$

a potem
zrobić

$$R_3 = 4\Omega$$

$$i_1' = 3A$$

prądy idealne

$$e_1 = 5,4V$$

$$U_{AB}' = 3 \cdot 0,8 = 2,4V$$

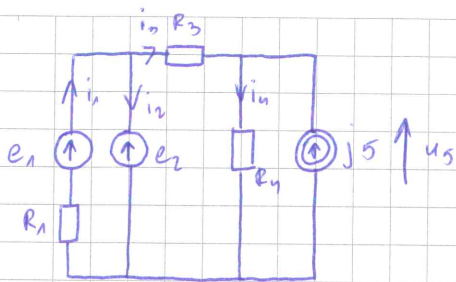
$$e_2 = 10,8V$$

$$R_2'' = 1,8\Omega$$

$$i_2'' = 6A$$

$$U_{AB}'' = 4,8V$$

$$U_{AB} = 7,2V //$$



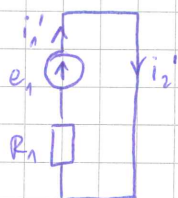
$$e_1 = 6V$$

$$e_2 = 12V$$

$$R_1 = R_2 = R_4 = 2\Omega$$

$$j5 = 6A$$

① tylko e_1

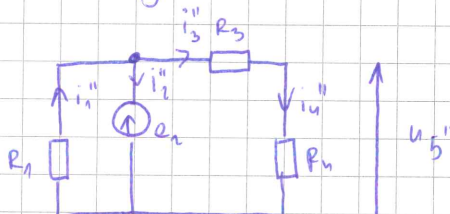


$$i_3 = i_4 = 0$$

$$u_5 = 0$$

$$i_1' = i_2' = \frac{e_1}{R_1} = \frac{6}{2} = 3A$$

② tylko e_2



$$i_3'' = i_4'' = \frac{e_2}{R_2 + R_4} = 3A$$

$$i_1'' = -\frac{e_2}{R_1} = -6A$$

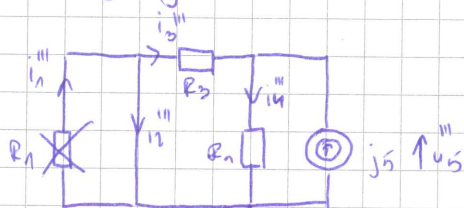
$$-i_1'' + i_2'' + i_3'' = 0$$

$$i_2'' = i_1'' - i_3'' = -9A$$

$$u_5'' = i_4'' \cdot R_4 = 6V$$

	i_1	i_2	i_3	i_4	u_5
e_1	3	3	0	0	0
e_2	-6	-9	3	3	6
$j5$	0	3	-3	3	6
wszystki	-3	-3	0	6	12

③ tylko $j5$

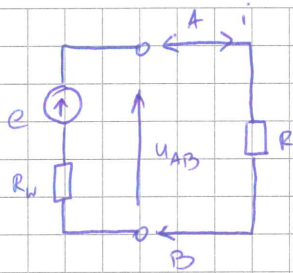


$$i_1''' = 0 \quad \text{bo } R_1 \text{ jest zwarty}$$

$$i_3''' = -i_2''' = -(i_4''') = -\left(\frac{1}{2} j5\right) = 3A$$

$$u_5''' = R_4 \cdot i_4''' = 6V$$

Układy Równoważne Metoda Węzłowa

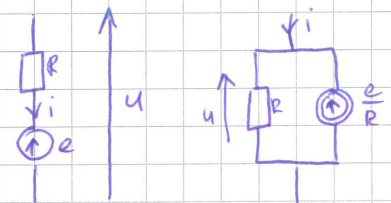
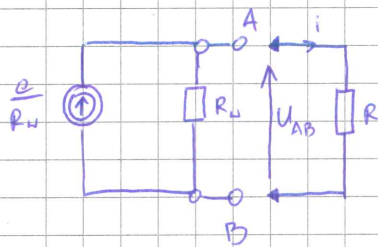


$$U_{AB} = e - iR_w$$

$$\frac{U_{AB}}{R_w} = \frac{e}{R_w} - i$$

$$\frac{e}{R_w} = \frac{U_{AB}}{R_w} + i$$

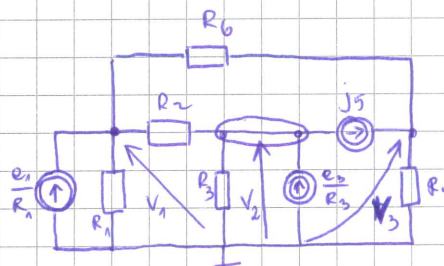
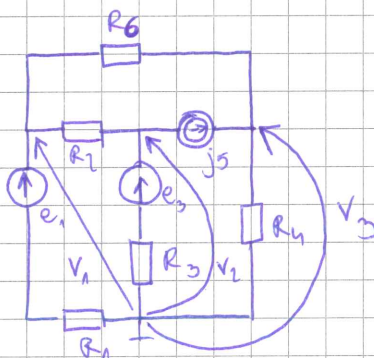
$$j = i_w + i$$



$$u - e = iR$$

$$i = \frac{u}{R} - \frac{e}{R}$$

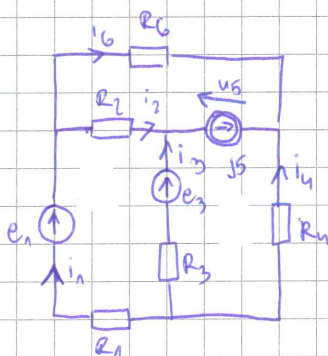
Opis obwodu metodą węzłową

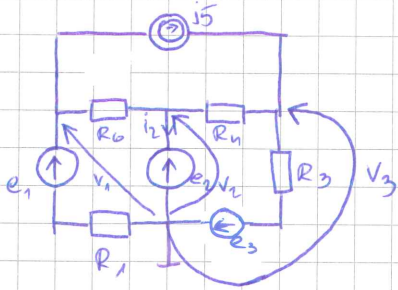


p. dopływające = p. dopływające

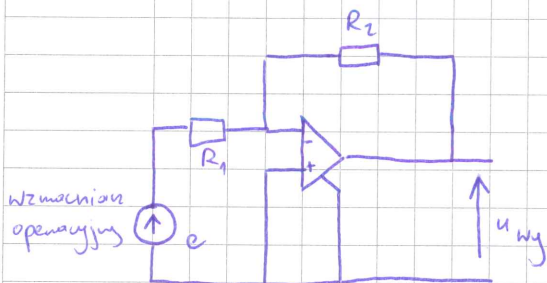
$$\begin{aligned} \textcircled{1} & \left\{ \begin{aligned} \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{R_2} + \frac{V_1 - V_3}{R_6} &= \frac{e_1}{R_1} \\ \frac{V_2 - V_1}{R_2} + \frac{V_2}{R_3} &= \frac{e_2}{R_3} - j5 \\ \frac{V_3}{R_4} + \frac{V_3 - V_1}{R_6} &= j5 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

wzrost 1.





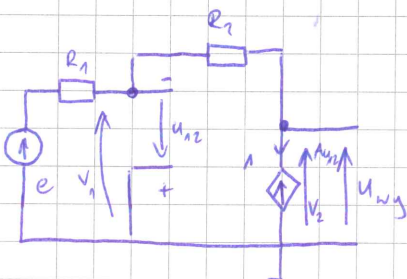
$$\begin{cases} \frac{V_1 - V_2}{R_6} + \frac{V_1}{R_1} = -j5 + \frac{e_1}{R_1} \\ \frac{V_2 - V_1}{R_6} + \frac{V_2 - V_3}{R_4} + i_2 = 0 \\ \frac{V_3}{R_3} + \frac{V_3 - V_2}{R_4} = j5 - \frac{e_3}{R_3} \\ V_2 = e_2 \end{cases}$$



$$\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{R_2} = \frac{e_1}{R_1}$$

$$\frac{V_2 - V_1}{R_2} + i = 0$$

$$V_2 = A u_{i2} = A (-V_1)$$



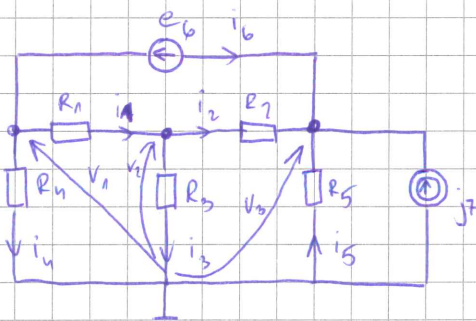
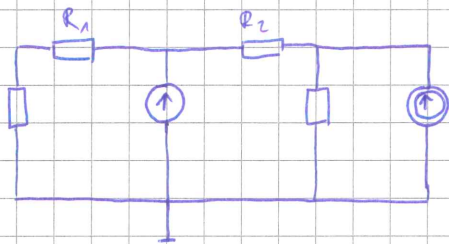
$$\frac{V_1 - V_2}{R_1} + \frac{V_1}{R_4} = -j6$$

wszystkie prądy dopływają

$$\textcircled{1} \quad \frac{V_1 - V_2}{R_1} + \frac{V_1 - 0}{R_2} + j5 = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{V_3 - V_2}{R_1} + \frac{V_3 - 0}{R_5} - j7 = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{V_2 - V_1}{R_1} + \frac{V_2 - V_3}{R_2} + \frac{V_2}{R_3} = 0$$



PPK

$$① \quad i_4 + i_1 + i_6 = 0$$

$$② \quad -i_1 + i_3 + i_2 = 0$$

$$③ \quad -i_6 - i_2 - i_5 - j7 = 0$$

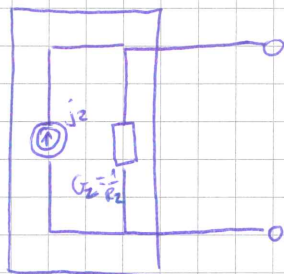
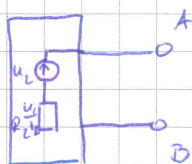
$$V_1 - V_3 = e_6$$

$$i_4 + i_1 + \cancel{i_6} - \cancel{i_6} - i_2 - i_5 - j7 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_4 + i_1 - i_2 - i_5 - j7 = 0$$

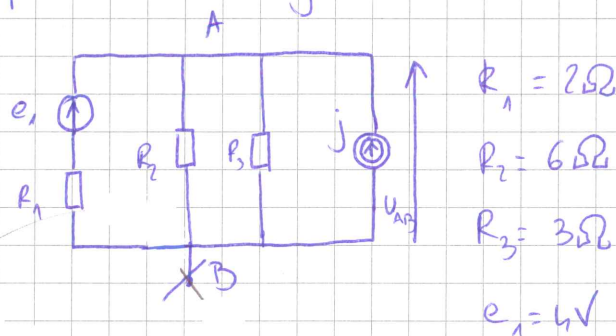
4 grudnia
festiwal kół
naukowych

Twierdzenie Thevenina - Nortona

Prąd
zworowany



Każdy liniowy dwójnik elektryczny można zastąpić wybraną parą źródeł AB niezwykłym źródłem napięcia oparametrach u_Z i R_Z . Napięcie u_Z występuje na rozwarowanych zaciskach AB, a rezystancję linijny z zacisków AB po usunięciu wszystkich źródeł niezależnych.



$$R_1 = 2\Omega$$

$$R_2 = 6\Omega$$

$$R_3 = 3\Omega$$

$$e_1 = 4V$$

$$j = 2A$$

$$U_{AB} = 4V$$

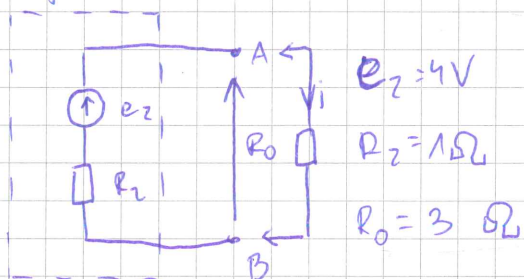
$$\frac{U_{AB}}{R_1} + \frac{U_{AB}}{R_2} + \frac{U_{AB}}{R_3} = j + \frac{e_1}{R_1}$$

$$U_{AB} = \frac{\frac{e_1}{R_1} + j}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

$$R_Z = 1\Omega$$

$$R_Z = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Dwójnik Thevenina



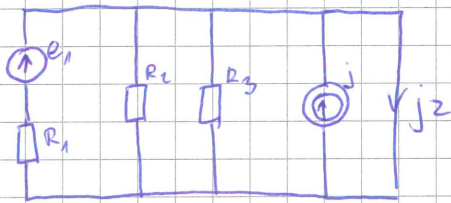
$$e_Z = 4V$$

$$R_Z = 1\Omega$$

$$R_0 = 3\Omega$$

$$i = \frac{e_Z}{R_Z + R_0} = 1A$$

$$U_{AB} = i R_0 = 3V$$



$$R_1 = 2 \Omega$$

$$R_2 = 6 \Omega$$

$$R_3 = 3 \Omega$$

$$e_1 = 4 \text{ V}$$

$$j = 2 \text{ A}$$

$$j_z = \frac{e_1}{R_1} + j = \frac{4}{2} + 2 = 4 \text{ A}$$

$$R_z = 1 \Omega$$

Dwójnik Norton

$$j_z = 4 \text{ A}$$

$$R_z = 1 \Omega$$

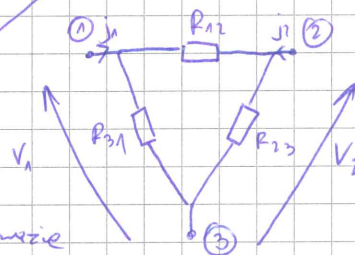
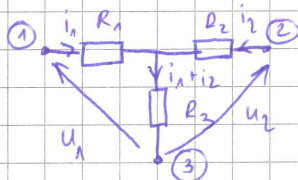


cał to równanie (*)

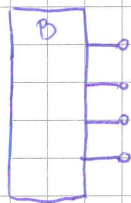
$$u_1 = R_1 i_1 + R_3 (i_1 + i_2) = (R_1 + R_3) i_1 + R_3 i_2$$

$$u_2 = R_2 i_2 + R_3 (i_1 + i_2) = R_3 i_1 + (R_2 + R_3) i_2$$

Zamiana Gwiazda - Trójkąta



Cał to są ułady równanie



$$U = f(i)$$

$$V = f(j)$$

$$v_1 = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} j_1 + \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} j_2$$

$$v_2 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} j_1 + \frac{R_{23}(R_{12} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} j_2$$



$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}$$

$$R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2}$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}$$

Gdy $R_1 = R_2 = R_3 = R_Y$

$$R_{\Delta} = 3R_Y$$



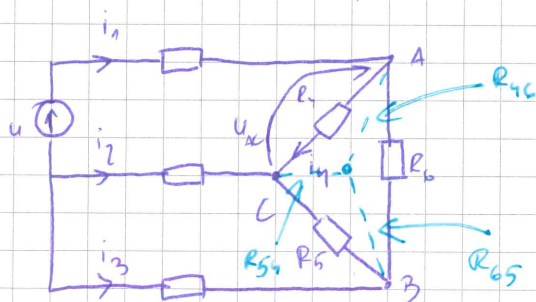
$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 = \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Gdy $R_{12} = R_{23} = R_{31} = R_{\Delta}$

$$R_Y = \frac{1}{3} R_{\Delta}$$



$$\begin{aligned} R &= 1 \\ R &= 0.5 \\ R &= 1.5 \\ R &= 5 \\ R &= 3 \\ R &= 2 \\ u &= 6V \end{aligned}$$

$$\Delta_{456} = Y_{456}$$

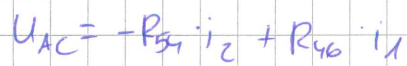
Celem jest obliczenie prądu w jednej gałęzi trójkąta i

Aby obliczyć ten prąd musimy znaleźć U_{AC}

$$R_{46} = \frac{R_4 \cdot R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = 1$$

$$R_{65} = \frac{R_6 \cdot R_5}{R_4 + R_5 + R_6} = 0.6$$

$$R_{54} = \frac{R_5 \cdot R_4}{R_4 + R_5 + R_6} = 1.5$$



$$R = 2$$

$$R = 2$$

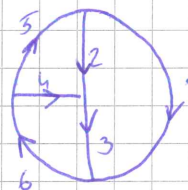
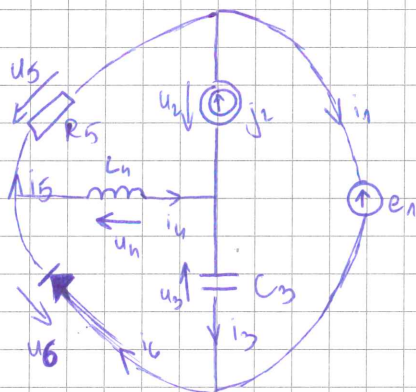
$$I_A = \frac{4}{R + \frac{1}{2}R} = 2A$$

$$i_2 = i_3 = -1A$$

$$U_{AC} = -1,5 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 3,5V$$

$$i_4 = \frac{u_{AC}}{R_4} = 0,7 \text{ A}$$

Graf nichtorientiert bez. Struktur
Graf orientierung - zerstören

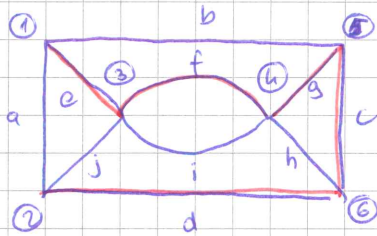


Dla α między neutroni i k rozróżniamy zbiór gęstej grafu utworzony w ten sposób, że

- boję się, że nie ma już wspólny wzrost

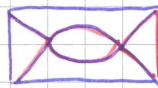
- w każdym węzle nie tworzą się więcej niż 2 gałęzie zbioru
- z węzła j oraz z węzła k tworzą się dokładnie jedna gałąź zbioru

Przykład 1 drogi między węzłami 1 i 2



zbiór gałęzi e-f-g-c-d spełnia def. drogi

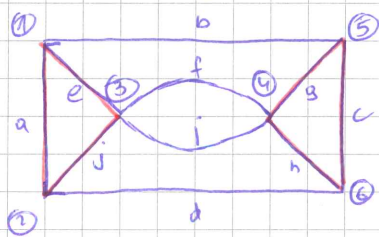
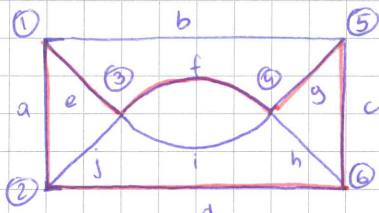
Pętla



nie spełnia def. drogi

jest to podgraf który spełnia następujące warunki

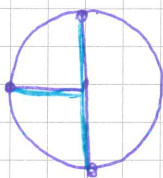
- jest spójny podgraf
- w każdym węzle podgrafu tworzą się 2 i tylko 2 gałęzie



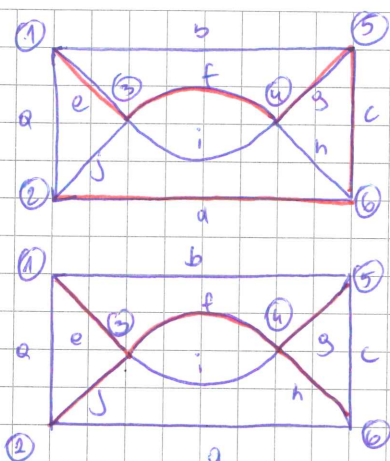
Nie pętla

Drewno

Drewno grafu spójnego nazywamy spójny podgraf który zawiera wszystkie węzły i nie zawiera żadnej pętli



Pozostałe gałęzie grafu tworzą przeciwdrewno (DOPŁNIENIE)



Przekw. fundamentalne

eab

chja

fbijs

dja

gbhja

Twierdzenie

Drewno grafu spójnego o α wierzchołkach i b gałęziach zawiera $\alpha - 1$ gałęzi

Dowód (indukcyjny)

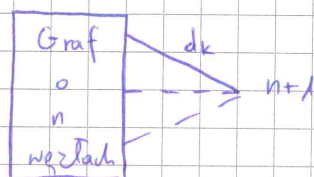
Dla $n=2, b=1$ ($n=\alpha$)

twierdzenie jest prawdziwe

Złożymy że twierdzenie jest prawdziwe dla grafu n -wierzchołowego

Rozpatrzmy graf o $n+1$ wierzchołkach, utworzymy drewno

i wyodrębnimy ten wierzchołek, w którym zbiera się tylko jedna gałąź drewna



Drewno rozpatrywanego grafu składa się zatem z drewna grafu n -wierzchołowego oraz gałęzi dk .

Uwzględniając założenie indukcyjne otrzymamy:

$$(n-1) + 1 = n$$

WNIOSEK

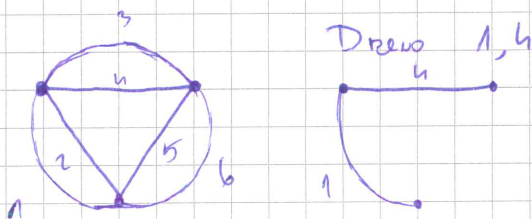
Dopełnienie grafu spójnego o α wierzchołkach i b gałęziach zawiera $b - \alpha + 1$ gałęzi

Prekroj

Przekrojem grafu spójnego nazywamy zbiór gałęzi spełniających następujące warunki:

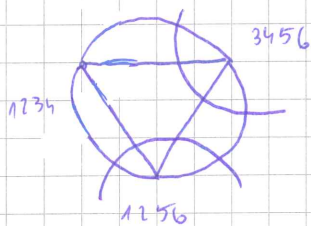
- (1) usunięcie wszystkich krawędzi przekroju bez węzłów końcowych powodując podział grafu na dwa podgrafy
- (2) usunięcie wszystkich krawędzi przekroju poza jedną nie nansze spójności grafu

27 listopada



Przebieg fundamentalny

Przekrój grafu spójnego nazywamy fundamentalnym jeżeli jest utworzony z dokładnie jednej gałęzi drzewa i gałęzi dopełnienia
jest ich w grafie $L-1$



Patla fundamentalny

Pełna fundamentalna nazwa pętli jest utworzona z dokładnej jej gęstości
dopełnienia i gęstości drzew
jest ich w grafie $b-a+1$

L

Twierdzenia dotyczące PRAW KIRCHHOFFA

(1) Maksymalna liczba równań liniowo niezależnych otrzymanych z PPK wynosi $L-1$. Równania te można napisać stosując PPK do $L-1$ fundamentalnych przekrojów

2) Maksymalna liczba równań liniowo niezależnych z NPK wynosi $b-d+1$. Równania te można napisać stosując PPK do $b-d+1$ fundamentalnych pętli

Definicja grafu planarnego

Graf planarny to taki graf który może być narysowany na płaszczyźnie tak aby gałęzie przecinały się tylko w węzłach

Definicja oczka

Oczkiem grafu planarnego nazywamy pętle nie zawierające wewnętrznie żadnych gałęzi

Twierdzenie

Graf planarny zawiera $b-d+1$ oczek. Równania NPK napisane dla $b-d+1$ są liniowo niezależne

Twierdzenie Tellegena

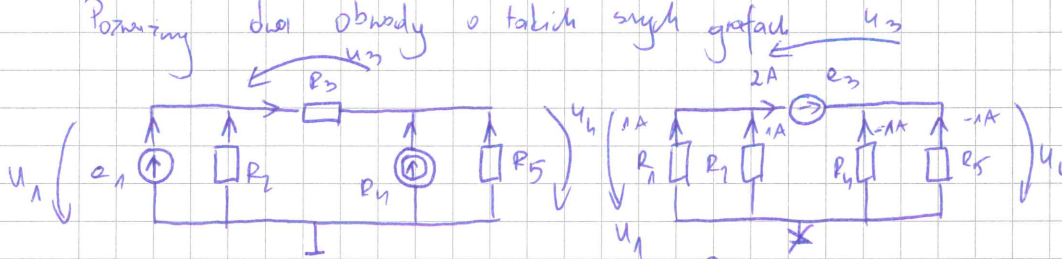
Jeżeli prądy gałęziowe i_m spełniają PPK w każdym węzle grafu oraz napięcia gałęziowe u_m spełniają NPK w każdej pętli grafu wówczas

$$\sum_{k=1}^b u_k i_k = 0$$

($b \Rightarrow$ liczba wszystkich gałęzi grafu, sumowanie odbywa się po wszystkich gałęziach)

Przykłady

Porównanie dwóch obwodów o takich samych grafach



$$R_2 = 4 \Omega$$

$$R_3 = R_5 = 2 \Omega$$

$$J_4 = 3 \text{ A}$$

$$e_1 = 4 \text{ V}$$

$$R_1 = R_2 = 6 \Omega$$

$$R_4 = R_5 = 4 \Omega$$

$$e_2 = 10 \text{ V}$$

$$i_3 = 2 \text{ A}$$

$$V_1 = e_1 = 4$$

$$V_1 \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) - e_1 \cdot \frac{1}{R_3} = J_4$$

$$V_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = J_4 + \frac{e_1}{2}$$

$$V_2 = 5 \text{ V}$$

$$i_2 = \frac{-e_1}{R_2} = -1 \text{ A}$$

$$i_3 = \frac{V_1 - V_2}{R_3} = -\frac{1}{2} \text{ A}$$

$$i_5 = \frac{-V_2}{R_5} = -\frac{5}{2} \text{ A}$$

$$i_1 = 0,5 \text{ A} \quad u_1 = -4 \text{ V}$$

$$i_2 = -1 \text{ A} \quad u_2 = -4 \text{ V}$$

$$i_3 = 0,5 \text{ A} \quad u_3 = -1 \text{ V}$$

$$i_4 = 3 \text{ A} \quad u_4 = -5 \text{ V}$$

$$i_5 = -2,5 \text{ A} \quad u_5 = -5 \text{ V}$$

$$i_1 = 1 \text{ A} \quad u_1 = 6 \text{ V}$$

$$i_2 = 1 \text{ A} \quad u_2 = 6 \text{ V}$$

$$i_3 = 2 \text{ A} \quad u_3 = -10 \text{ V}$$

$$i_4 = -1 \text{ A} \quad u_4 = -4 \text{ V}$$

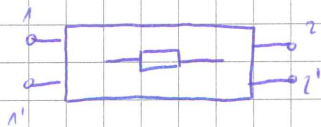
$$i_5 = -1 \text{ A} \quad u_5 = -4 \text{ V}$$

Bilans mocy

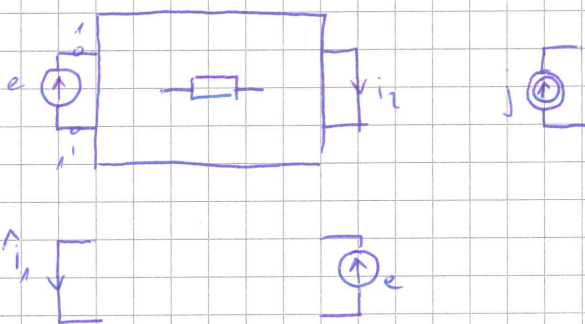
$$\sum_{k=1}^5 u_k^A i_k^B = 0$$

$$\sum_{k=1}^5 u_k^B i_k^A = 0$$

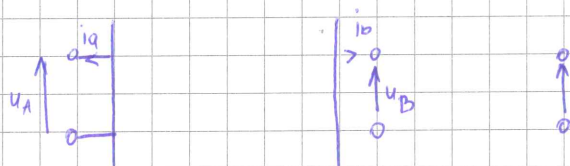
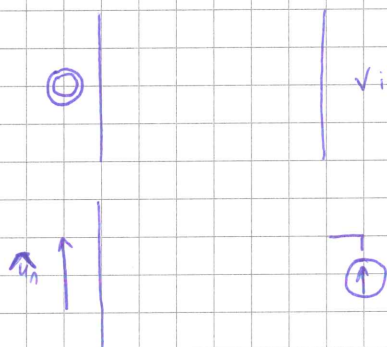
Twierdzenie Tellegena



Twierdzenie o wzajemności indukcyjności



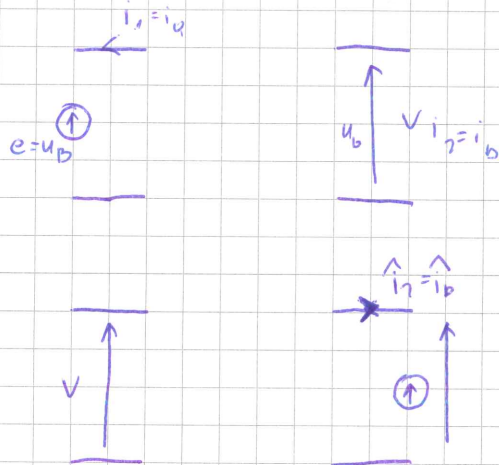
Twierdzenie o wzajemności hybrydowej



Dowód

$$u_A i_A + u_P i_P + \sum_{k=1}^m u_k i_k = 0$$

Uzasadnienie tw. o wzajemności oddziały



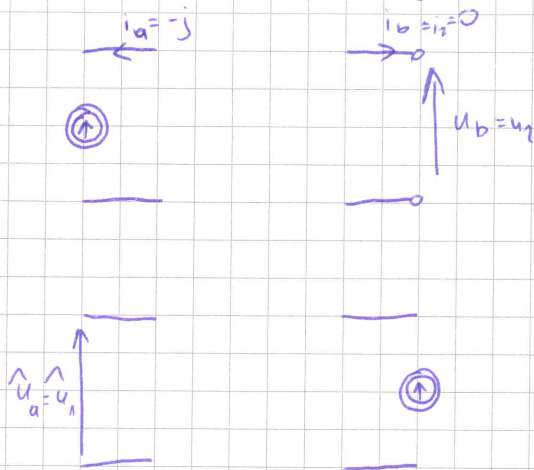
$$u_a \hat{i}_a + u_p \hat{i}_p = \hat{u}_a i_a + \hat{u}_p i_p$$

$$\Downarrow 0 \quad \Downarrow 0$$

$$\hat{e}_1 = e_2$$

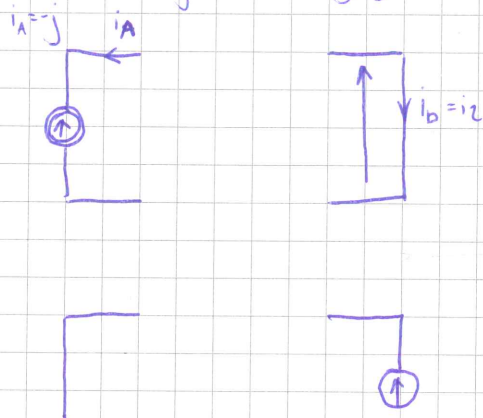
$$i_1 = i_2$$

Uzasadnienie tw. o wzajemności wzajemnego



$\Downarrow 0$

Tw. o wzajemności hybrydowe - obw.



Tw. o włączaniu dodatkowych źródeł

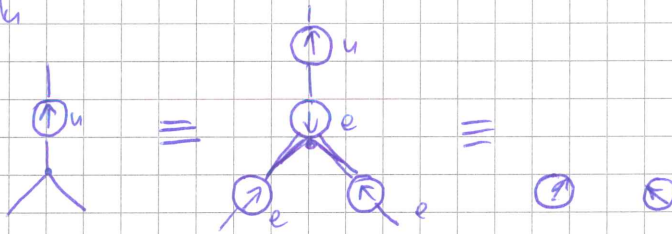
Różny prąd w obwodzie nie zmienia się, jeżeli we wszystkich gałęziach zbiegających się w węze (dowolnym) włączymy źródła napięć o tych samych wartościach napięć źródłowych i tak samo skierowane względem węzła

Dowód wynika NPK

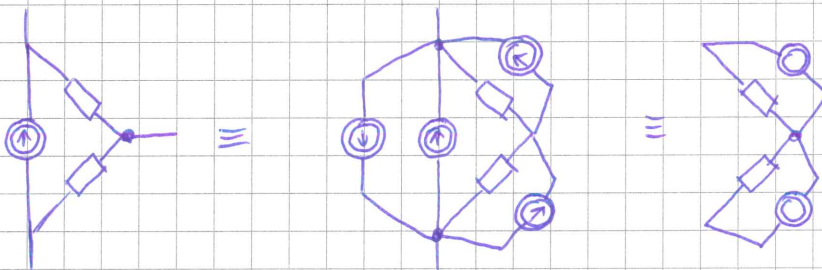
Różnica napięć w obwodzie nie zmienia się, jeżeli w pętli (dowolnej) pomiędzy kolejnymi węzłami włączymy źródła prądów o tych samych prądach źródłowych i tak samo skierowane względem kierunku obiegu pętli

PPK

Wniosek



Źródło $e = u$ zostało przeniesione z jednej gałęzi obwodu do pozostałych gałęzi zbiegających się w tym węzle



wszystkie prądy źródłowe mają wartość j

Twierdzenie o kompensacji

Rozważamy zmiany prądów i napięć przy zmianach parametrów obwodu. Rozpatrujemy obwód ze zmieniającą się rezystancją

Zmiana tej rezystancji ΔR

a spowoduje zmianę Δi

15 lub 20
stycznia
kolokwium

rozważania
Kirchoffa

metoda
superpozycji

tw. i
w praktyce

metoda węzłowa
przykład
jak się tworzy
zobowiązanie

tw. Thevenina
Nortona

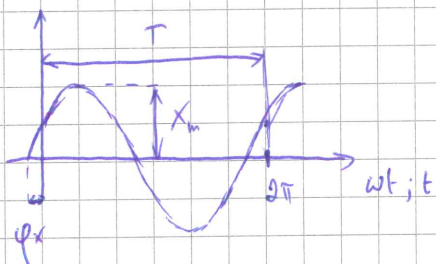
Pracej
obrotu

Tw. o
kompensacji
gradientu

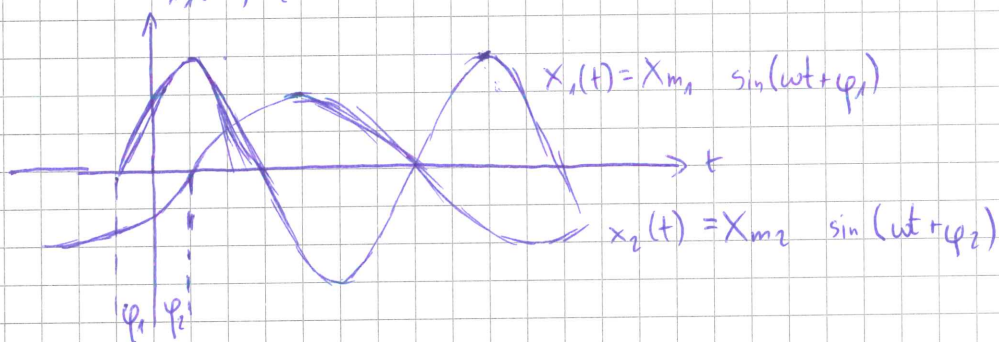
Prądy i napięcia sinusoidalnie zmienne

$$x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$$

↑
wartość chwilowa

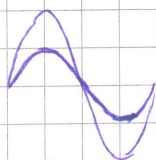


Przebiegi przesunięte o kąt $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$
 $x_1(t), x_2(t)$



$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 > 0$$

W przebiegu



$$T = 0,01 \text{ s}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = 11/10^2 \text{ rad}$$

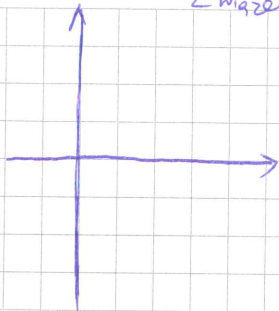
Weldzy a sinusoida



$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$u(t_0) = u_0$$

Związek między wykresem wektorowym a czasem



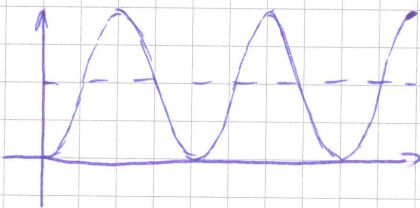
Dodawanie sinusoid



Wartość skuteczna

$$X_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt}$$

$$x(t) = X_{max} \sin(\omega t + \varphi_x)$$



DLA SINUSA

$$X_{sk} = \frac{X_{max}}{\sqrt{2}}$$

REZYSTOR idealny (liniowy)

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$u(t) = i(t)R$$

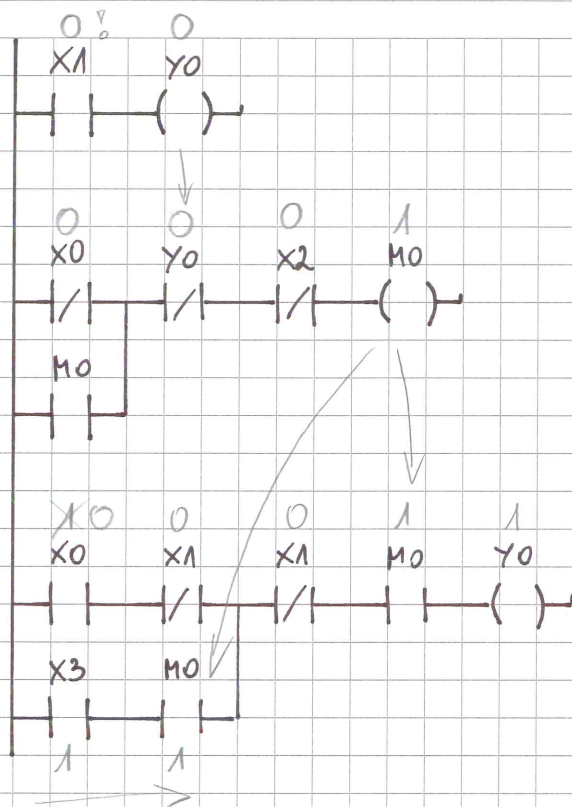
$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u) = R I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$U_m = R I_m \quad \varphi_u = \varphi_i$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

PLC

Zadanie 1



Aby $Y0 \rightarrow 1$

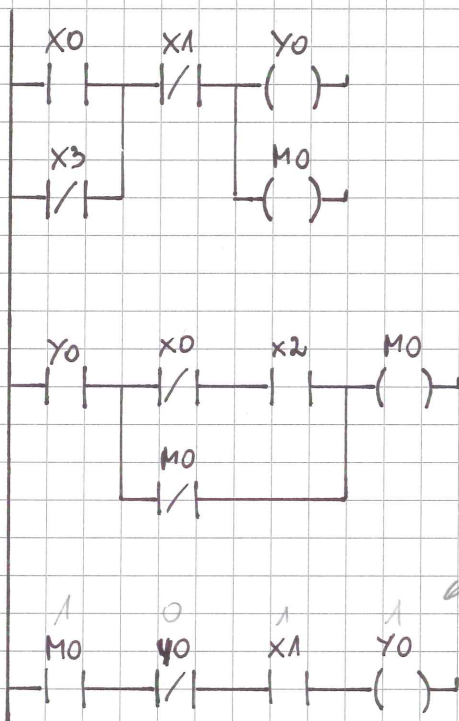
$X0 = 0$

$X1 = 0$

$X2 = 0$

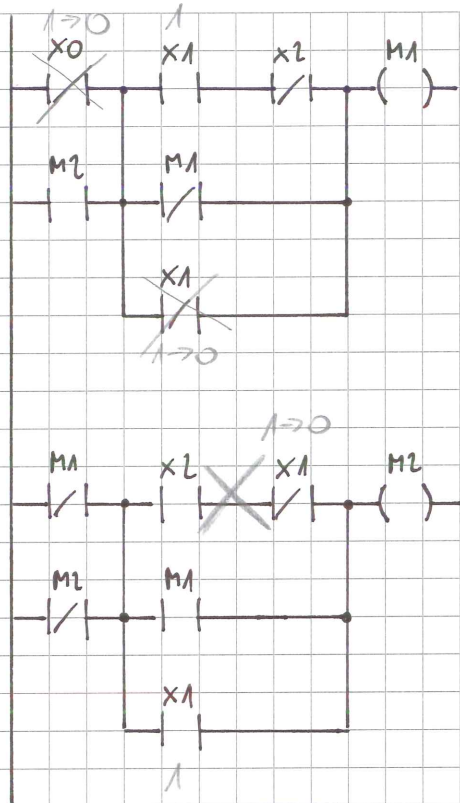
$X3 = 1$

Zadanie 2



Nie ma takiego stanu
by $Y0 = 1$

Zadanie 3

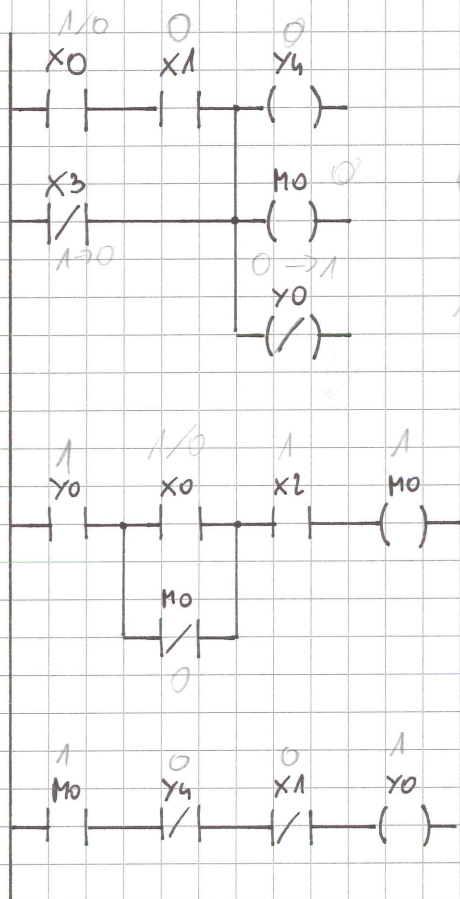


Jeżeli $X0=1$ oraz $X1=1$

Po 4 cyklach

	M1	M2
1)	X0	X1
2)	1	0
3)	0	1
4)	1	0

Zadanie 4



Aby $Y0 \rightarrow 1$

$X0$ 1 lub 0 \leftarrow dowolne

$X1$ 0

$X2$ 1

$X3$ 1

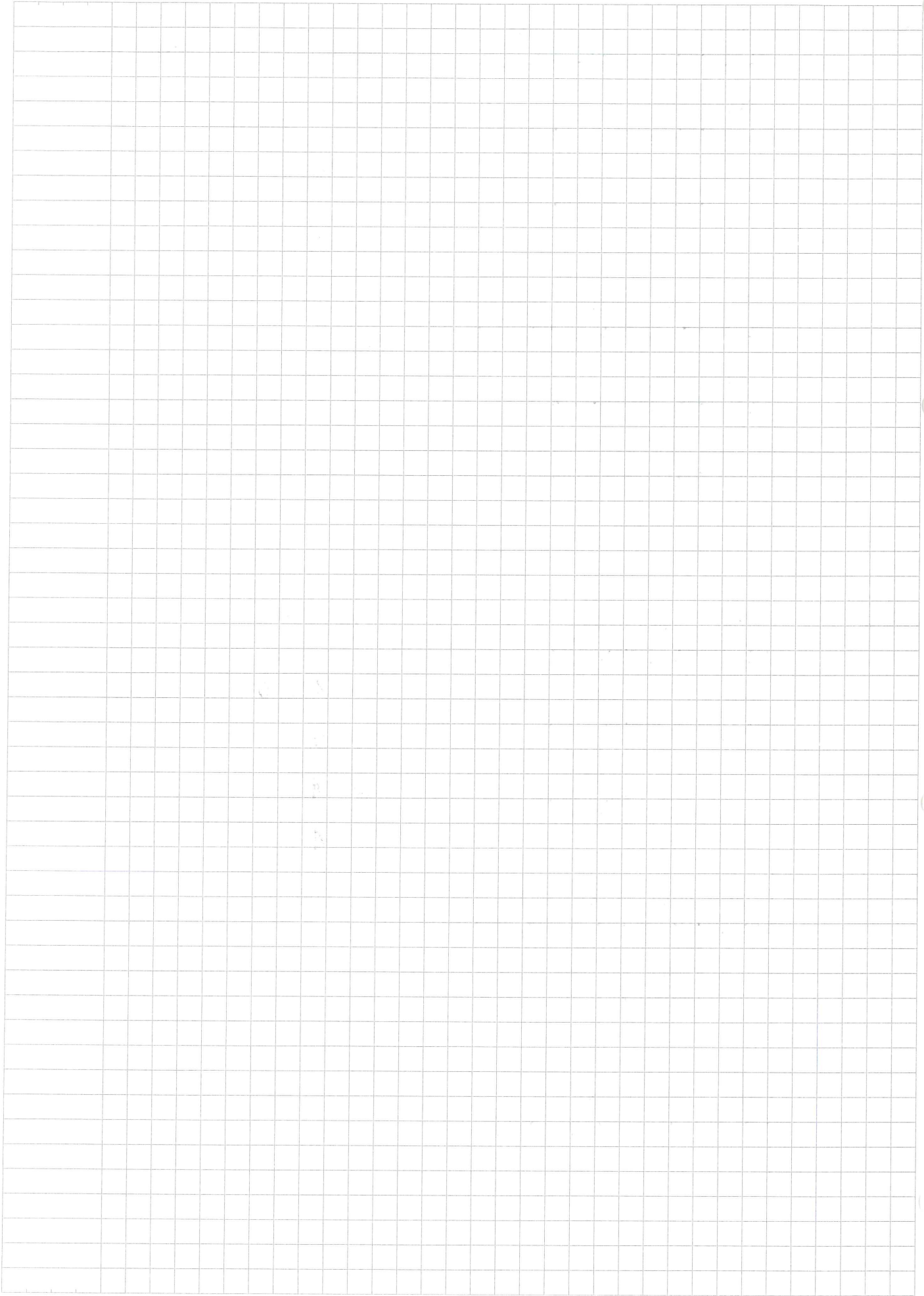
$X1$ ✓

$Y4 \rightarrow 0$

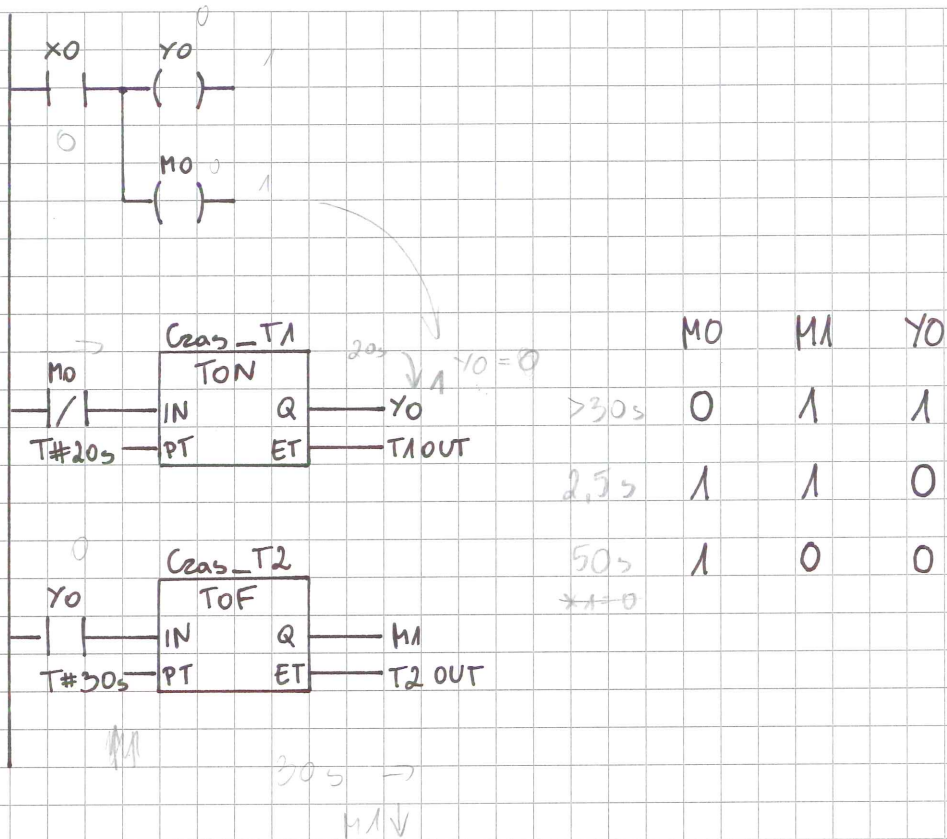
$M0 \rightarrow 1$

$X2 \rightarrow 1$

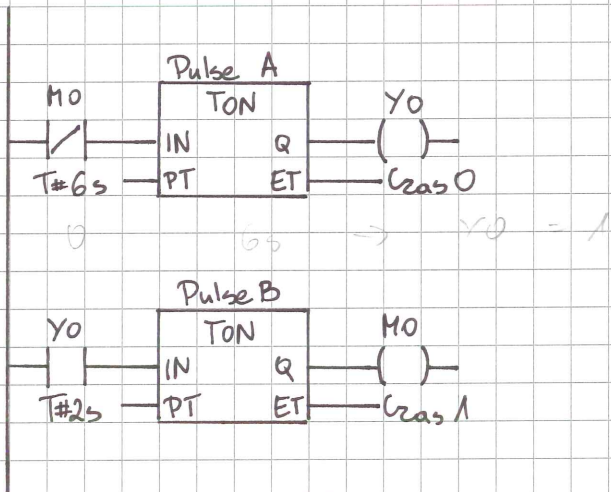
$M0 \rightarrow 0$



Zadanie 5



Zadanie 6

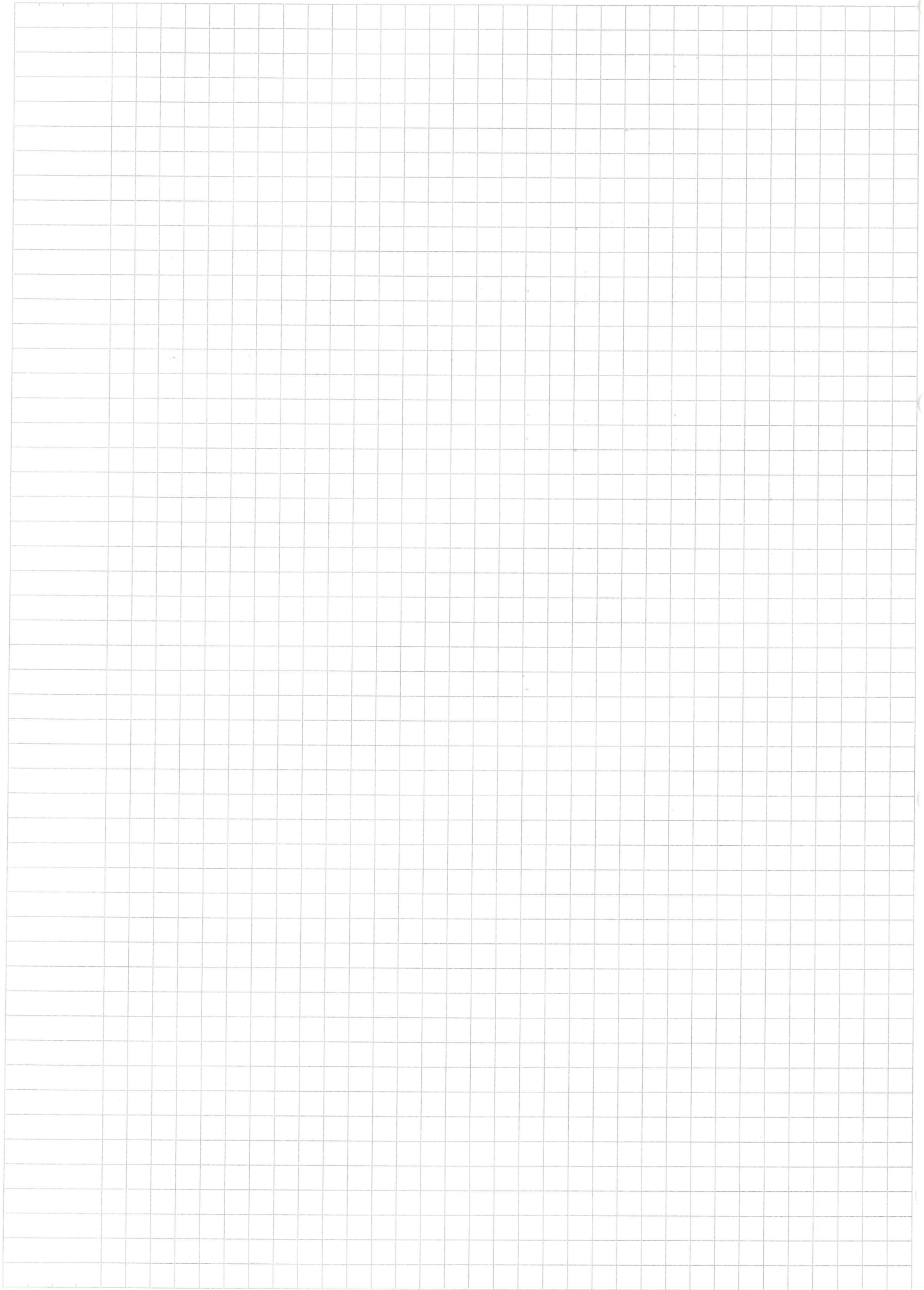


Jaki jest wynik działania programu gdy $(M0_{(t=0s)}=0)$?

Bit	M0	Y0
w 2 sekundzie	0	0
w 7 sekundzie	0	1

Podać współczynnik wypełnienia sug. na wyższą YO. 25%

Oszacować czas wykonania flagi MO



Zadanie 7

Jaka wartość temperatury będzie „widział” sterownik jeżeli:

- do PLC dotarczony został czujnik z wyjściem prądowym 4-20 mA
- prąd płynący w obwodzie czujnika wynosi 16 mA
- czujnik pracuje w zakresie $500^{\circ}\text{C} - 1000^{\circ}\text{C}$

$$y = ax + b$$

\uparrow 16 mA \uparrow 500
 $\frac{500}{16}$

$$16 \text{ mA} - 500^{\circ}\text{C}$$

$$1 \text{ mA} - \frac{500}{16}^{\circ}\text{C}$$

$$500 + 12 \cdot \frac{500}{16} = 875^{\circ}\text{C}$$

$$T = 875^{\circ}\text{C}$$

Zadanie 8

Jaki będzie górny zakres czujnika ciśnienia jeżeli:

- do PLC dotarczony został czujnik z wyj. prądowym 4-20 mA
- prąd płynący w obwodzie czujnika wynosi 12 mA
- sterownik „widzi” 500 mmHg
- minimalne mierzone ciśnienie to 100 mmHg

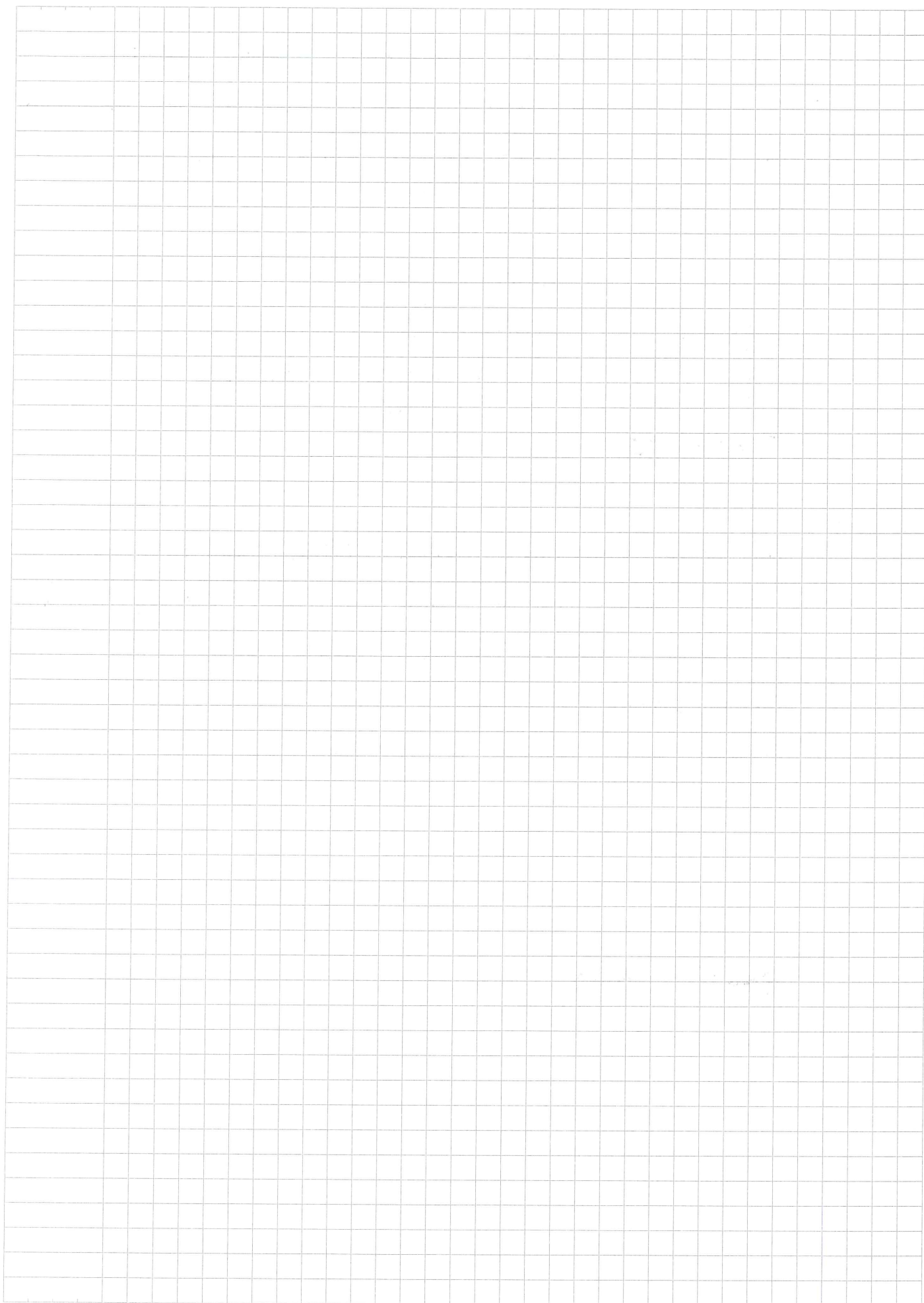
$$400 \text{ mmHg}$$

$$8 \text{ mA}$$

$$1 \text{ mA} - 50 \text{ mmHg}$$

$$100 + 16 \cdot 50 = 900 \text{ mmHg}$$

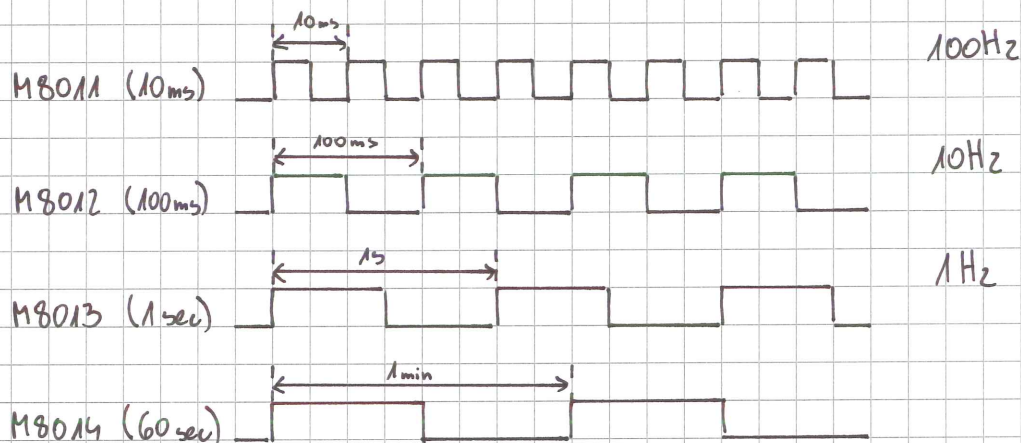
$$p_{\text{max}} = \quad \text{mmHg}$$



Zadanie 9

Jaki będzie współczynnik wypełnienia na wyjściu Y0?

The PLC has the following four types of internal clocks which are always oscillating while the PLC power is ON.



Caution:

Even while the PLC is in the STOP mode, these clocks are always oscillating. Therefore, the rising edge of the RUN monitor (M8000) does not synchronize with the clock start timing.

```
IF M8012 = 1 AND M1 = 0 THEN
```

```
DO := DO + 1;
```

```
M1 := 1;
```

```
ELSE
```

```
M1 := 0;
```

```
END_IF
```

```
IF DO > 7 THEN
```

```
Y0 := 1;
```

```
END_IF
```

```
IF DO > 9 THEN
```

```
Y0 := 0
```

```
DO := 0
```

```
END
```

2/0

4/18

Zadanie 10

Jakie będą współczynniki skalujące czujnik (a, b) jeśli: $h = a * ADC + b$

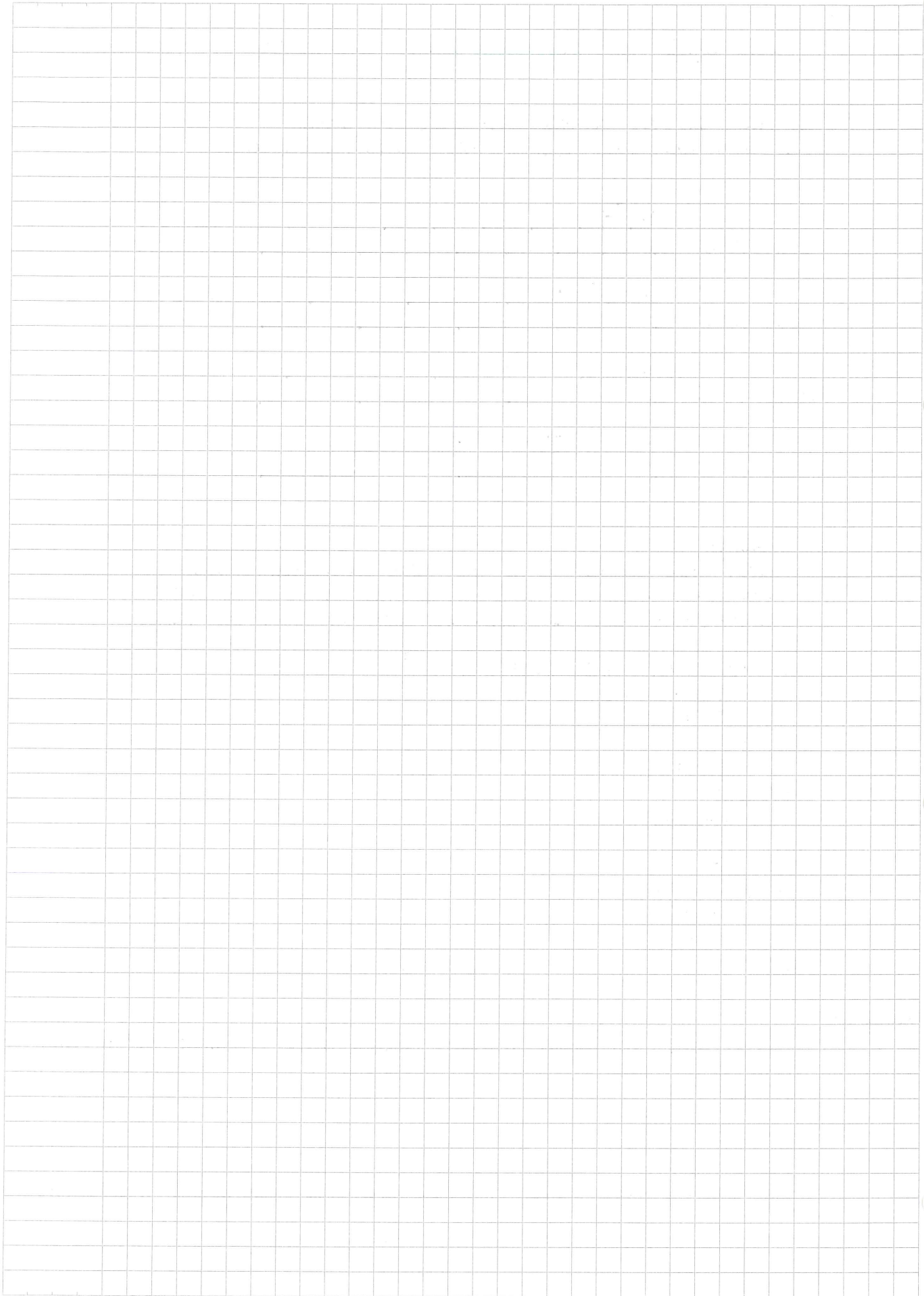
- do PLC

-

- dla poziomu wody równej 100 mm przetwornik zarejestrował wartość ADC=900

-

Wartości



$$100 = a \cdot 900 + b$$

$$300 = a \cdot 1000 + b$$

$$200 = 3100 \cdot a$$

$$a = \frac{2}{31}$$

$$100 - \frac{2}{31} \cdot 900 = b$$

$$b = 41 \frac{29}{31} = \frac{1300}{31}$$

Odp
$$h = \frac{2}{31} \cdot \text{ADC} + 41 \frac{29}{31}$$

Zadanie 11

Jeżeli

-

-

-

-

-

to

w jaki sposób należy napisać równanie skalujące, żeby sterownik potrafił (używając do obliczeń instrukcji stało przecinkowych) „zobaczyć” temperaturę wyskalowaną w $^{\circ}\text{C}$ z rozdzielczością 0.1°C .

110 $^{\circ}\text{C}$ - zakres

-30 $^{\circ}\text{C}$
4mA

80 $^{\circ}\text{C}$
20mA

$$T = a \cdot \text{ADC} + b$$

$$4 - 20 \text{ mA} = 16 \text{ mA}$$

✓

$$32768 - 20$$

$$\times - 4$$

$$\times = 6553.6$$

$$\begin{array}{r} 1375 \\ \hline 32768 \end{array}$$

$$\downarrow$$

1

1100 zakres

co 0.1°C

Zadanie 12

Jeżeli

-

-

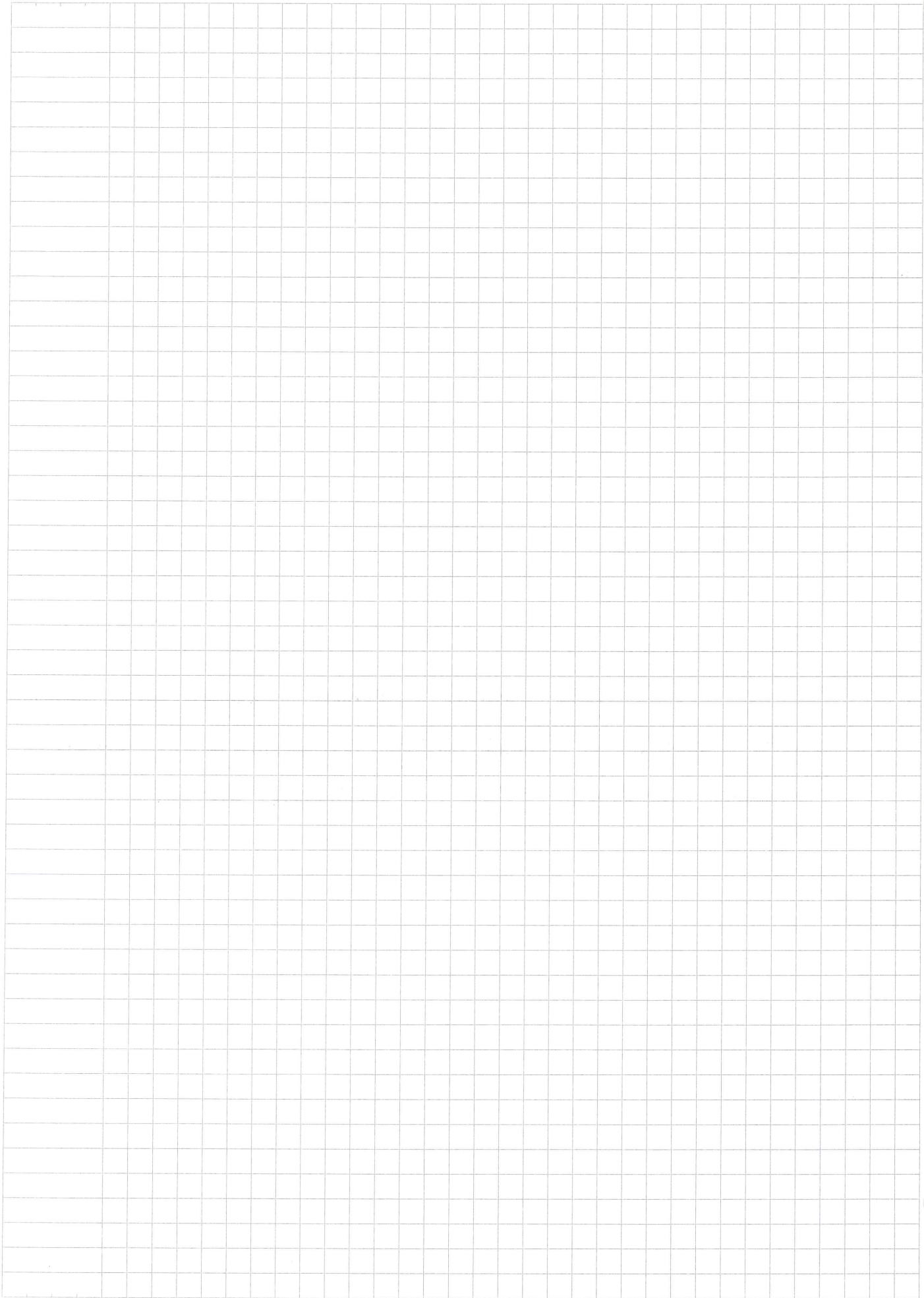
-

$$\begin{array}{l} \text{ADC} \\ \downarrow \\ -300 = a \cdot 6553 - b \\ 800 = a \cdot 32768 - b \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 300 = -a \cdot 6553 + b \\ 800 = a \cdot 32768 - b \end{array}$$

$$- 575$$

$$((1375 \cdot \text{ADC}) : 32768) - 575$$



to

jaki typ wejścia należy wybrać i w jaki sposób podać czujnik oraz jaka będzie postać równania skaliującego, żeby sterownik potrafił "zobaczyć" temperaturę wyskalowaną w $^{\circ}\text{C}$ z rozdzielnością 0.001°C

60°C

60 000

nie można
taka rozdzielność

Zadanie 13

11 - | ()

|

25 →

Można

0

25 $MO=1$

nie można

25

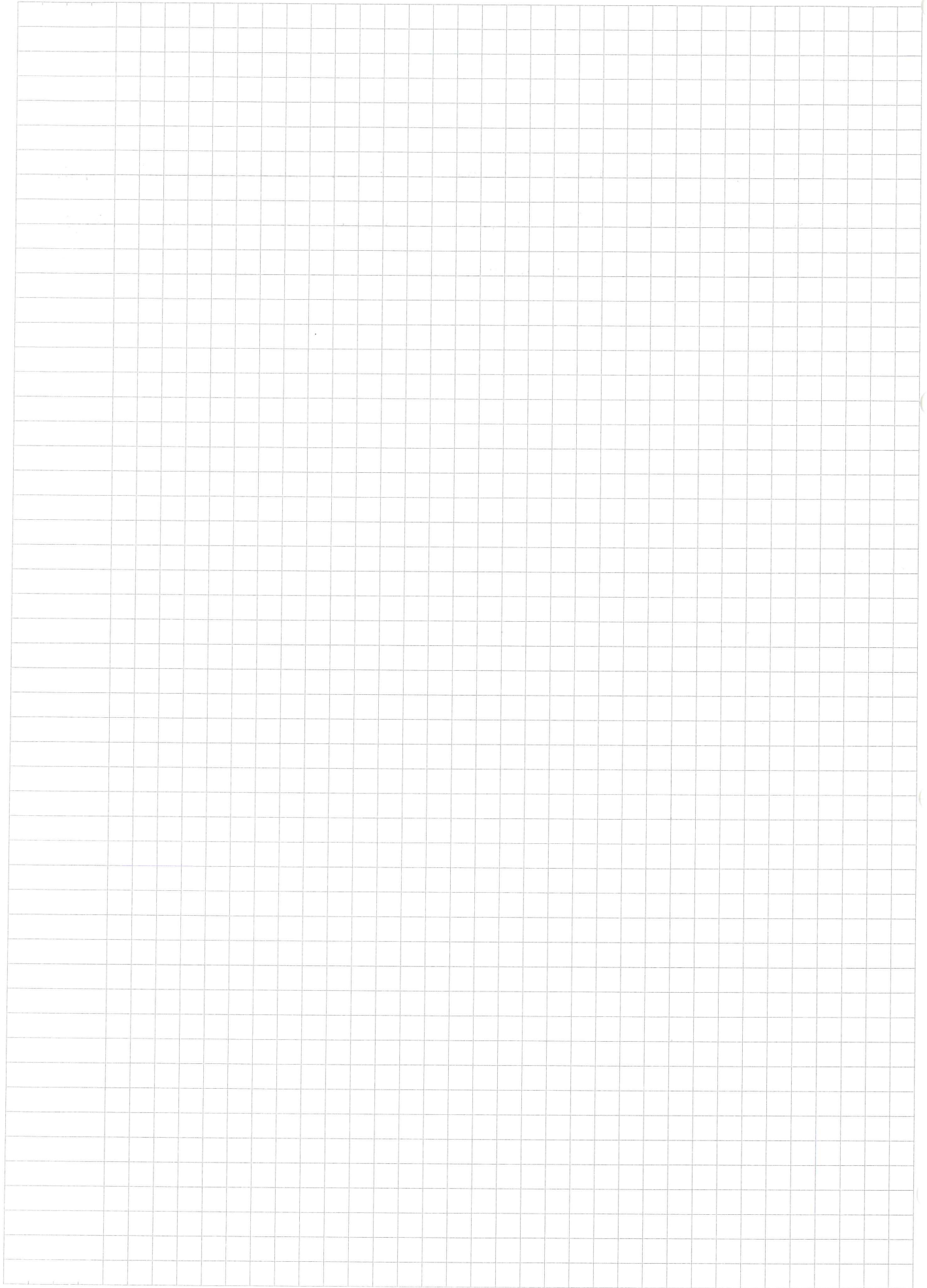
Po 105

1

15

→

nigdy



Zadanie 14

1 1 ()

1 1

1 1 ()

1 1

1 1

M2

0

M1

1

→

Y0

0

0

4

1

25

→

M2

1

70 %

Y0 1

75

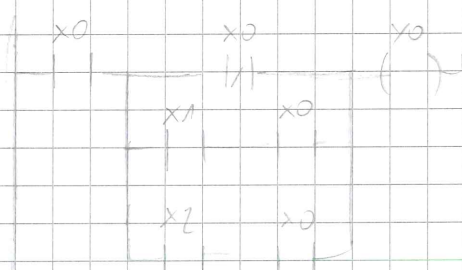
5

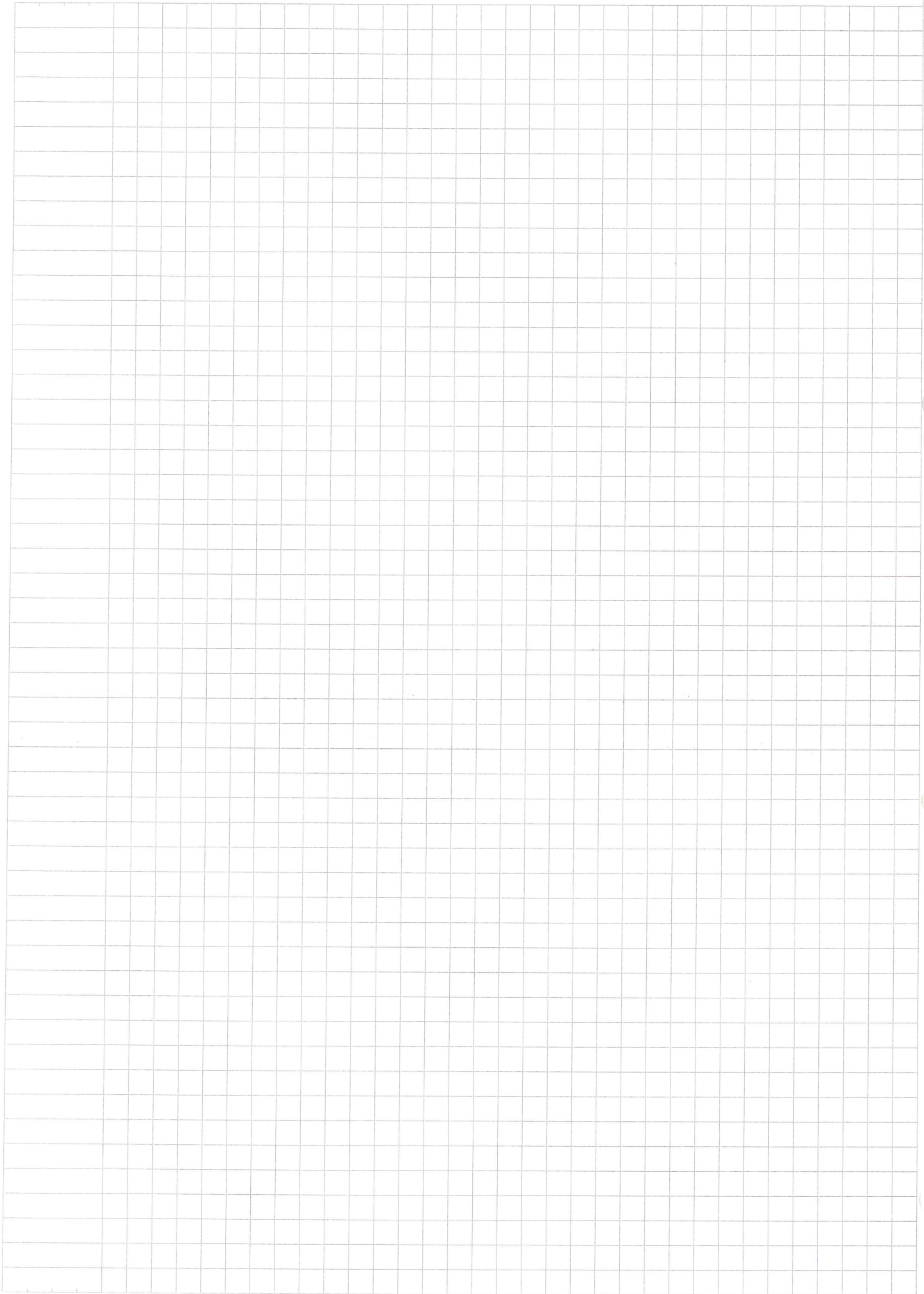
Zadanie 15

Jeżeli w języku ST:

$$Y0 = X0 \text{ AND } ((\text{NOT } X0) \text{ OR } (X1 \text{ AND } X0) \text{ OR } (X2 \text{ AND } X0));$$

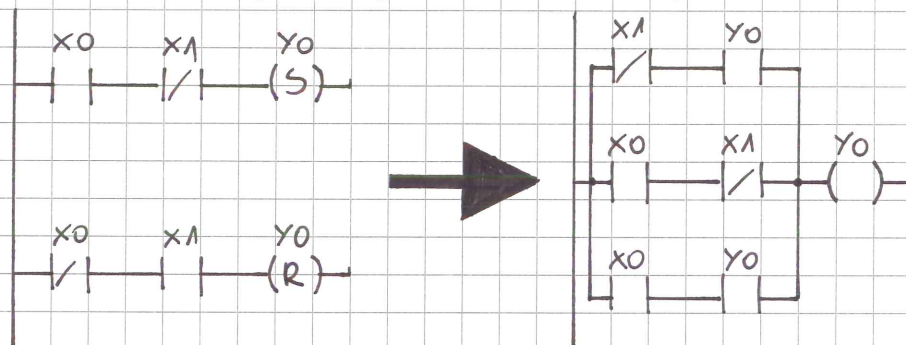
to jak będzie wyglądała ta funkcja zapisana za pomocą schematu drabinkowego?





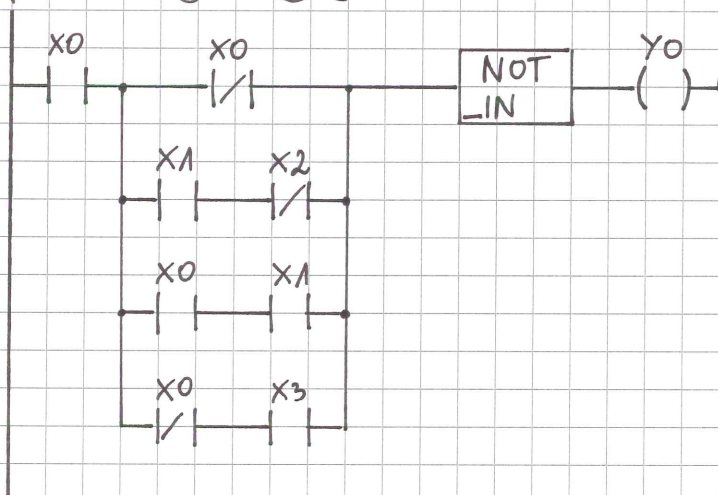
Zadanie dodatkowe 1

Zastąpić poniższy program równoważnym, zapisanym w pojedynczej sieci i zakończonym pojedynczą cewką prostą - (Y0)

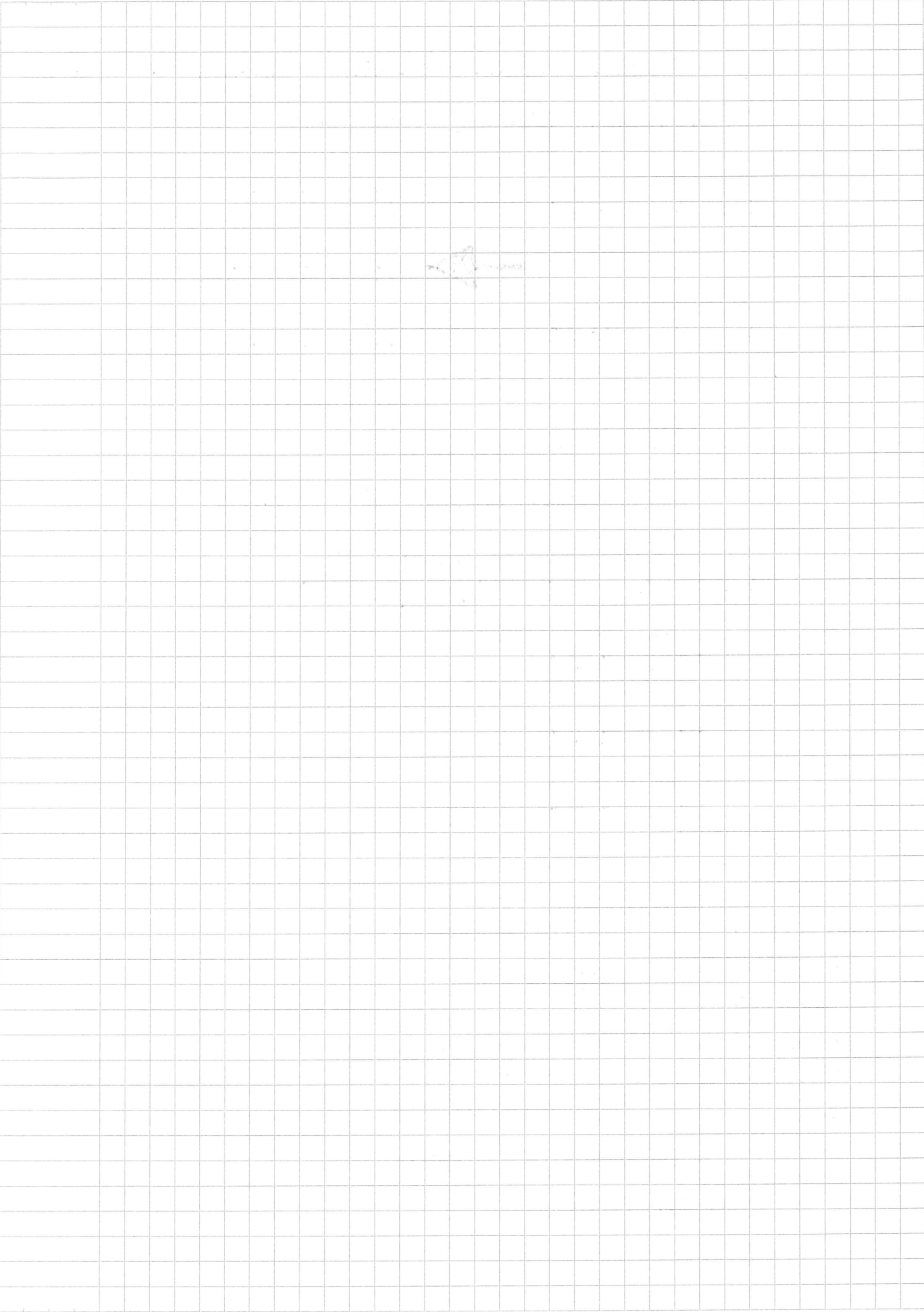


Zadanie dodatkowe 2

Uprość funkcję używając minimalną ilość elementów



- 1) $X0 \wedge \overline{X0} \rightarrow \text{zawsze } 0$
 lub $X0 \wedge X1 \wedge X2$
 2) $X0 \wedge X1 \wedge \overline{X2}$
 lub $X0 \wedge X0 \wedge X1$
 3) $X0 \wedge X1$
 lub $X0 \wedge X0 \wedge X3$
 4) $X0 \wedge \overline{X0} \wedge X3 \rightarrow \text{zawsze zero}$
 tak jak w 1)

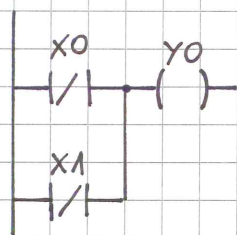


$$y_0 = \overline{x_0(\overline{x_0} + x_1\overline{x_2} + x_0x_1 + x_3\overline{x_0})}$$

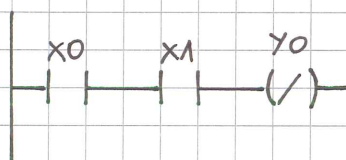
$$y_0 = \overline{x_0(\overline{x_0}(1+x_3) + x_1(1+\overline{x_2}))}$$

$$y_0 = \overline{x_0(\overline{x_0} + x_1)}$$

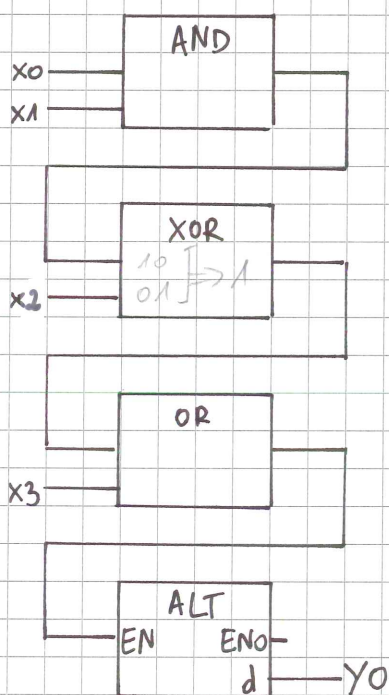
$$y_0 = \overline{x_0x_1}$$



LUB



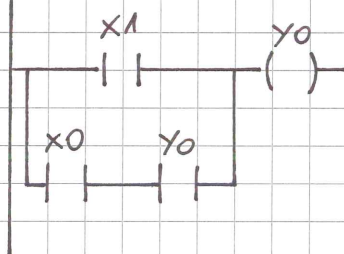
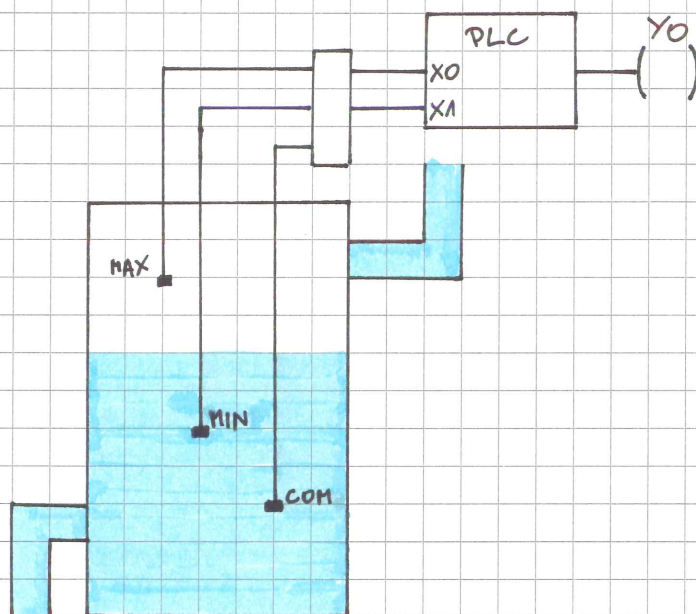
Zadanie dodatkowe 3



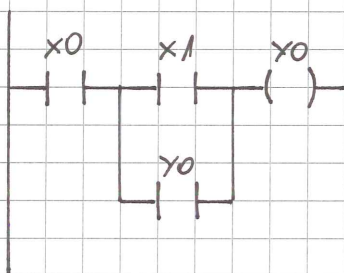
Jeżeli $x_0=1$; $x_1=1$; $x_2=0$; $x_3=0$,
to jaki będzie stan wyjścia y_0 w 2 i 3
cyklu pracy sterownika

	y_0
1 →	1
2 →	0
3 →	1

Zadanie dodatkowe 4



LUB

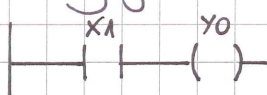
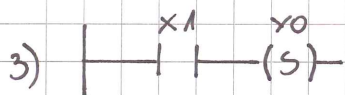


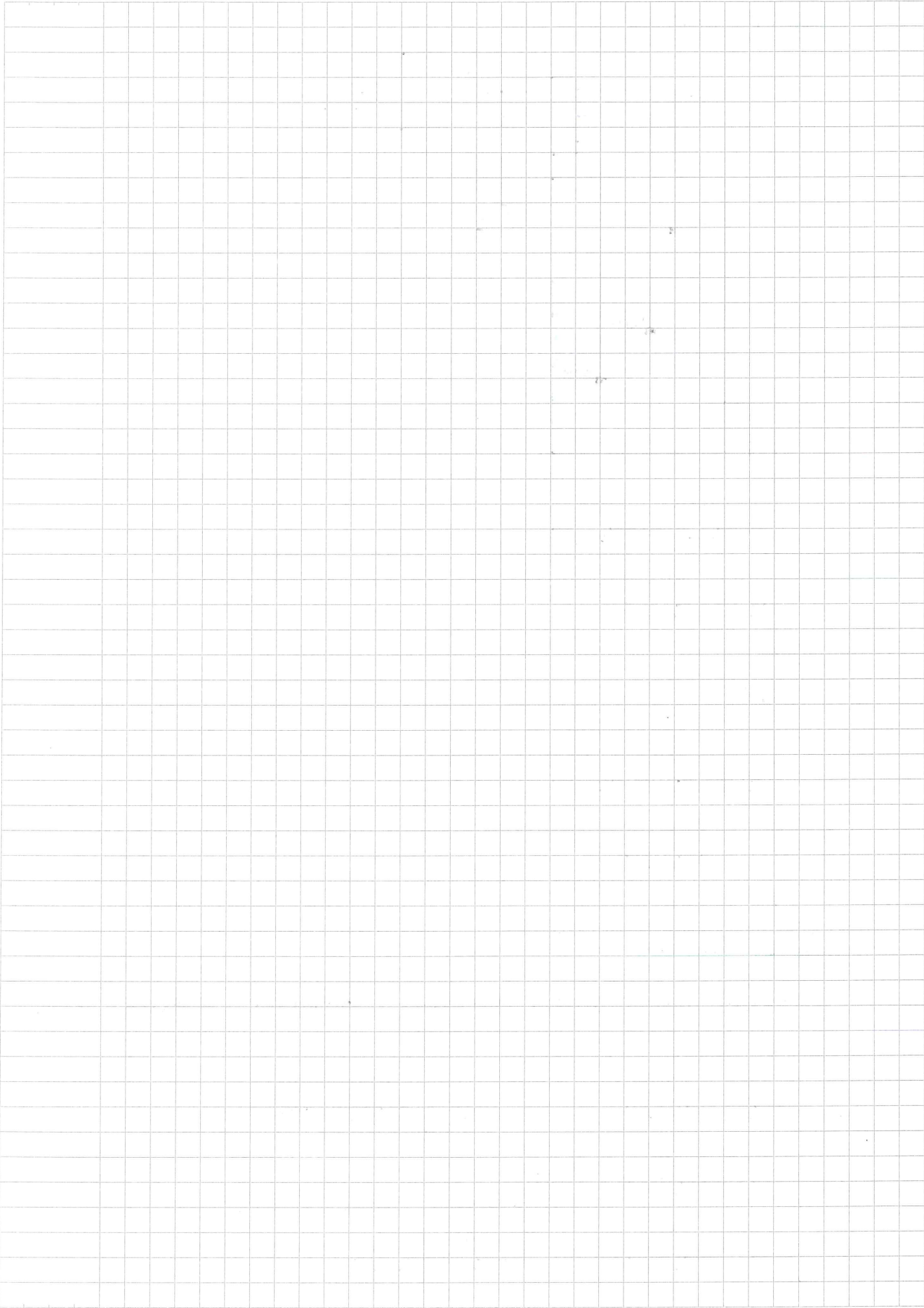
Zadanie dodatkowe 5

Zastąpić poniższy program równoważnym, zakończonym pojedynczą cewką prostą - (Y0)



Odp: Decydują sieci 3 i 4





M8011 $0.01s = 10ms$
M8012 $0.1s = 100ms$
M8013 $1s = 1000ms$
M8014 $1min$

M8002 1 impuls po inicjalizacji programu (impuls inicjalizujący)
M8000 sygnał 1 przez cały czas działania PLC
M8001 sygnał 0 przez cały czas działania PLC

80 strona

87 strona

90 strona

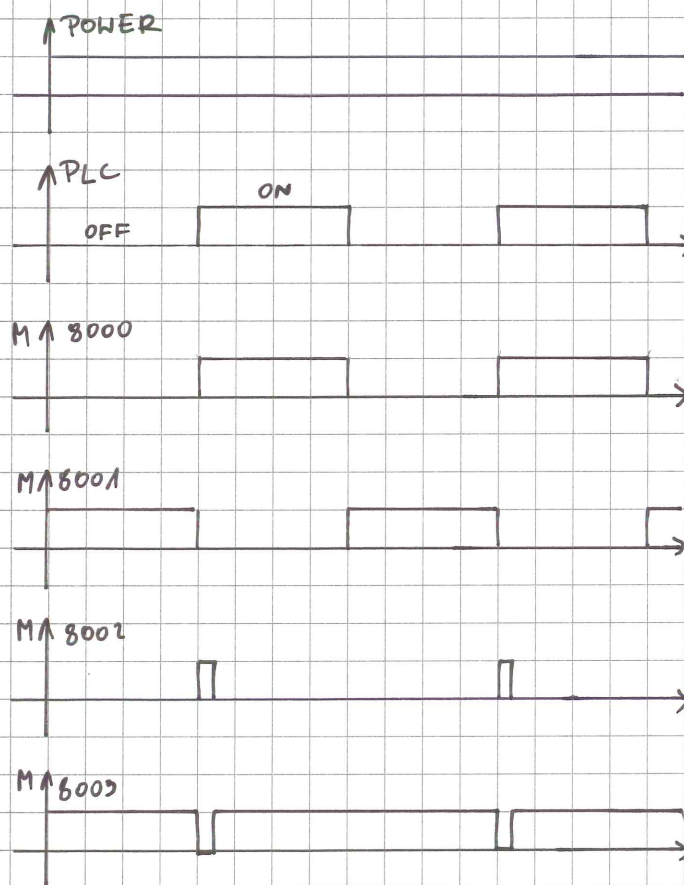
92 strona

117 strona

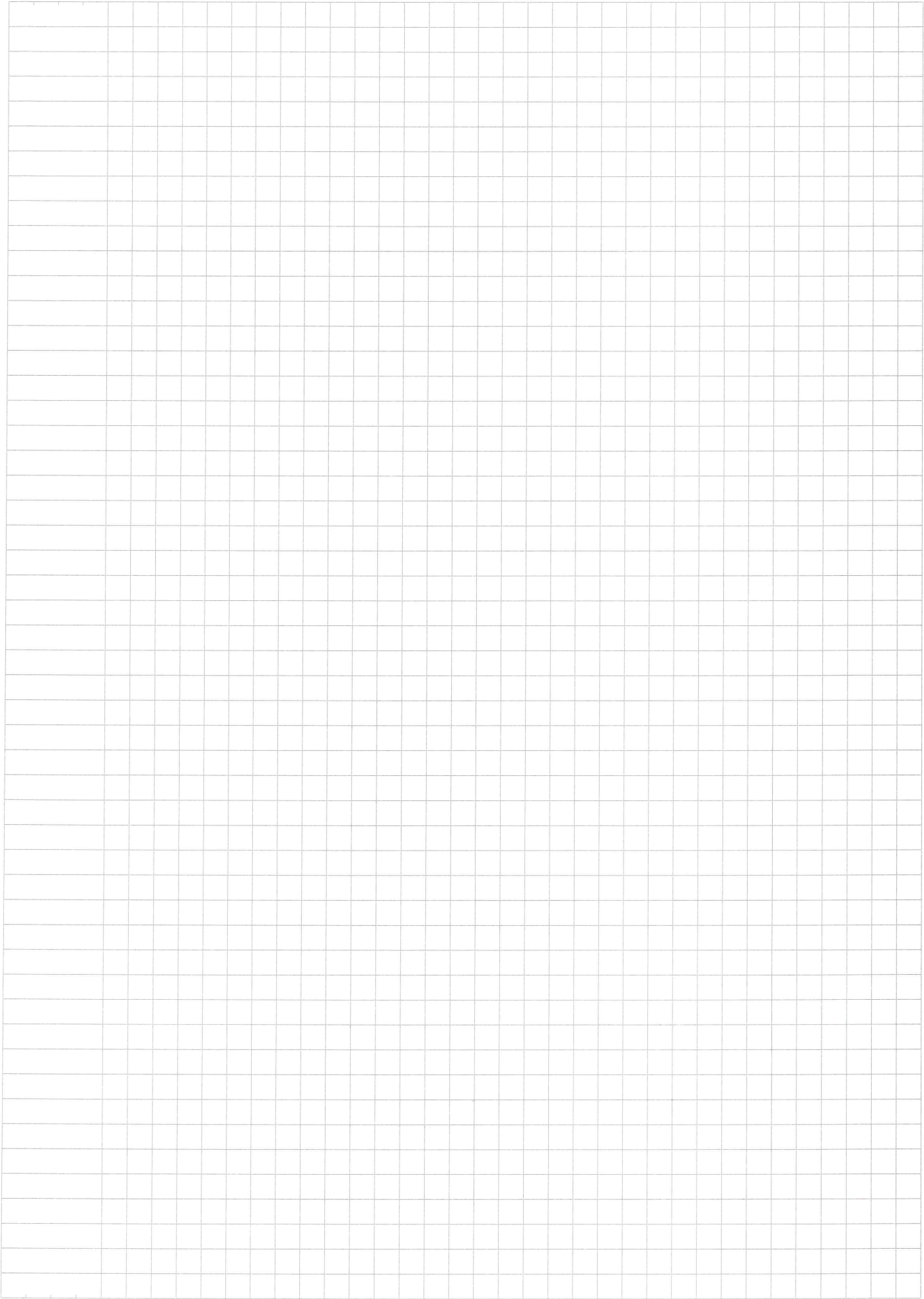
M8003 1 impuls 0

M8004 błędy

M8005 Niska bateria
OFF - No error
ON - error



Minimalna porcja danych bitowych "związanych" są 4 elementy.
K2M0 M0-M7



TRT całkowity czas odpowiedzi

$$TRT = TID + TIT + TSC + TUT + TQT + TQD$$

TID - czas opóźnienia wejścia cyfrowego

TIT - czas przestania informacji z wejścia cyfrowego

TSC - czas cyklu + czas realizacji przerw

TUT - czas wykonania zadań użytkownika

TQT - czas przestania informacji do wyjścia cyfrowego

HMI?

TQD - czas opóźnienia wyjścia cyfrowego

20 strona Liczniki czasu

T192 ... T199 są dedykowane do programów

T250 ... T255 są typu „z podtrzymaniem”

Liczniki zdarzeń

C0 - C199 - 16 bitowe

C200 - C239 - 32 bitowe

C240 - C255 - 32 bitowe szybkie liczniki sprzętowe

} wolne liczniki zdarzeń

Special type M8000 - M8511

Timer

T0 - T191 100ms

X7 → X10 T192 - T199 100ms

T200 - T245 10ms

T246 - T249 1ms

T250 - T255 100ms

T256 - T511 1ms

←
TC_L - dana rozdzielność
TS_L - 0/1 po przebiegu czasu
TN_L - obecny stan liczenia
↓
jako word

Counter

C0 - C99 16 bits

C100 - C199 16 bits

C200 - C239 32 bits

C240 - C255 32 bits

BLOK (POU)

to część programu użytkownika ograniczona przez swoją funkcję, strukturę lub zakres stosowania

LD - Schemat drabinkowy

FBD - Bloki funkcjonalne

ST - Tekst strukturalny

SFC - Sekwencja

blok programowy
POU

Liczniki czasu

44 TP - generator impulsu

45 TON - opóźnione załączenie

45 TOF - opóźnione wyłączenie

OUT-T

TCoil TC

TS

TN

TValue

TON

TOF

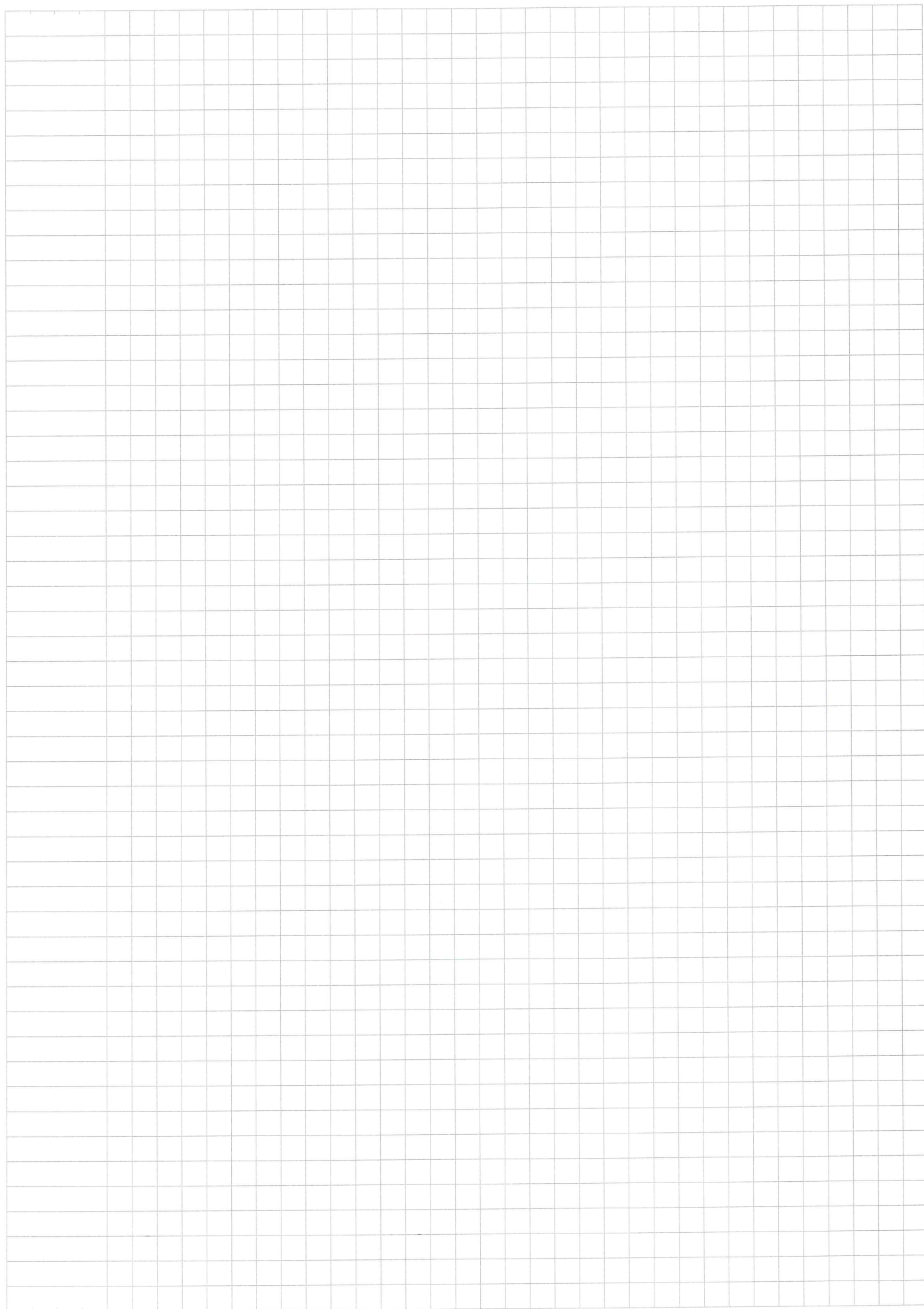
TON {_E} [100 ms]

TON.10 {-E} [10 ms]

TP

TP

TP



"Klient" i "Serwer" są zdolne do porozumiewania się każdy z każdym oraz innymi programami zgodnymi ze specyfikacją OPC. Zgodność ze specyfikacją zapewnia połączenie różnych klientów wielu producentów z jednym OPC serwerem

Najważniejsze zadania serwera OPC

- dbanie, aby dane procesowe były aktualne
- zapewnienie swobodnego dostępu do danych

Najważniejsze zadania klienta OPC

- połączenia do serwera
- odczytywanie statusu serwera
- tworzenie grup i dodawanie zmiennych procesowych
- przeglądanie struktury danych serwera
- przeglądanie właściwości zmiennych procesowych
- odczyt/zapis synchroniczny i asynchroniczny

Serwer OPC

Server OPC

OPC (Object Linking and Embedding for Process Control)

Stanowi model wymiany danych przeznaczony dla systemów automatyki. Bazuje na technologiach obiektów OLE, COM oraz DCOM firmy Microsoft. Jest to nowoczesny standard, coraz powszechniej stosowany w dużych systemach.

Nad jego rozwojem i tworzeniem kolejnych specyfikacji czuwa fundacja OPC Foundation

Celem stosowania OPC jest uniezależnienie oprogramowania monitorującego lub kontrolującego od producenta sprzętu i oprogramowania. Dzięki temu można spiąć w jeden system sterowniki i urządzenia różnych producentów.

Data Provider concept → OPC

Open Connectivity

Data Provider concept → OPC

SQL & XML

Open Connectivity & Standards

Server OPC architektura

W standardzie OPC wymiana danych opiera się głównie na ustalonej architekturze klient i server.

OPC Klient jest programem, który pobiera informacje

OPC Server jest to program, który udostępnia info dla klienta

PLC (Programmable Logic Controllers)

- sterowniki programowalne
- są komputerami przemysłowymi, które pracują pod kontrolą systemu operacyjnego czasu rzeczywistego

4 strona

SCADA (Supervisory Control and Data Acquisition)

HMI (Man Machine Interface)

11 strona

Tekstowe języki programowania

Język IL (Instruction List - Lista rozkazów)

Język ST (Structured Text - Tekst strukturalny)

Graficzne języki programowania

Język LD (Ladder Diagram - Schemat drabinkowy)

12 strona

Język FBD (Function Block Diagram - Funkcyjny schemat blokowy)

Elementy języków programowania

13 Typy danych (ang. Data types)

Jednostki organizacyjne POU (ang. Program organization units)

Schemat sekwencyjny SFC (ang. Sequential Function chart)

16 Elementy konfiguracji

POU

- Funkcje
- Bloki funkcyjne
- Bloki programowe

SFC

SFC zawiera zestaw kroków i tranzycji (przejść), które sprzęgają się wzajemnie przez połączenie kierunkowe. Elementy sieci SFC są przeznaczone do użycia w wewnętrznej strukturze oprogramowania sterowników PLC oraz do zastosowania podczas zapisu algorytmu sterowania.

H 0005

ROR

R →

↓ ↓ ↓ → → →
0000000000000000101

H 5000

ROL

↓ ↓

← L

010100000000000000

H 4001

010000000000000001

SHL

SHR

Skróty

SUB - odejmowanie

ABS - moduł

DIV - dzielenie

MUL - mnożenie

LIMIT -

$\rightarrow 1 \text{ min} \quad \left. \begin{array}{l} \text{wyj} \\ 3 > 2 \Rightarrow 2 \\ 1 < 3 < 2 \Rightarrow 3 \\ 3 < 1 \Rightarrow 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$

MUX - multiplexer

SEL - binarny selektor

MOD - reszta z dzielenia

SIN

LN

COS

EXP fun. wykładnicza

TAN

EXP T fun. potęgowa

ASIN

SQRT pierwiastek

ACOS

SQR kwadrat

ATAN

MOVE

BMOVE

EQ =

GT >

LT <

GE ≥

LE ≤

NE <>

PLS

impuls na zbiorze rosnące

↑↑↑

PLF

impuls na zbiorze opadające

↓↓↓

ALT

1 → zmiana stanu wyj.

ALTP

↑↑↑ → zmiana stanu wyj.

Skroty

INC

DEC

ZRST

RND

Nazwana danych - sieci przemysłowe

LAN Local

MAN Metropolitan

WAN Wide

} Area Network

- sieci o zasięgu lokalnym | kilka km

- sieć miejska | kilkanaście kilkadziesiąt km

- sieci rozległe | region, kraj, świat

Kable skrętkowe

UTP - Unshielded Twisted Pair - Nieekranowana 30MHz

FTP - Foiled Twisted Pair - Ekranowana folią 62,5MHz

S-FTP - Screened-Foil Twisted Pair - Ekranowana całościowo ^{opłotem} 300MHz
+ osobno każdą parę

- Ekranowana folią i opłotem 100MHz

EMC (Electro - Magnetic Compatibility)

określa wpływ jednych systemów elektrycznych na drugie.
opiera się to zarówno emisje jak i odporność

31 CRC - Suma kontrolna

32 LRC - Suma kontrolna

MBP - technologia transmisyjna PROFIBUS

HCS - światłowody kremowe

DP - protokół

XRS - wykres

SPC - Statystyczne sterowanie procesem

Histogram

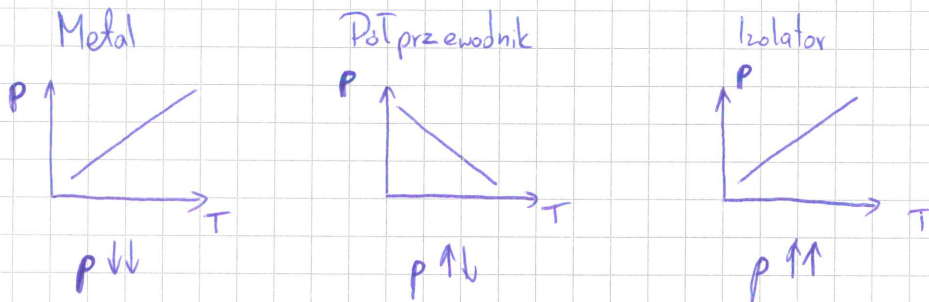
Karty kontrolne

Zdolności procesu

Zdolności maszyn

wykłady - wstęp do elektroniki

Materiały półprzewodnikowe

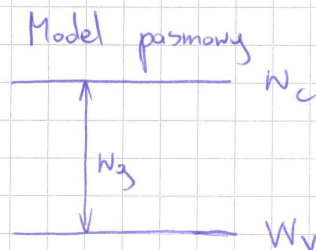
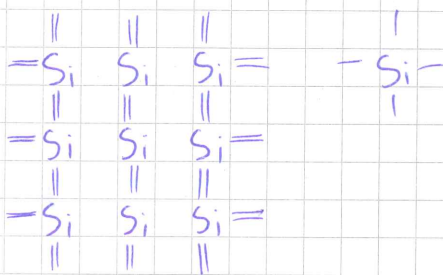


Materiały półprzewodnikowe

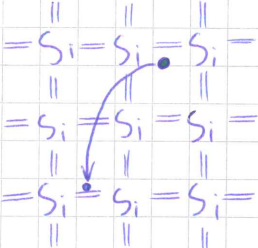
Podstawowe półprzewodniki:

- Si - krzem
- Ge - german
- GaAs - arsenek galu
- SiC - węgiel krzemny
- GeSi - kremogerman

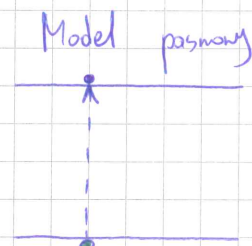
Krzem ($T=0K$)



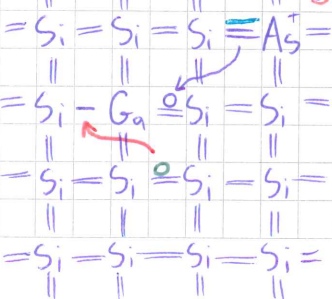
Krzem ($T > 0K$)



Generacja pary
dziura elektron

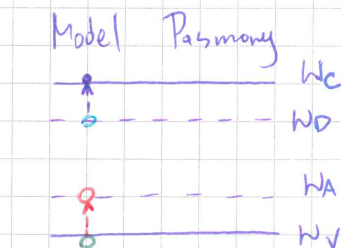


Krzem domieszkowy



-Ga- akceptor

-As- donor



Koncentracja nośników

Bilans ładunku

$$n_0 + N_a + n_T = p_T + N_d + p_0$$

$$\searrow \quad \swarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \swarrow$$

$$n_0 + N_a = p_0 + N_d$$

n_0 - koncentracja równowagowa elektronów

p_0 - koncentracja równowagowa dziur

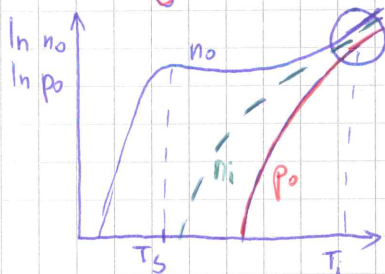
Typy półprzewodników

$$N_a > N_d \Rightarrow p_{p0} > n_{p0} \quad \text{typ p}$$

$$N_a < N_d \Rightarrow p_{n0} < n_{n0} \quad \text{typ n}$$

$$N_a = N_d \Rightarrow p_0 = n_0 = n_i \quad \text{typ i}$$

Koncentracja nośników



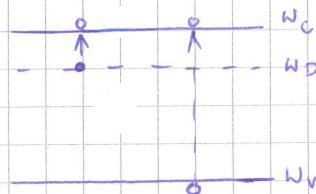
T_S - temperatura wyzarczenia stanu

T_i - temperatura przejścia

Typ n

$$n_0 = n_d + n_T$$

$$p_0 = n_T$$



$$\rho \sim (n_0 + p_0)$$

ρ - rezystywność

Koncentracja nośników

Koncentracje równowagowe

$$n_0, p_0$$

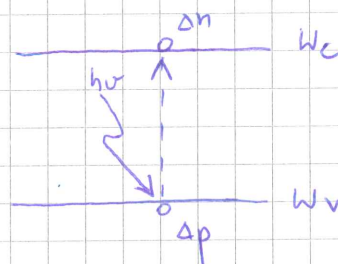
Koncentracje nierównowagowe

$$n = n_0 + \Delta n$$

$$p = p_0 + \Delta p$$

Koncentracje nadmiarowe

$$\Delta n, \Delta p$$



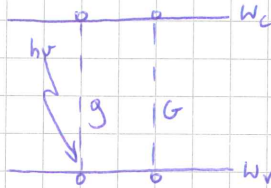
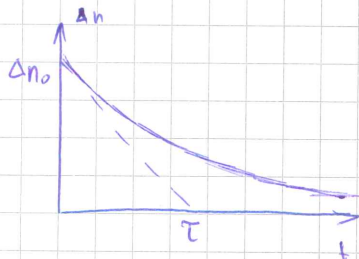
zwykle:

$$\Delta n = \Delta p$$

Rekombinacja

Szybkość rekombinacji

$$R = -\frac{dn}{dt} = -\frac{d\Delta n}{dt} = \frac{\Delta n}{\tau}$$



$$n = n_0 + \Delta n$$

$$\Delta n = \Delta n_0 \exp(-t/\tau)$$

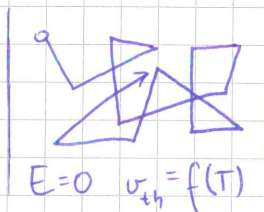
τ - czas życia

$$\Delta n(3\tau) = 0.05 \Delta n_0$$

Prąd unoszenia

Ruch chaotyczny

Pole elektryczne przyspiesza elektrony



$$F = qE \Rightarrow a = \frac{F}{m} \Rightarrow v_E = at$$

$$v = v_{th} + v_E$$

Prędkość unoszenia

$$v_u = \mu E \quad \mu - \text{ruchość}$$



Prąd unoszenia

elektrony

$$v_{ue} = \mu_n E$$

$$J_{ue} = q n v_{ue} = q n \mu_n E$$

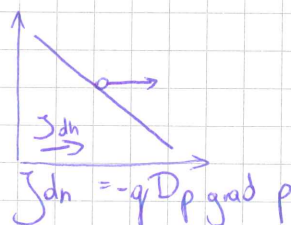
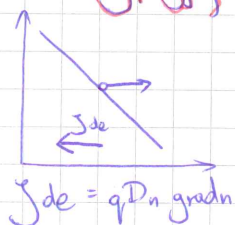
dziury

$$v_{uh} = \mu_p E$$

$$J_{uh} = q p v_{uh} = q p \mu_p E$$

Prawo Ohma dla półprzewodnika: $J_u = J_{ue} + J_{uh} = q(n\mu_n + p\mu_p)E = \sigma E$

Prąd dyfuzyjny

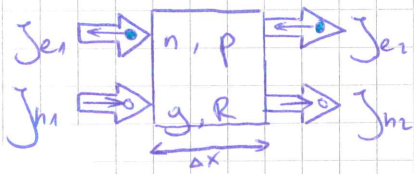


Równanie transportu

$$J_e = q(n\mu_n E + D_n \text{grad } n)$$

$$J_h = q(p\mu_p E - D_p \text{grad } p)$$

Równanie ciągłości



$$1D \quad \frac{dn}{dt} = (g - R) + \frac{1}{q} \frac{dJ_e}{dx}$$

$$\frac{dp}{dt} = (g - R) - \frac{1}{q} \frac{dJ_p}{dx}$$

$$3D \quad \frac{\delta n}{\delta t} = (g - R) + \frac{1}{q} \operatorname{div} J_e$$

$$\frac{\delta p}{\delta t} = g - R - \frac{1}{q} \operatorname{div} J_h$$

Układ równań struktury półprzewodnika

Równanie transportu:

$$J_e = q(n\mu_n E + D_n \operatorname{grad} n)$$

$$J_h = q(p\mu_p E - D_p \operatorname{grad} p)$$

Równanie ciągłości

$$\frac{\delta n}{\delta t} = g - R + \frac{1}{q} \operatorname{div} J_e$$

$$\frac{\delta p}{\delta t} = g - R - \frac{1}{q} \operatorname{div} J_h$$

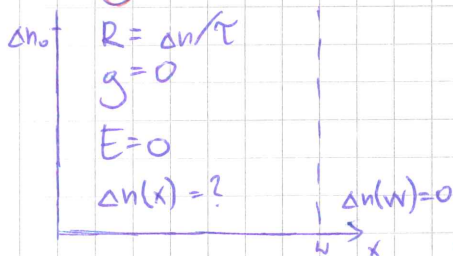
Równanie Poissona

$$\operatorname{div} E = -\frac{4\pi}{\epsilon} q(p - n + N_d - N_a)$$

Równanie Kirchhoffa:

$$J = J_e + J_h$$

Wstrzykiwanie nośników



$$L^2 \frac{d^2(\Delta n)}{dx^2} = \Delta n$$

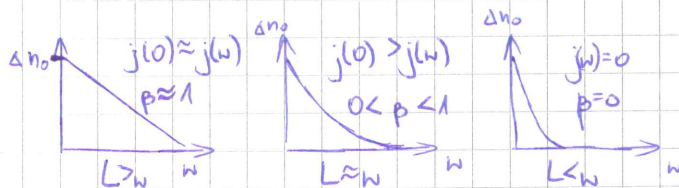
$$L = (D\tau)^{\frac{1}{2}}$$

droga dyfuzji

$$\beta = j(w) / j(0)$$

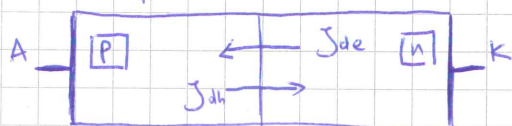
β - współczynnik transportu

$$j(x) = qD \operatorname{grad}(\Delta n)$$



Złącze p-n

Bezpośrednio po "zeleniu" dwóch półprzewodników



$$p_p \gg p_n$$

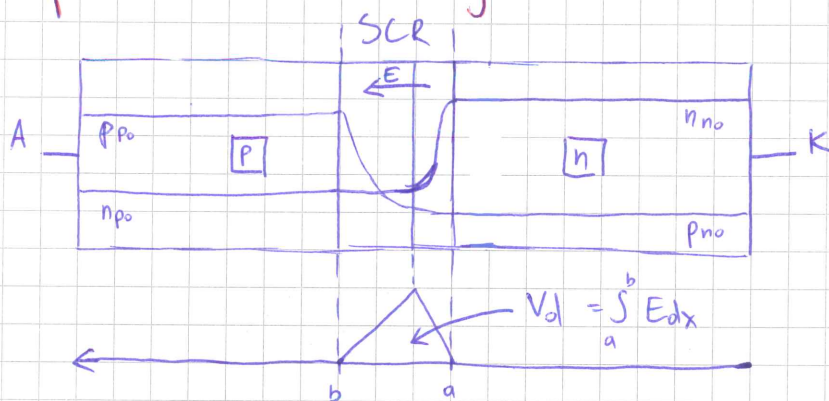
$$n_p \ll n_n$$

W stanie równowagi



$$\begin{aligned} &\leftarrow J_{uh} \quad J_{dh} \rightarrow \\ &\leftarrow J_{de} \quad J_{ue} \rightarrow \end{aligned}$$

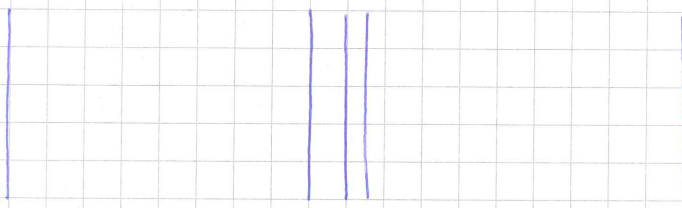
Złącze p-n w stanie równowagi



$$U_{AK} = 0 \quad I_D = 0$$

U_D - potencjał dyfuzyjny

Złącze p-n w stanie przewodzenia



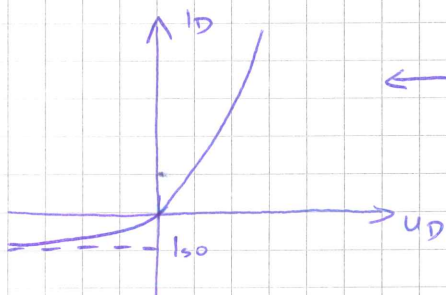
$$U_{AK} > 0 \quad I_D = f(U_{AK}) > 0$$

Złazce p-n w stanie blokowania

$$U_{AK} < 0$$

$$I_D = f(U_{AK}) < 0$$

Dioda idealna



← Charakterystyka diody idealnej

$$I_D = I_{s0} \left(\exp \frac{qU}{kT} - 1 \right)$$

I_{s0} - prąd nasycenia

Współczynnik wstrzykiwania

Współczynnik wstrzykiwania
elektronów

$$\gamma_{e \rightarrow p} = \frac{J_{e1}}{J}$$

Współczynnik wstrzykiwania
dziur

$$\gamma_{h \rightarrow n} = \frac{J_{h1}}{J}$$

Pojemności w diodzie

Pojemność złączowa



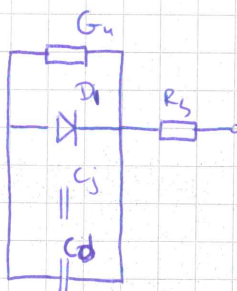
$$C_j = \frac{\Delta Q}{\Delta U}$$

Pojemność dyfuzyjna



$$C_D = \frac{\Delta Q}{\Delta U}$$

Dioda idealna i rzeczywista



R_s - rezystancja szeregową

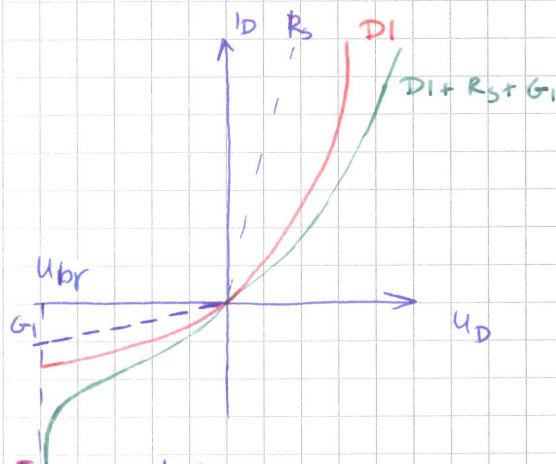
G_u - konduktancja upływu

C_j - pojemność złączowa

C_D - pojemność dyfuzyjna

D_1 - dioda idealna

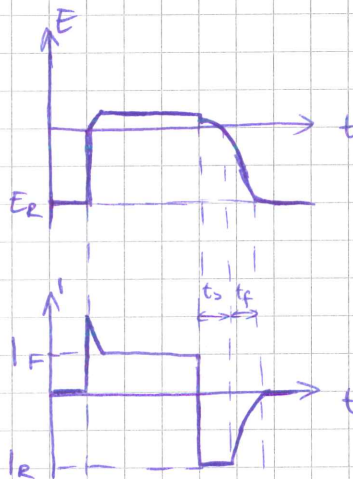
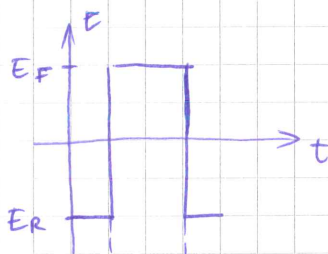
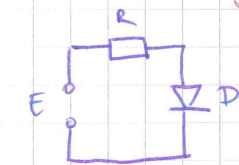
Napięcie przebicia



Rodzaje przebiegów

- lawinowe
- Zenera
- skrajne

Przebiegi diody



$$I_F = \frac{E_F}{R}$$

$$I_R = \frac{E_R}{R}$$

Przebiegi diod

Standardowe

- Prostawa (U_{br}, R_{on})
- Impulsowa (t_r, t_{rr})
- Zenera (U_{br})

Specjalne

- Varikap (C_j)
- Tunelowa (typu-S)
- Lawinowa (sygn. wz.)
- p-i-n (sygn. wz.)

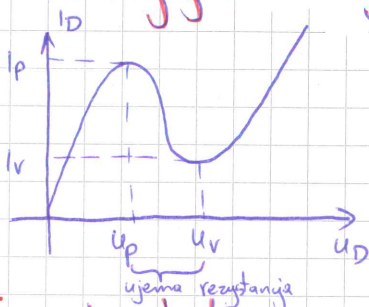
Optoelektryczne

- LED (emisja)
- Laser (emisja)
- FD (detekcja)
- Ogniwko Stoneyne

Inne diody

- Schottky'ego - wykorzystująca własności nieliniowego kontaktu metal - półprzewodnik (t_r, t_{rr})
- Gunna - wykorzystuje zależność nieliniowości od pola elektrycznego występującej w pewnych materiałach jak np. GaAs (charakterystyka I-V typ S)

Charakterystyka V-I typu S



U_p = napięcie szczytowe

I_p - prąd szczytowy

U_v - napięcie doliny

I_v - prąd doliny

Tranzystor bipolarny

↑

$$I_C = I_{nC} = \beta I_n = \gamma \beta I_E = \alpha I_E$$

Typowe warunki pracy:

U_{BE} - przewodzenie

U_{BC} - blokowanie

Współczynnik wzmacnienia I_C/I_E

$$\alpha = \gamma \beta$$

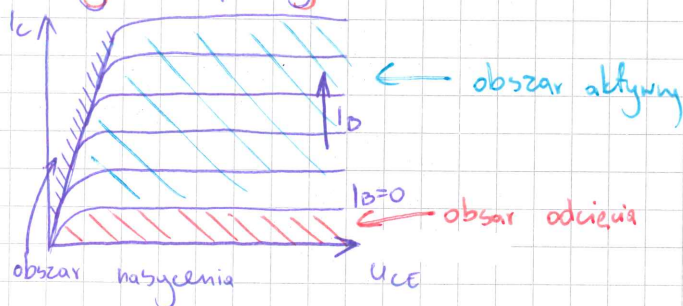
Tranzystor bipolarny jako czwórnik

↑

Układ wspólnego emitera

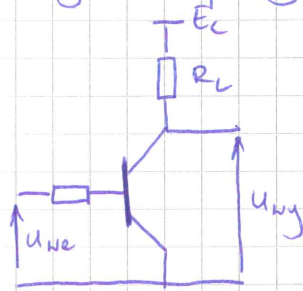


Tranzystor bipolarny w układzie OE



Charakterystyki wyjściowe

Tranzystor bipolarny jako inverter



Wejście

stan "0"

stan "1"

Przebieganie tranzystora



t_d

t_r

Tranzystor polowy



- Prąd płynie od źródła do drenu
- Złącze bramka-kanał jest splecione wewnętrznie
- Nie ma wstrzykiwania nośników
- Prąd przenosi tylko nośniki większościowe
- Regulacja szerokości kanału napięciem bramka-kanał

Charakterystyka przejściowa

|

|

|

Charakterystyka wyjściowa JFET

|

|

|

Tranzystor JFET - układ OS

┌
└

Transkonduktancja

$$g_m = \frac{\delta I_D}{\delta U_{GS}} \quad | \quad U_{DS} = \text{const.}$$

Struktura MIS - zasada działania

Tranzystor polowy MOSFET

|

|

|

|

Tranzystor polowy MOSFET - zasada działania

|

|

Tranzystor z kanałem indukowanym

|

|

|

Tranzystor z kanałem indukowanym - normalnie nieprzewodzący

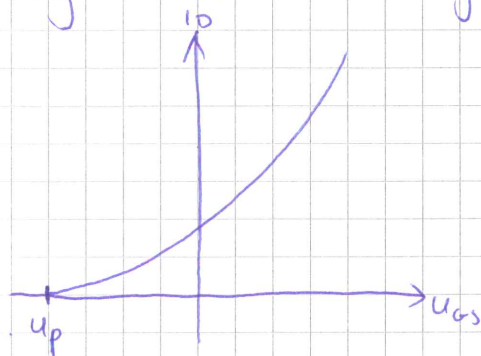


Charakterystyka
przejściowa

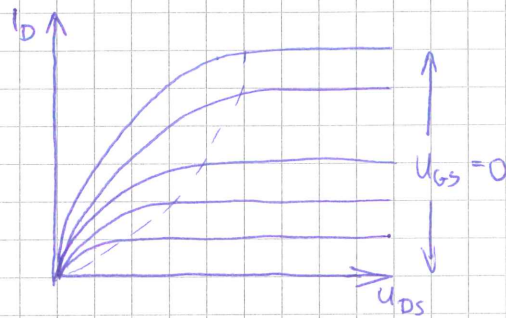


Charakterystyki
wyjściowe

Tranzystor z kanałem indukowanym



Charakterystyka przejściowa



Charakterystyka wyjściowa

Układy scalone

Układ scalony - przyrząd półprzewodnikowy zawierający w jednej strukturze półprzewodnikowej cały obwód elektryczny z:

- przyrządami półprzewodnikowymi (diody, tranzystory)
- elementami biernymi (rezystory i kondensatory)
- połączeniem międzyelementowe (tzw. lay out z Al lub Cu)

1958 - pierwszy układ scalony w Bell Lab. (Kilby)

Układy scalone - podziały

Bipolarne - podstawowy element to tranzystor bipolarny

Unipolarne - podstawowy element to tranzystor polowy MOS

Analogowe - sygnały wejściowe i wyjściowe ciągłe

Cyfrowe - sygnały wejściowe i wyjściowe dyskretne (logiczne "0" i "1")

Cyfrowe IC - podziały

Technologie Bipolarne

TTL - Transistor - Transistor Logic

ECL - Emitter Coupled Logic

IL - Integrated Injection Logic

Technologie Unipolarne

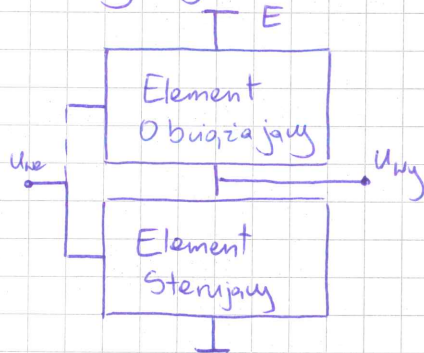
NMOS - tylko tranzystor z kanałem typu n

PMOS - tylko p

CMOS - Complementary MOS, oba typy

Technologia CMOS

Układy logiczne - Inwerter



Inwertery - bramka NMOS

Inwerter - bramka CMOS

Przegląd mocy - przegląd

Podstawowe cechy:

- główne zastosowania - klucze w obwodach DC i AC
- duże wymiary
- wymagają chłodzenia
- duża jednostkowa cena

Podstawowe wymagania

- duży prąd przewodzenia : typowo 40 - 1000 A max 6 kA
- duże napięcie blokowania : typowo 200 V - 2 kV max 10 kV
- duża częstotliwość przełączania : dla bipolarnych > 10 kHz
dla unipolarnych > 100 kHz
- małe straty mocy (U_{on} , I_{on}) w stanie przewodzenia
- proste sterowanie

Bipolarne

Bi MOS

Unipolarne

Tranzystory
bipolarne

Tranzystor z
izolowaną bramką
(IGBT)

Tranzystory
MOSFET

Diody

Tranzystory GTO

Static Induction
Thyristor (SITh)

Tranzystory
JFET

Przegląd mocy - tyrystor - zasada działania

Jest to przelaz 3-złazowy pochodzący od znanego układu dwu-tranzystorowego tzw. Tarczki TT:

- struktura n-p-n-p
- cztery warstwy
- trzy złaz
- trzy elektrody
 - A - anoda
 - K - katoda
 - G - bramka

Przyrody mocy - SIT

Przyrody mocy - VDMOS

Przyrody mocy - IGBT

Półprzewodnik

szerokość pasma ZABRONIONEGO 0,5 - 3 eV

rezystywność

większa niż rez. metali

$$10^{-4} \div 10^7 \Omega m$$

(w temp. pokojowej)

mniejsza niż rez. dielektryków

są to głównie pierwiastki z IV grupy układu okresowego

min. krzem (Si)

german (Ge)

związki chemiczne: GaAs

SiC

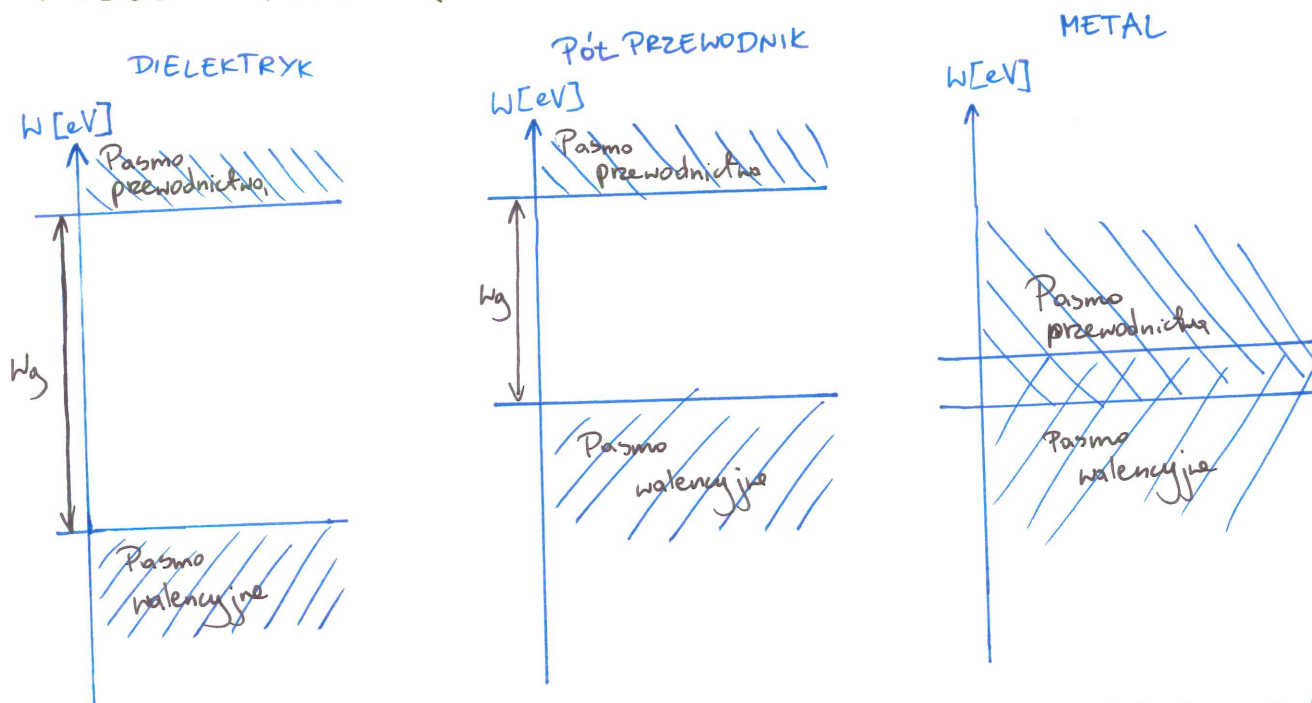
GaP

Pierwsze przyrządy półprzewodnikowe german

Obecnie krzem

Zastosowania specjalne arsenek galu
węglik krzemu

MODELE PASMOWE (ENERGETYCZNY MODEL PASMOWY)



Szerokość pasma zabronionego - il. energii potrzebnej do generacji swobodnych nośników ładunku elektrycznego

Właściwości elektryczne - szerokość pasma zabronionego

Ge 0,7 eV

Si 1,1 eV

GaAs 1,4 eV

GaN 3,4 eV

Właściwości elektryczne

PRZEWODNIKI

SAMOISTNE

DOMIESZKOWE

SAMOISTNE

Tem OK (zero bezwzględne)

pasmo walencyjne - całkowicie zajęte

pasmo półprzewodnikowe - całkowicie puste

Brak swobodnych nośników ładunku w obu pasmach uniemożliwia przewodzenie prądu.

Temperatura wzrost
Energia elektronów wzrost \Rightarrow następuje \Rightarrow A więc zwiększa się prawdopodobieństwo przejścia elektronów z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa

W wyniku przejścia elektronów w pasmie walencyjnym powstają "wolne miejsca" (tzw. dziury). Jest to proces generacji termicznej par elektron - dziura

Wzrost temperatury \Rightarrow wzrost koncentracji nośników swobodnych

NOŚNIK SWOBODNY

- dziura
- elektron

W każdej temperaturze ograniczona liczba elektronów może przejść do pasma przewodnictwa

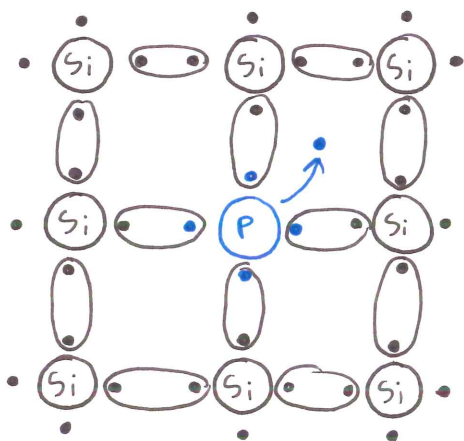
DOMIESZKOWANE

Przykłady półprzewodnikowe \rightarrow półprzewodniki domieszkowane (głównie)

I sieć krystaliczna IV wartościowego krzem i
V wartościowego atomu domieszki np. fosfor

PÓŁPRZEWODNIK
TYPU N

SCHEMAT



Cztery elektrony walencyjne fosforu biorą udział w wiązaniu z krzemem.

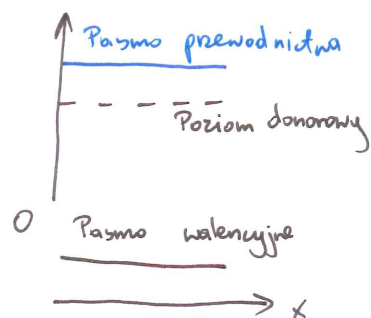
Piąty elektron pozostaje słabo związany z atomem.

DONOR - domieszki atomów V wartościowego

POZIOMY DONOROWE - powstały poziom

Energia potrzebna do przejścia tego elektronu z poziomu donorowego do pasma przewodnictwa (energia jonizacji) jest znacznie mniejsza niż energia potrzebna do generacji samostnej par elektron - dziura (W_g)

MODEL PASMOWY



Mala energia jonizacji \Rightarrow oddany poziom w przerwie energetycznej blisko dna pasma przewodnictwa

W_d - różnica poziomów między pasmem przewodnictwa, a poziomem donorowym energii

Mala wartość γ jonizacji

Dominuje tu przewodnictwo elektronowe

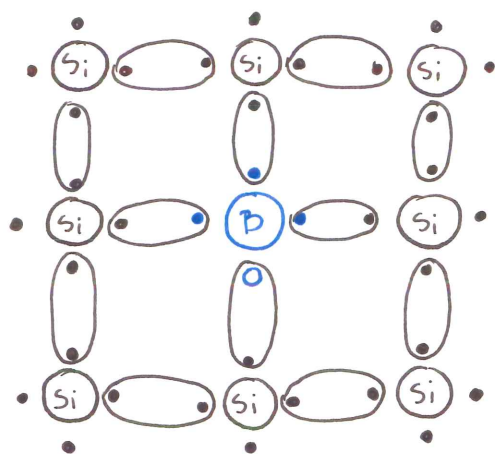
Elektron - nośnik większościowy

Dziura - nośnik mniejszościowy

Prawdopodobieństwo przejścia elektronu do pasma przewodnictwa z poziomu donorowego jest zdecydowanie większe niż z pasma walencyjnego

II sieć krystaliczna IV wartościowy krzem i III wartościowy atom domieszki np. bor

SCHEMAT

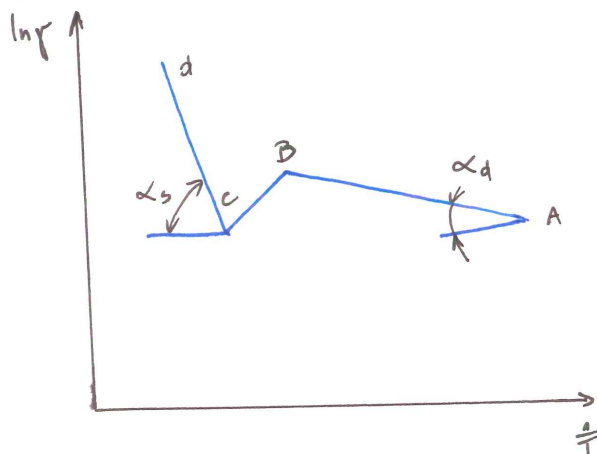


MODEL PASMOWY



PRZEWODNICTWO ELEKTRYCZNE PÓŁPRZEWODNIKÓW

Temperaturna zależność konduktywności półprzewodników domieszkowanych



odcinek AB - obszar niskich temperatur

odcinek BC - wyrzepywanie się domieszek

wszystkie domieszki biorą udział w przewodnictwie, lecz nie występuje jeszcze zauważalne generowanie ciepłe nośników samoistnych

koncentracja nośników jest stała

zależność konduktywności od temperatury jest określona wpływem temperatury na ruchliwość nośników

konduktywność nieznacznie maleje - rozpraszanie na fononach i ruchliwości

W obszarze wyższych temperatur półprzewodnik charakteryzuje się przewodnictwem samoistnym. Przy założeniu, że rozpraszanie nośników odbywa się na drganiach ciepłych sieci

UKłady logiczne i cyfrowe ciwrenia

mgr Grzegorz Lisowski

graz lisowski @ p.lodz.pl

WIKAMP

akwarium p.210 Zakład Techniki Sterowania

hasło: Newton 2016

godz. pracy 14-16

1 kolokwium kontrolne - zaluzenie!

$$L = a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + \dots + a_1p^1 + a_0p^0$$

System dziesietny $a_i \in \langle 0, 9 \rangle$

np. 1250

$p=10$

$p=2,3,4$

$$L = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$$

199	199	1	LSB
	99	1	
max. 8 bit liczba	49	1	
	24	0	
	12	0	
	6	0	
	3	1	
	1	1	MSB
	0		

$$199_{(10)} = 11000111_2$$

$$1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7 =$$

$$= 1 + 2 + 4 + 64 + 128 = 199$$

$$8 = 2^3 \quad 0+0+0+4+2+1$$

$$011|000|111_2$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$3 \quad 0 \quad 7_8$$

$$L = 3 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 192 + 7 = 199$$

$$16 = 2^4$$

system heksadecymalny

$$8+4=12 \quad 4+2+1$$

$$1100|0111$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$C \quad 7$$

C7₁₆

$$L = C \cdot 16^1 + 7 \cdot 16^0 = 199$$

$$0000 \Rightarrow 0$$

$$0001 \Rightarrow 1$$

$$1000 \Rightarrow 8$$

$$1001 \Rightarrow 9$$

$$1010 \Rightarrow 10 \quad A$$

$$1011 \Rightarrow 11 \quad B$$

$$1100 \Rightarrow 12 \quad C$$

$$1101 \Rightarrow 13 \quad D$$

$$1110 \Rightarrow 14 \quad E$$

$$1111 \Rightarrow 15 \quad F$$

$$247$$

$$10^2 10^1 10^0$$

$$247$$

$$10^2 10^1 10^{-1}$$

$$2,47$$

$$10^0 10^{-1} 10^{-2}$$

$$2470$$

$$10^3 10^2 10^1 10^0$$

0 ≤ 1 ←

$$\begin{array}{r} 247 \\ 19 \\ \hline 266 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ 0111 \\ + 0101 \\ \hline 1100_5 = 12_{(10)} \end{array}$$

$$7 + 5 = 12$$

$$\begin{array}{r} 0110 \\ - 0101 \\ \hline 0001 = 1_{(10)} \end{array}$$

$$6 - 5 = 1$$

$$\begin{array}{r} +6 \\ -6 \end{array}$$

na 4 bitach

$$\begin{array}{rcl} +6 & \Rightarrow & 0110 \\ -6 & \Rightarrow & 1 \end{array}$$

$$\pm 6$$

$$\begin{array}{r} 2^3 2^2 2^1 2^0 \\ 0110 \quad 6 \\ 1111 \quad 15 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{tylko dodatnie}$$

$$\begin{array}{r} -1 \rightarrow 2^3 2^2 2^1 2^0 \\ -1 \rightarrow -1 \rightarrow -1 \rightarrow 2 \\ \times \begin{array}{r} 0000 \\ -0001 \\ \hline 1111 \end{array} \quad -1 \end{array}$$

$$0000$$

$$\begin{array}{r} 2^3 2^2 2^1 2^0 \\ 1111 \\ \times \begin{array}{r} 0001 \\ 1111 \\ \hline 0000 \end{array} \quad \begin{array}{l} +1 \\ -1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2^3 2^2 2^1 2^0 \\ 1111 \\ -2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 \\ -8 + 4 + 2 + 1 = -1 \end{array} \quad \text{ze znakiem (-)}$$

$$0010 = \text{MLU}$$

$$\text{LU} = (\sim \text{MLU}) + 1$$

$$\text{MLU} = (\sim \text{LU}) + 1$$

$$\begin{array}{rcl} 0010 & \rightarrow & 2 \\ \sim 1101 & & \\ + 0001 & & \\ \hline 1110 & \rightarrow & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 1110 & \rightarrow & -2 \\ \sim 0001 & & \\ + 0001 & & \\ \hline 0010 & \rightarrow & 2 \end{array}$$

$$28,7497$$

$$\downarrow$$

$$28,75$$

$$\begin{array}{r} 28 \mid 0 \\ 14 \mid 0 \\ 7 \mid 1 \\ 3 \mid 1 \\ 1 \mid 1 \\ 0 \mid \end{array} \quad \uparrow$$

$$\begin{array}{r} Q_4 \\ 11100, 1100 \\ 11100 \downarrow 1100 \\ 2^{-1} = 0,5 \\ 2^{-2} = 0,25 \\ 0,75 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,75 \times 2 \\ 0,50 \times 2 \\ 0,00 \times 2 \\ 0,00 \times 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1,5 \\ 1,000 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{array} \quad \downarrow$$

Przykład Zadani

$$149_{10} \rightarrow _2$$

$$\begin{array}{r|l} 149 & 1 \\ 74 & 0 \\ 37 & 1 \\ 18 & 0 \\ 9 & 1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & \\ 0 & \end{array}$$

$$100110101_2$$

$$9 \quad 5 \quad 16$$

$$2 \quad 2 \quad 5 \quad 8$$

$$8 \quad 4 \quad 2 \quad 1$$

$$\begin{array}{r|l} 205 & 1 \\ 102 & 0 \\ 51 & 1 \\ 25 & 1 \\ 12 & 0 \\ 6 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & \end{array}$$

$$011,001,101_2$$

$$C \quad D \quad 16$$

$$3 \quad 1 \quad 5 \quad 8$$

$$47,380$$

Q4 (-dokładności do 4 miejsc po przecinku)

$$\begin{array}{r|l} 47 & 1 \\ 23 & 1 \\ 11 & 1 \\ 5 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & \end{array}$$

$$101111$$

$$0,380 \times 2 \quad 0,76$$

$$0110$$

$$0,76 \times 2 \quad 1,52$$

$$0,52 \times 2 \quad 1,04$$

$$0,04 \times 2 \quad 0,80$$

$$101111,0110$$

$$29,649$$

Q4

$$\begin{array}{r|l} 29 & 1 \\ 14 & 0 \\ 7 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & \end{array}$$

$$11101$$

$$0,649 \times 2 \quad 1,298$$

$$0,298 \times 2 \quad 0,596$$

$$0,596 \times 2 \quad 1,192$$

$$0,192 \times 2 \quad 0,384$$

$$1010$$

$$11101,1010$$

Algebra boola

$A, B, C, 0, 1$ $+ \cdot \sim$

Aksjomaty

	SUMY (A)	ILCZYNY (B)
1. P. łączności	$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
2. P. przemienności	$A+B=B+A$	$A \cdot B = B \cdot A$
3. P. rozdzielności	$A+BC=(A+B)(A+C)$	$A \cdot (B+C)=AB+AC$
4. P. jednego elementu identyfikacji	$A+0=A$	$A \cdot 1=A$
5. P. dopełnienia	$A+\bar{A}=1$	$A \cdot \bar{A}=0$

Prawo stałych elementów

$$a+1=1$$

$$L=a+1 \stackrel{4B}{=} (a+1) \cdot 1 \stackrel{5A}{=} (a+1)(a+\bar{a}) \stackrel{3A}{=} a+1 \cdot \bar{a} \stackrel{4B}{=} a+\bar{a} \stackrel{4A}{=} 1=P$$

Prawo stałych elementów

$$a \cdot 0=0$$

$$L=a \cdot 0 \stackrel{4A}{=} (a \cdot 0)+0 \stackrel{5B}{=} (a \cdot 0)+(a \cdot \bar{a}) \stackrel{3B}{=} a(0+\bar{a}) \stackrel{4A}{=} a \cdot \bar{a} \stackrel{4B}{=} 0=P$$

Prawo powtórzenia

$$a=a+a$$

$$L=a \stackrel{4A}{=} a+0 \stackrel{5B}{=} a+(a \cdot \bar{a}) \stackrel{3A}{=} (a+a)(a+\bar{a}) \stackrel{4A}{=} (a+a) \cdot 1 \stackrel{4B}{=} a+a=P$$

Prawo powtórzenia

$$a=a \cdot a$$

$$L=a \stackrel{4B}{=} a \cdot 1 \stackrel{5A}{=} a \cdot (a+\bar{a}) \stackrel{3B}{=} a \cdot a + a \cdot \bar{a} \stackrel{5B}{=} a \cdot a + 0 \stackrel{4A}{=} a \cdot a=P$$

Reguła sklejania

$$a \cdot b + a \cdot \bar{b} = a$$

$$L=a \cdot b + a \cdot \bar{b} \stackrel{3B}{=} a(b+\bar{b}) \stackrel{5A}{=} a \cdot 1 \stackrel{4B}{=} a=P$$

Reguła skłaniania

$$(a+b)(a+\bar{b})=a$$

$$L = (a+b)(a+\bar{b}) \stackrel{3A}{=} a + b \cdot \bar{b} \stackrel{5B}{=} a + 0 \stackrel{4A}{=} 0 = P$$

Reguła pochłaniania

$$a + a \cdot b = a$$

$$L = a + a \cdot b \stackrel{4B}{=} a \cdot 1 + a \cdot b \stackrel{3B}{=} a(1+b) \stackrel{\substack{\text{prawo} \\ \text{statystyki} \\ \text{elementów}}}{=} a \cdot 1 \stackrel{4B}{=} a = P$$

Prawa de Morgana

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$$

$$a \cdot b + \bar{a} + \bar{b} \Rightarrow a \cdot b + \bar{a} + \bar{b} = 1$$

$$L = a \cdot b + \bar{a} + \bar{b} \stackrel{3A}{=} (\bar{a} + \bar{b} + a)(\bar{a} + \bar{b} + b) \stackrel{\substack{2A \\ 5A}}{=} (1+\bar{b})(1+\bar{a}) \stackrel{p.z.e.}{=} 1 \cdot 1 \stackrel{\text{prawo pochłaniania}}{=} 1 = P$$

$$\overline{a+b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$a \cdot b(\bar{a} + \bar{b}) = 0$$

$$L = a \cdot b(\bar{a} + \bar{b}) = a \cdot b \cdot \bar{a} + a \cdot b \cdot \bar{b} \stackrel{\substack{5B \\ 2B}}{=} 0b + 0a \stackrel{p.z.e.}{=} 0 + 0 \stackrel{PP}{=} 0 = P$$

Prawo podwójnego zaprzeczenia

$$\overline{\bar{a}} = a$$

Funkcje logiczne

L_p	$x_2^{2^2}$	$x_1^{2^1}$	$x_0^{2^0}$	w
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$$f_{x_2 x_1 x_0}^1 (3, 5, 6, 7)$$

$$f_{x_2 x_1 x_0}^0 (0, 1, 2, 4)$$

$$f = x_0 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_0$$

$$f = (x_0 + x_1)(x_1 + x_2)(x_2 + x_0)$$

Lp	x_2	x_1	x_0	w
3	0	1	1	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$$\bar{x}_2 \cdot x_1 \cdot x_0$$

$$x_2 \cdot \bar{x}_1 \cdot x_0$$

$$x_2 \cdot x_1 \cdot \bar{x}_0$$

$$x_2 \cdot x_1 \cdot x_0$$

$$f = \bar{x}_2 x_1 x_0 + x_2 \bar{x}_1 x_0 + x_2 x_1 \bar{x}_0 + x_2 x_1 x_0 =$$

z prawa powtorzenia

$$= \bar{x}_2 x_1 x_0 + x_2 \bar{x}_1 x_0 + x_2 x_1 \bar{x}_0 + 3x_2 x_1 x_0 =$$

$$A = A + A$$

$$A = A + A + A$$

$$= \underbrace{\bar{x}_2 x_1 x_0 + x_2 x_1 x_0}_{x_1 x_0 (\bar{x}_2 + x_2)} + \underbrace{x_2 \bar{x}_1 x_0 + x_2 x_1 x_0}_{x_2 x_0 (\bar{x}_1 + x_1)} + \underbrace{x_2 x_1 \bar{x}_0 + x_2 x_1 x_0}_{x_2 x_1 (\bar{x}_0 + x_0)}$$

$$\downarrow A5$$

$$x_1 x_0$$

$$\downarrow A5$$

$$x_2 x_0$$

$$\downarrow A5$$

$$x_2 x_1$$

$$f = x_0 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_0$$

Lp	x_2	x_1	x_0	w
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
4	1	0	0	0

$$f = x_2 x_1 \bar{x}_0 + x_2 \bar{x}_1 x_0 + \bar{x}_2 x_1 x_0 + x_2 x_1 x_0 =$$

$$= \underbrace{x_2 x_1 \bar{x}_0 + x_2 x_1 x_0}_{x_1 x_2} + \underbrace{x_2 \bar{x}_1 x_0 + x_2 x_1 x_0}_{x_0 x_2} + \underbrace{\bar{x}_2 x_1 x_0 + x_2 x_1 x_0}_{x_0 x_1}$$

Tablica Karnaugh

$x_1 x_0 \backslash x_2$	0	1
--------------------------	---	---

0 0	0	0
-----	---	---

0 1	0	1
-----	---	---

1 1	1	1
-----	---	---

1 0	0	1
-----	---	---

$$x_2 \bar{x}_1 x_0$$

$$x_2 x_1 x_0$$

$$x_0 x_2 (x_1 + \bar{x}_1)$$

$$x_0 x_2$$

$$x_2 x_1 x_0$$

$$x_2 x_1 \bar{x}_0$$

$$x_1 x_2 (x_0 + \bar{x}_0)$$

$$x_1 x_2$$

$$x_2 x_1 x_0$$

$$\bar{x}_2 x_1 x_0$$

$$x_0 x_1 (x_2 + \bar{x}_2)$$

$$x_0 x_1$$

$x_1 x_0 \backslash x_2$	0	1
--------------------------	---	---

0 0	0	0
-----	---	---

0 1	0	1
-----	---	---

1 1	1	1
-----	---	---

1 0	0	1
-----	---	---

$$x_2^2 x_1 x_0$$

$$x_2^2 x_1 \bar{x}_0$$

$$x_1 + x_1 + x_0 + x_0$$

$$x_1 + x_0$$

z prawa powtorzenia

$$x_2 + x_2 + x_1 + x_1$$

$$x_2 + x_1$$

$$x_2 + \bar{x}_1 + x_0$$

$$x_2 + x_1 + x_0$$

$$x_2 + x_1 + x_0 + x_0$$

$$x_2 + x_0$$

Kod Greya

0 0 0 0 0

0 0 0 1 1

0 0 1 1 2

0 0 1 0 3

0 1 1 0 4

0 1 1 1 5

0 1 0 1 6

0 1 0 0 7

1 1 0 0 8

1 1 0 1 9

1 1 1 1 10

1 1 1 0 11

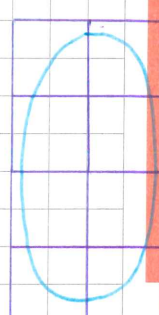
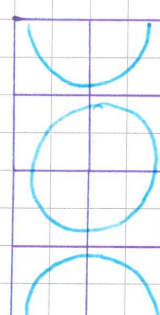
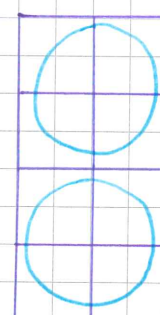
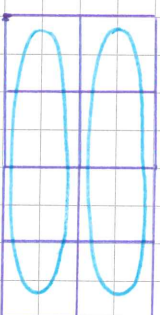
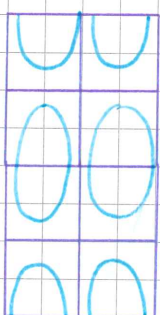
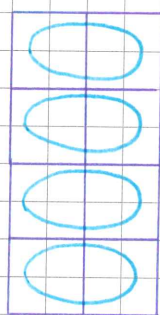
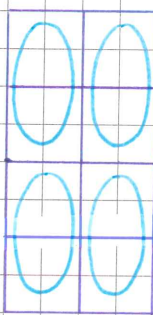
1 0 1 0 12

1 0 1 1 13

1 0 0 1 14

1 0 0 0 15

Sposoby grupowania w tablicy Karnaugh



$$f'_{abc}(0,3,7)$$

$\begin{matrix} 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ bc & a \end{matrix}$	0	1
0	0	1
1	0	0
3	1	1
2	1	0

$$\begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ (b+\bar{c})(\bar{b}+c)(\bar{a}+b) \\ & \text{IIa} & \\ & (\bar{a}+c) \end{matrix}$$

czera

$$\begin{matrix} \text{I} & \text{II} \\ bc + \bar{a}\bar{b}\bar{c} \end{matrix}$$

jedynki

$\begin{matrix} 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ ab & c \end{matrix}$	0	1	2	3	4
0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0

$$(\bar{a}+b)(c+\bar{b})(\bar{c}+b)$$

$$\begin{matrix} \text{I} & \text{II} \\ \bar{a}\bar{b}\bar{c} + cb \end{matrix}$$

$$f'_{x_2 x_1 x_0}(0,1,3,4)$$

$\begin{matrix} x_2 & x_1 x_0 \end{matrix}$	0	1
0	0	1
1	0	1
3	1	1
2	1	0

$$\begin{matrix} \text{I} & \text{II} \\ \bar{x}_1 \bar{x}_0 + \bar{x}_2 x_0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{I} & \text{II} \\ (\bar{x}_1 + x_0)(\bar{x}_2 + \bar{x}_0) \end{matrix}$$

$$f'_{abc}(1,2,5,7)$$

$\begin{matrix} bc & a \end{matrix}$	0	1
0	0	0
1	0	1
3	1	1
2	1	0

$$\begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ ac + bc + \bar{a}\bar{b}\bar{c} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ (b+c)(\bar{a}+c)(a+\bar{b}+\bar{c}) \end{matrix}$$

$f_{abcd} (0, 2, 5, 7, 8, 10, 14, 15)$

cd \ ab	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1

$$\bar{a}bd + abc + \bar{b}\bar{d}$$

$$(b+\bar{d})(\bar{a}+\bar{b}+c)(a+\bar{b}+d)$$

$f_{abcd} (0, 2, 5, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15)$

cd \ ab	00	01	11	10
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
1	1	0	0	1
1	0	1	1	1

$$ca + da + b\bar{c}d + \bar{b}\bar{d}$$

$$(a+\bar{b}+\bar{c})(c+d+\bar{b})(a+b+d)$$

$f_{abcd} (5, 6, 7, 9, 12, 13, 15) (0, 14)$

cd \ ab	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	1	1	0
2	1	0	1	0

$$ab + db + bc + a\bar{c}d$$

$$(a+b)(b+d)(b+\bar{c})(c+d+a)$$



bufor



negator



bramka AND



bramka OR



NAND



NOR



XOR

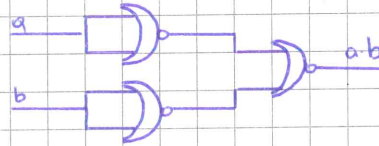
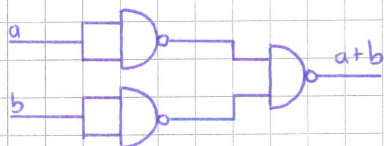
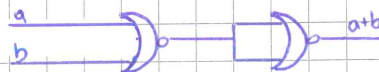
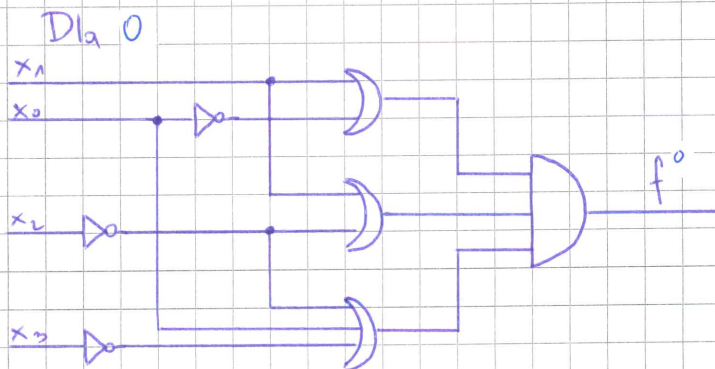
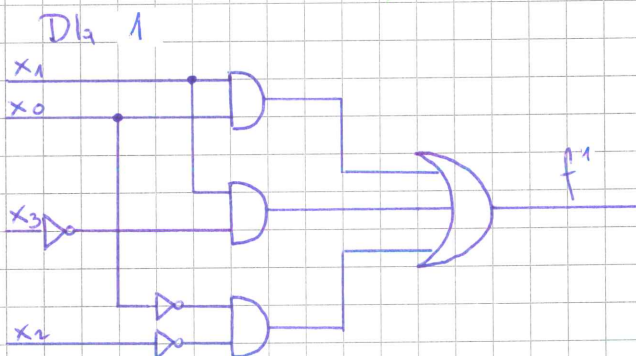


NXOR

$$f'_{x_3 x_2 x_1 x_0} (3, 6, 7, 8, 10, 11, 15 \ (0, 2, 5))$$

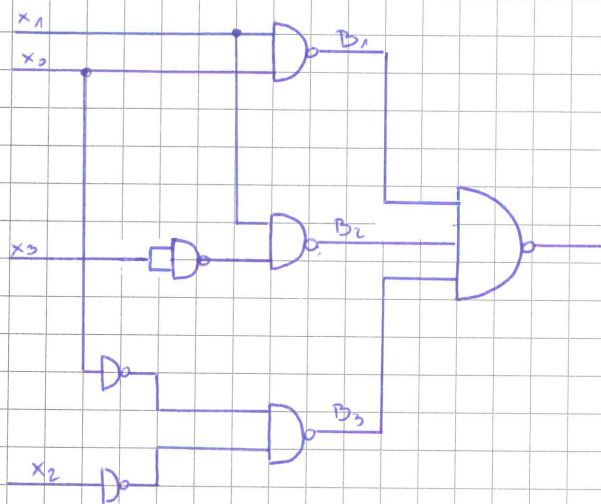
$x_3 x_2$	00	01	11	10
$x_1 x_0$	1 9	0 4	0 12	1 8
0 0	1	0	0	1
0 1	0	0	0	0
1 1	1	1	1	1
1 0	1	1	0	1

$$\begin{aligned} & \text{I} \quad x_1 x_0 + \text{II} \quad x_1 \bar{x}_3 + \text{III} \quad \bar{x}_2 x_0 \\ & \text{I} \quad (x_1 + \bar{x}_0) \quad \text{II} \quad (\bar{x}_2 + x_1) \quad \text{III} \quad (\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + x_0) \end{aligned}$$



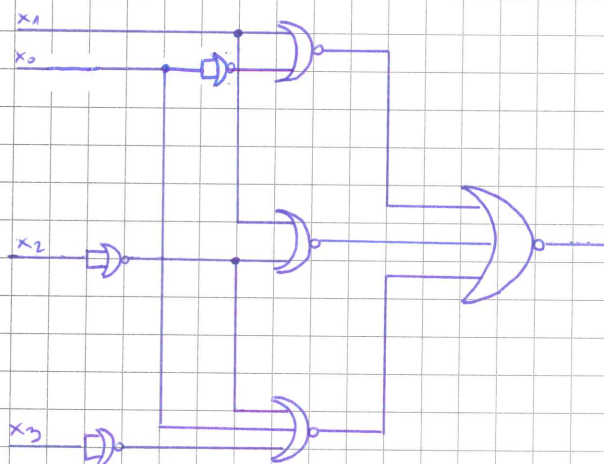
$$\overline{x_1 x_0} + \overline{x_3 x_1} + \overline{x_2 x_0} = \overline{A_1 A_2 A_3} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} = \overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \cdot \overline{B_3}$$

np $B_1 = \overline{A_1} = \overline{x_1 x_0}$



$$\overline{(x_1 + \overline{x_2}) \cdot (\overline{x_2} + x_1) \cdot (\overline{x_3} + \overline{x_2} + x_0)} = \overline{C_1 \cdot C_2 \cdot C_3} = \overline{C_1} + \overline{C_2} + \overline{C_3} = D_1 + D_2 + D_3$$

np. $D_1 = \overline{C_1} = \overline{x_1 + \overline{x_2}}$

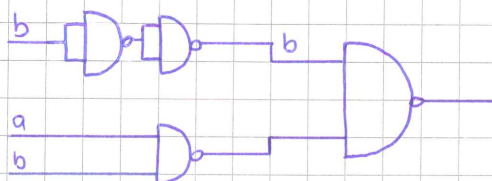
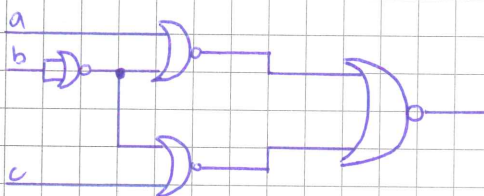


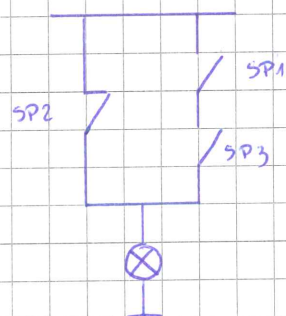
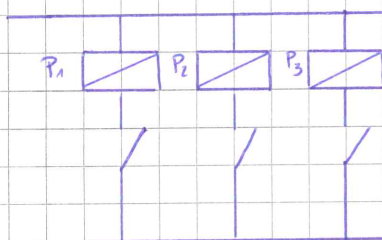
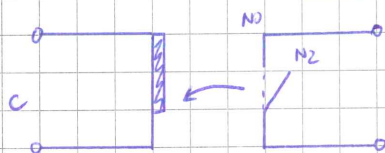
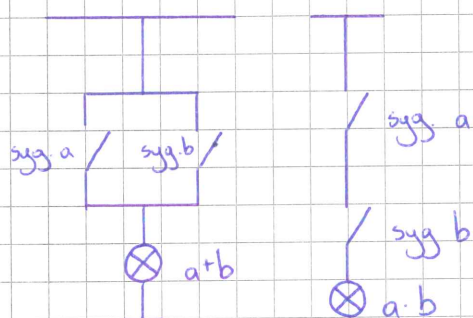
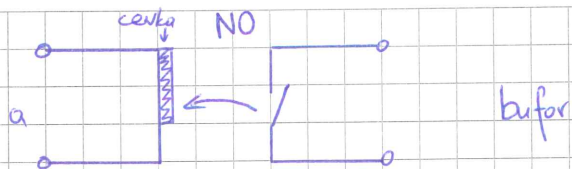
$f_{abc}(0,1,4,5,7)$

		bc			
		0	1	3	2
a	0	0	0	1	1
	1	1	1	1	0

$$\overline{b+ac}$$

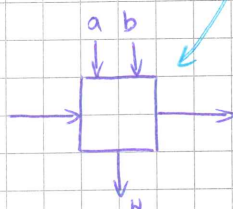
$$(a+\overline{b})(\overline{b}+c)$$

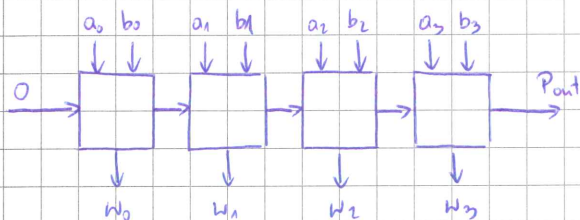




Układ iteracyjny - sumator wielobitowy

	0	1	1	0	1	1	0	0	0
A	0	1	1	0	1	1	0	0	0
B	0	1	0	1	1	0	1	0	0
	1	1	0	0	0	1	1	0	0





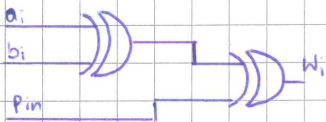
L_p	P_{in}	a_i	b_i	w_i	provenance
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0
2	0	1	0	1	0
3	0	1	1	0	1
4	1	0	0	1	0
5	1	0	1	0	1
6	1	1	0	0	1
7	1	1	1	1	1

$W_i^{a_i, b_i, P_{in}} (1, 2, 4, 7)$

$a_i, b_i \backslash P_{in}$	0	1
0 0	0	1
0 1	1	0
1 1	0	1
1 0	1	0

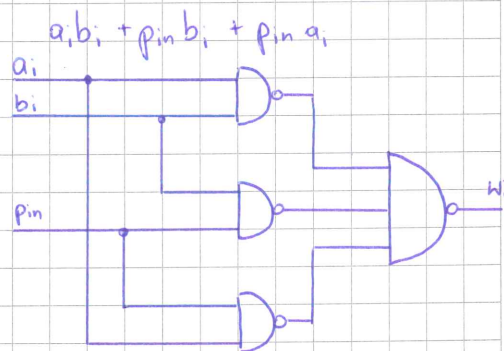
$$\overline{a_i} \overline{b_i} P_{in} + \overline{a_i} b_i \overline{P_{in}} + a_i \overline{b_i} P_{in} + a_i b_i \overline{P_{in}}$$

a	b	XOR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



$P_{out}^{a_i, b_i, P_{in}} (3, 5, 6, 7)$

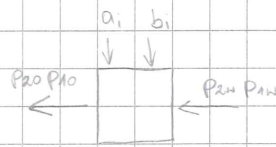
$a_i, b_i \backslash P_{in}$	0	1
0 0	0	0
0 1	0	1
1 1	1	1
1 0	0	1



KOMPARATOR

$$\begin{matrix} < & 1 & < & 0 & < & 0 & > & 1 & > & 0 & > & 1 & = & 1 & = & 0 & = & A \\ & 1 & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & = & 1 & = & 0 & = & B \end{matrix}$$

	P_2	P_1
$A = B$	0	0
$A > B$	1	1
$A < B$	0	1



analiza

od

najmłodszego
bitu

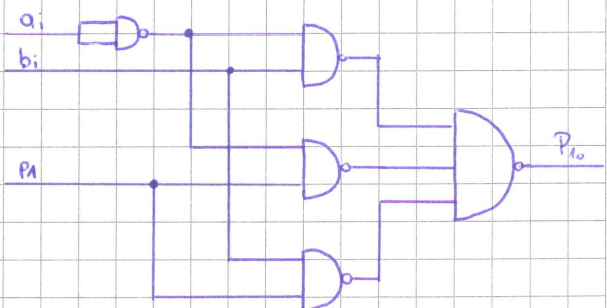
L_p	p_{21}	p_{11}	a_i	b_i	p_{20}	p_{10}	
0	0	0	0	0	0	0	} $A = B$
1	0	0	0	1	0	1	
2	0	0	1	0	1	0	
3	0	0	1	1	0	0	} $A < B$
4	0	1	0	0	0	1	
5	0	1	0	1	0	1	
6	0	1	1	0	1	0	} $A > B$
7	0	1	1	1	0	1	
8	1	0	0	0	1	0	
9	1	0	0	1	0	1	} $A > B$
10	1	0	1	0	1	0	
11	1	0	1	1	1	0	
12	1	1	0	0	-	-	} nie powinno być
13	1	1	0	1	-	-	
14	1	1	1	0	-	-	
15	1	1	1	1	-	-	

$$P_{1out}^{1} p_{21} p_{11} a_i b_i \quad (1, 4, 5, 7, 9 (12, 13, 14, 15))$$

$$P_{2out}^{1} p_{21} p_{11} a_i b_i \quad (2, 6, 8, 10 (12, 13, 14, 15))$$

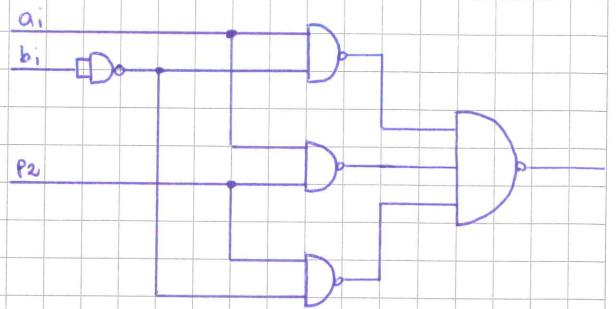
$$P_{1out} = b_i \bar{a}_i + p_{11} \bar{a}_i + b_i p_{11}$$

$a_i b_i$	$P_2 P_1$	00	01	11	10
0	0 0	0	1 ₄	1 ₁₂	0
1	0 1	1 ₁	1 ₅	1 ₆	1 ₃
3	1 1	0	1 ₇	1 ₁₃	0
2	1 0	0	0	0	0



$$P_{2out} = \bar{b}_i \cdot p_2 + a_i \cdot \bar{b}_i + a_i \cdot p_2$$

$a_i \backslash p_2 p_1$	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

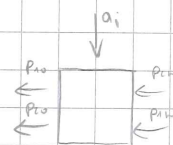


001 ← ... 001, 011, 00

L_p	p_2	p_1	a_i	p_{20}	p_{10}
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1
2	0	1	0	1	0
3	0	1	1	0	1
4	1	0	0	1	1
5	1	0	1	0	1
6	1	1	0	1	1
7	1	1	1	1	1

$$P_{20}' \cdot p_2 \cdot a_i \quad (2, 4, 6, 7)$$

$$P_{10}' \cdot p_2 \cdot a_i \quad (1, 3, 4, 5, 6, 7)$$



$$P_{20}'$$

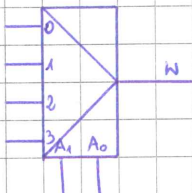
$a_i \backslash p_2 p_1$	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	1	0	1	0

$$P_{10}'$$

$a_i \backslash p_2 p_1$	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	1	1	1

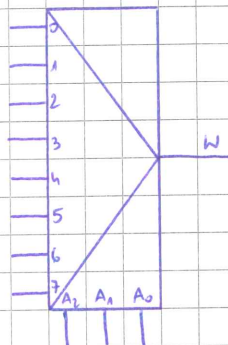
MULTIPLEKSER

2/4



$00 \rightarrow W = I_0$
 $01 \rightarrow W = I_1$
 $10 \rightarrow W = I_2$
 $11 \rightarrow W = I_3$

3/8



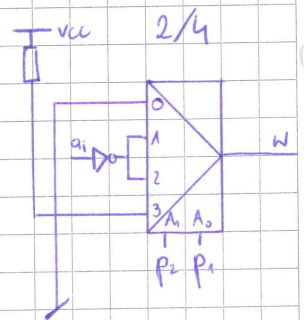
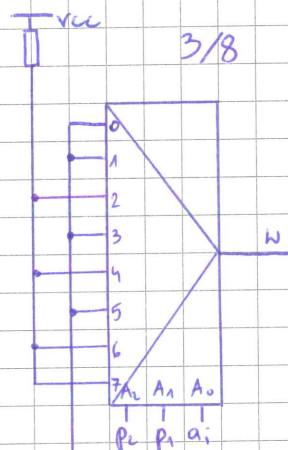
$A_2 A_1 A_0$
 $000 \rightarrow W = I_0$

Przykład dla p_2, p_1, a_i (2, 4, 6, 7)

$a_i \backslash p_2 p_1$	00	01	10	11
0	0	1	1	1
1	0	0	0	1
	0	\bar{a}_i	\bar{a}_i	1

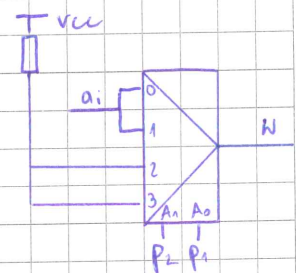
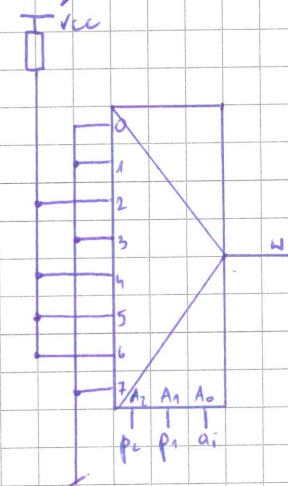
Nie jest to tablica Karnaugh

3/8



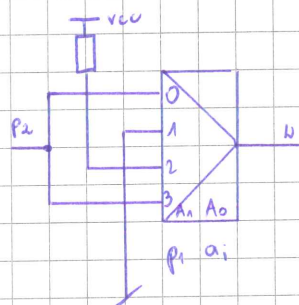
Przykład dla p_2, p_1, a_i (1, 3, 4, 5, 6)

$a_i \backslash p_2 p_1$	I_0	I_1	I_2	I_3
0	0	0	1	1
1	1	1	1	1
	a_i	a_i	1	1



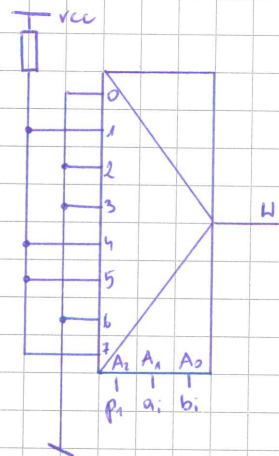
Przykład innej dla p_2, p_1, a_i (2, 4, 6, 7)

$p_1 a_i \backslash p_2$	0	1
0	0	1
0	0	0
1	1	1
1	1	0
	p_2	p_2



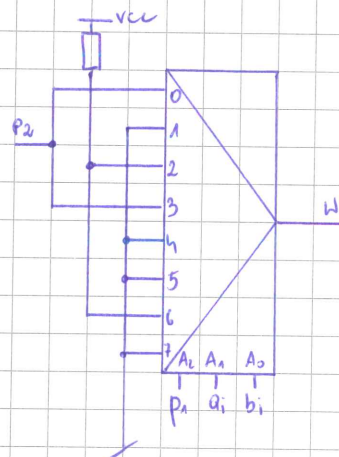
Przykład dla p_1^1 $p_1 p_2 a_i b_i$ (1, 4, 5, 7, 9(12, 13, 14, 15))

	p_1	a_i	b_i	p_2	0	1	W
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1
2	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	0	0
4	1	0	0	1	1	1	1
5	1	0	1	1	1	1	1
6	1	1	0	0	0	0	0
7	1	1	1	1	1	1	1



Przykład dla p_2^1 $p_1 p_2 a_i b_i$ (2, 6, 8, 10(12, 13, 14, 15))

$p_1 a_i b_i$	p_2	0	1	W
0	0	0	1	p_2
1	0	0	0	0
2	0	1	1	1
3	0	1	1	p_2
4	1	0	0	0
5	1	0	0	0
6	1	1	1	1
7	1	1	1	0



UKŁADY SEKWENCYJNE

przetworniki synchronizowane

D - delay, data

$$D: Q_{t+1} = D$$

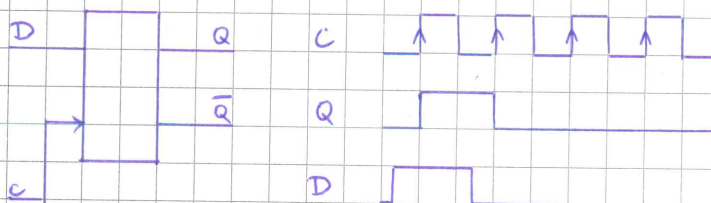
T - toggle

$$T: Q_{t+1} = T \cdot \bar{Q}_t + \bar{T} \cdot Q_t$$

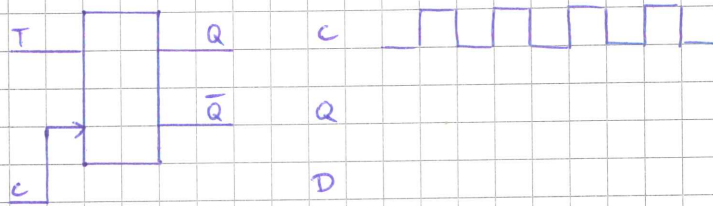
JK - Jack Kelby

$$JK: Q_{t+1} = \bar{Q}_t \cdot J + Q_t \cdot K$$

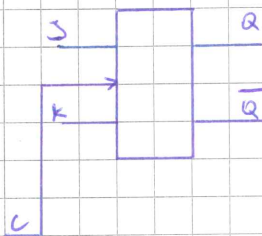
DELAY



TOGGLE



JACK KELBY



D \ Q ^t	0	1
0	0	0
1	1	1

T \ Q ^t	0	1
0	0	1
1	1	0

JK \ Q ^t	0	1
0 0	0	1
0 1	0	0
1 1	1	0
1 0	1	1

Q _t	Q _{t+1}	D	T	J	K		
0	0	0	0	0	-	1	1 → 1
0	1	1	1	1	-	1	0 → 1
1	0	0	1	-	1	0	0 → 0
1	1	1	0	-	0	0	1 → 0

$D^1 (1, 1, (-))$

$T^1 (1, 0, (-))$

$J^1 (1, (1, 0, (-)))$

$K^1 (0, (0, 1, (-)))$

Q_1	Q_0^t	Q_1	Q_0^{t+1}
0	0	0	1
0	1	1	1
1	1	1	0
1	0	0	0

$Q_0^{(t+1)}$

$Q_1(t) \backslash Q_0(t)$	0	1
0	1	0
1	1	0

$D_0^1 (1, 1 (-))$

$Q_1 \backslash Q_0$	0	1
0	1	0
1	1	0

$$D_0^1 = \overline{Q_1}$$

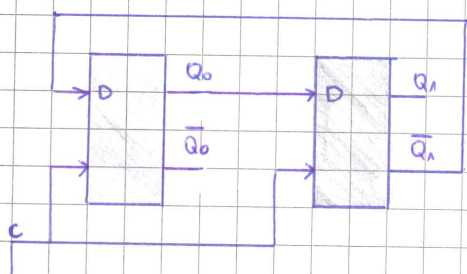
$Q_1^{(t+1)}$

$Q_1 \backslash Q_0$	0	1
0	0	0
1	1	1

$D_1^1 (1, 1 (-))$

$Q_1 \backslash Q_0$	0	1
0	0	0
1	1	1

$$D_1^1 = Q_0$$



J_0^1

$Q_1 \backslash Q_0$	0	1
0	1	0
1	-	-

$$J_0^1 = \overline{Q_1}$$

$K_0^1 (0 (0, 1, (-)))$

$Q_1 \backslash Q_0$	0	1
0	-	-
1	0	1

$$K_0^1 = Q_1$$

$$J_1^*$$

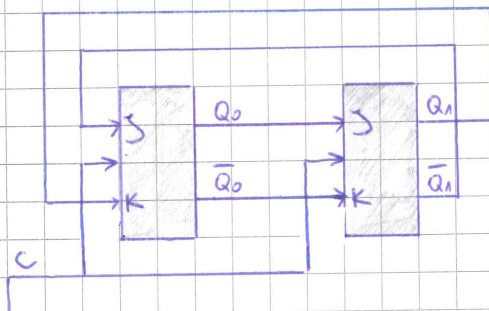
$Q_0 \backslash Q_1$	0	1
0	0	-
1	1	-

$$J_1^* = Q_0$$

$$K_1^*$$

$Q_0 \backslash Q_1$	0	1
0	-	1
1	-	0

$$K_1^* = \bar{Q}_0$$



$$T_0^*(1, 0, (-))$$

$Q_0 \backslash Q_1$	0	1
0	1	0
1	0	1

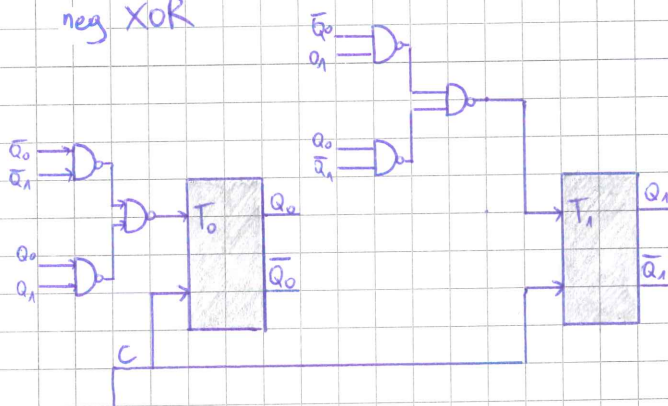
$$T_0^* = \bar{Q}_0 \bar{Q}_1 + Q_0 Q_1$$

neg XOR

$$T_1^*(1, 0, (-))$$

$Q_0 \backslash Q_1$	0	1
0	0	1
1	1	0

$$T_1^* = \bar{Q}_0 Q_1 + Q_0 \bar{Q}_1$$



Modulo 6 (0-5)

Q_2	Q_1	Q_0	(t)	Q_2	Q_1	Q_0	$(t+1)$
→ 0	0	0		0	0	1	
0	0	1		0	1	0	
0	1	0		0	1	1	
0	1	1		1	0	0	
1	0	0		1	0	1	
1	0	1		0	0	0	
0	0	0					

$Q_0^{(t+1)}$

$Q_2 \backslash Q_1 Q_0$	00	01	10	11
00	1	1		
01	0	0		
11	0			
10	1			

$Q_1^{(t+1)}$

$Q_2 \backslash Q_1 Q_0$	00	01	10	11
00	0	0		
01	1	0		
11	0			
10	1			

$$D_0^1 = \overline{Q_0}$$

$Q_2 \backslash Q_1 Q_0$	00	01	10	11
00	1	1		
01	0	0		
11	0			
10	1			

$$D_1^1 = \overline{Q_2} \cdot \overline{Q_1} \cdot Q_0 + Q_1 \cdot \overline{Q_0}$$

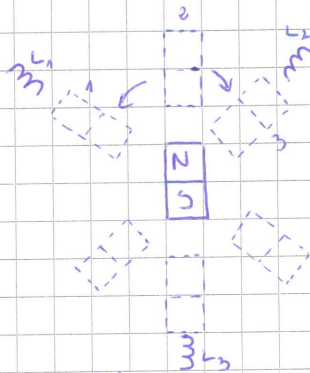
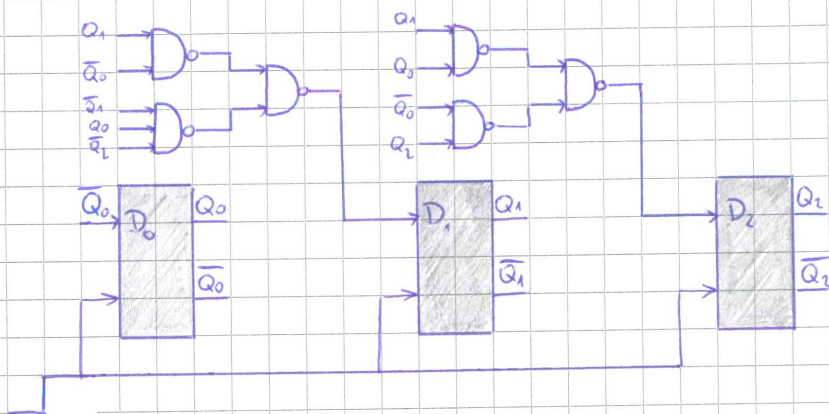
$Q_2 \backslash Q_1 Q_0$	00	01	10	11
00	0	0		
01	1	0		
11	0			
10	1			

$Q_2^{(t+1)}$

$Q_2 \backslash Q_1 Q_0$	00	01	10	11
00	0	1		
01	0	0		
11	1			
10	0			

$$D_2^1 = Q_1 \cdot Q_0 + \overline{Q_0} \cdot Q_1$$

$Q_2 \backslash Q_1 Q_0$	00	01	10	11
00	0	1		
01	0	0		
11	1			
10	0			



L_3	L_2	L_1	(t)	L_3	L_2	L_1	$(t+1)$
0	0	1		0	1	1	
0	1	1		0	1	0	
0	1	0		1	1	0	
1	1	0		1	0	0	
1	0	0		1	0	1	
1	0	1		0	0	1	

$L_1^{(t+1)}$

$L_2 L_1$	L_3	0	1
0 0	-	1	
0 1	1	1	
1 1	0	-	
1 0	0	0	

$D_1^* = \overline{L_2}$

$L_2 L_1$	L_3	0	1
0 0	-	1	
0 1	1	1	
1 1	0	-	
1 0	0	0	

$L_2^{(t+1)}$

$L_2 L_1$	L_3	0	1
0 0	-	0	
0 1	1	0	
1 1	1	-	
1 0	1	0	

$D_2^* = \overline{L_3}$

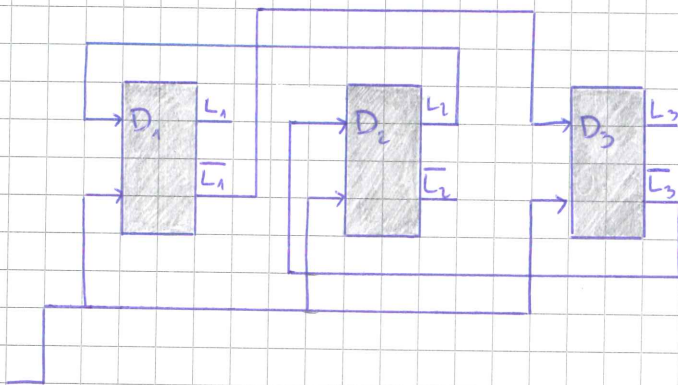
$L_2 L_1$	L_3	0	1
0 0	-	0	
0 1	1	0	
1 1	1	-	
1 0	1	0	

$L_3^{(t+1)}$

$L_2 L_1$	L_3	0	1
0 0	-	1	
0 1	0	0	
1 1	0	-	
1 0	1	1	

$D_3^* = \overline{L_1}$

$L_2 L_1$	L_3	0	1
0 0	-	1	
0 1	0	0	
1 1	0	-	
1 0	1	1	



UK1

UP

UK2

M

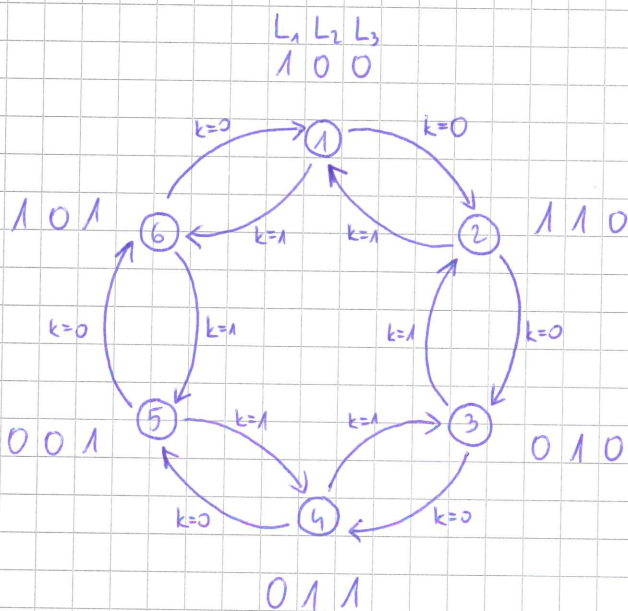
$$g^{(t+1)} =$$

$$y(t) = f(g(t))$$

M

$$g^{(t+1)} = f(g(t), u(t))$$

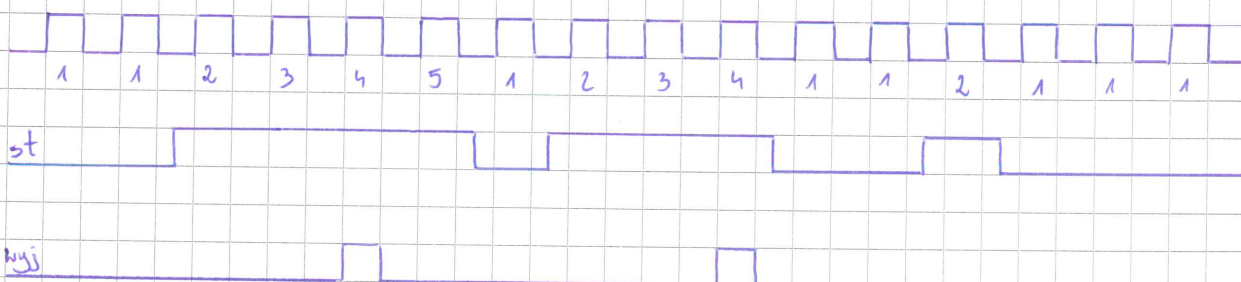
$$y(t) = f(g(t), u(t))$$

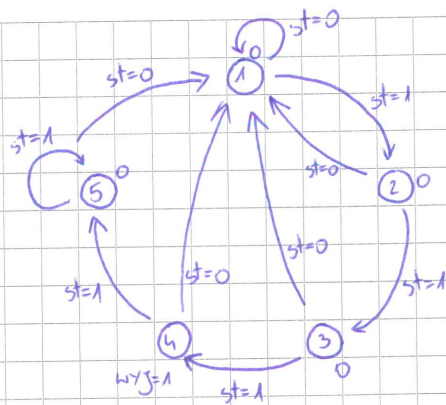


k - kierunek

k=0

k=1





stan (t) - bieżący

stan (t+1)

	st	q ₂	q ₁	q ₀		q ₂	q ₁	q ₀
1	0	0	0	0		0	0	0
2	0	0	0	1		0	0	0
3	0	0	1	0		0	0	0
4	0	0	1	1		0	0	0
5	0	1	0	0		0	0	0
	1	0	0	0		0	0	1
	1	0	0	1		0	1	0
	1	0	1	0		0	1	1
	1	0	1	1		1	0	0
	1	1	0	0		1	0	0

$$q_0(t+1) = D_0$$

q ₁ q ₀ \ stq ₂	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	-	-	0
11	0	-	-	0
10	0	-	-	1

$$q_1(t+1) = D_1$$

q ₁ q ₀ \ stq ₂	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	-	1
11	1	1	0	-
10	1	0	0	-

$$q_2(t+1) = D_2$$

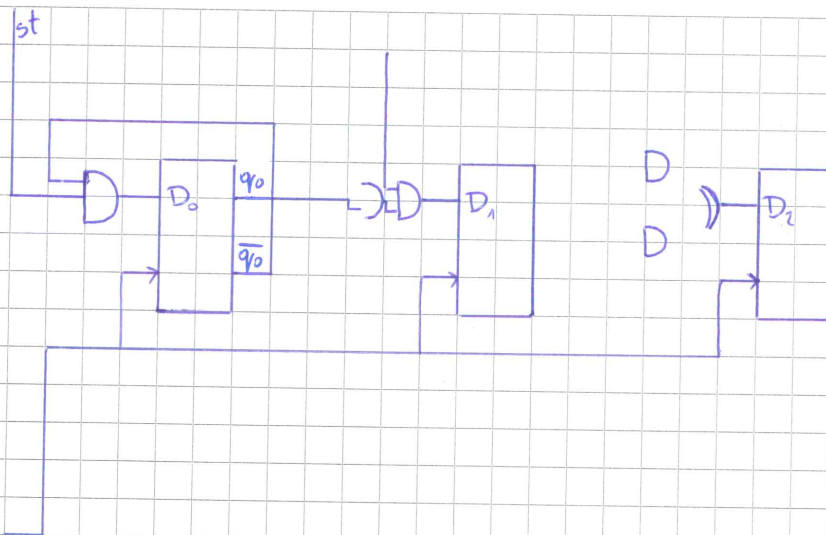
q ₁ q ₀ \ stq ₂	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	1	0	-
11	1	1	0	-
10	1	0	0	-

$$D_0 = \bar{q}_0 \bar{q}_2 st$$

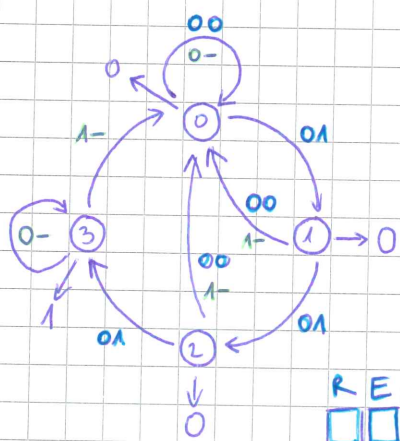
$$D_1 = \bar{q}_1 \bar{q}_0 st + q_1 \bar{q}_0 st$$

$$D_2 = st q_2 + q_1 q_0 st$$

q ₁ q ₀ \ q ₂	0	1
00	0	0
01	0	-
11	1	1
10	1	-



WFS



0 00

1 01

2 10

3 11

number st		R		E		q ₁ q ₀ (t)		q ₁ q ₀ (t+1)	
0	00	0	0	0	0	0	0	0	0
0	01	0	0	0	1	0	1	0	0
0	10	0	0	1	0	1	0	1	0
0	11	0	0	1	1	1	1	1	1
1	-	0	1	0	0	0	0	0	0
1	-	0	1	0	1	1	0	1	0
1	-	0	1	1	0	0	1	1	1
1	-	1	-	0	0	0	0	0	0
1	-	1	-	0	1	0	1	0	0
1	-	1	-	1	0	0	0	0	0
1	-	1	-	1	1	0	1	0	0

$q_1 \backslash q_0$	0	1
0	0	0
1	0	1

$$w_{ij} = q_i \cdot q_j$$

$q_1 q_0 \backslash RE$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	0	0
11	1	1	1	0
10	1	0	0	0

$$D_1 = q_1 q_0 \bar{R} + q_0 \bar{R} E + q_1 \bar{R} E$$

$q_1 q_0 \backslash RE$	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	1	1	0
11	1	1	1	0
10	1	0	0	1

$$D_0 = q_1 q_0 \bar{R} + \bar{q}_0 \cdot \bar{R} \cdot E$$

Podstawy robotyki - ćwiczenia

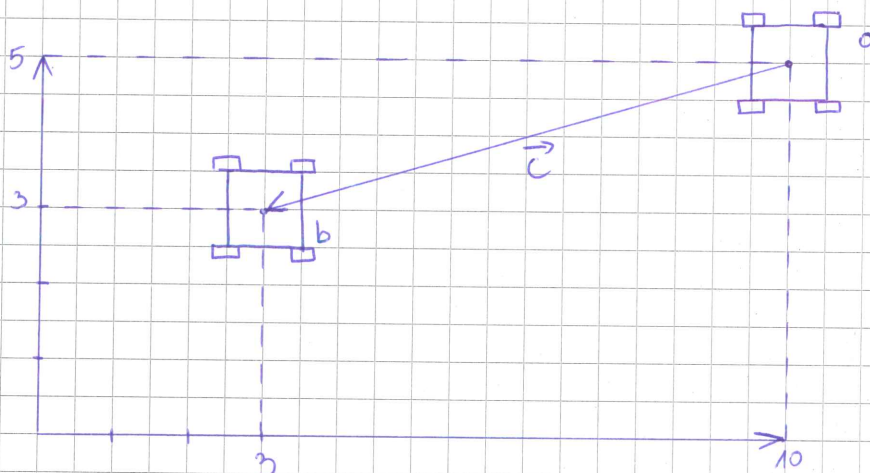
mgr. Igor Zubnycki

gentle.pl

- kurs online

Zadania są podawane przed kolokwium

Zadanie



$$a = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

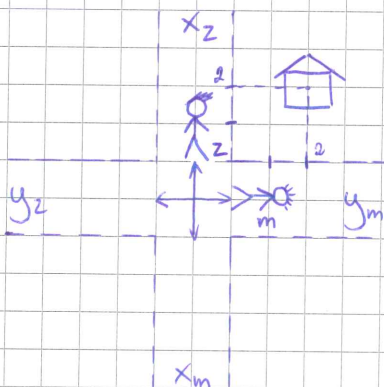
$$\vec{c} = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$s = \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53} \approx 7.28$$

↖ droga

Zadanie



$${}^z d = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$${}^m d = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$${}^m d \rightarrow {}^z d$$

$${}^m R_z = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

wersja?

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Macieja x w świecie Zenona $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$|{}^m R_z| = 1$$

Macieja y w świecie Zenona $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

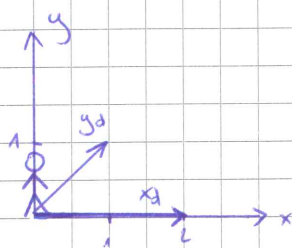
rozwiązanie rotacji

Zadanie



$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|M| = 2$$

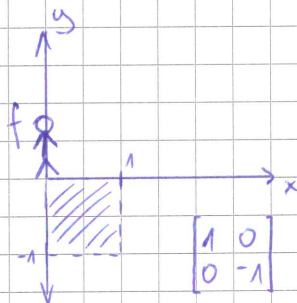
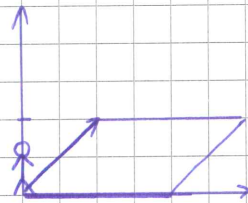
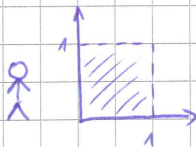


$$d = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

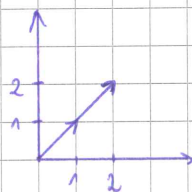
$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|M| = 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

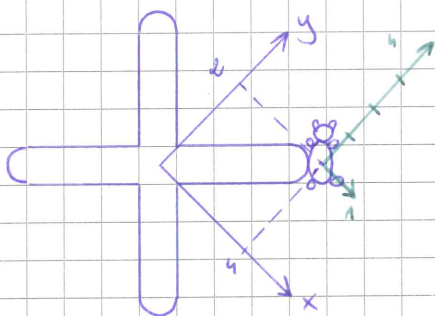


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie



$$r \times f = S(\vec{r}) \cdot \vec{f}$$

$$S(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

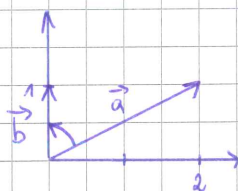
$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r \times f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$14 \text{ Nm}$$

$$S(\vec{r}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie



$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$a \circ b = 1$$

$$a \circ c = 10$$

$$\frac{a \circ b}{|a| \cdot |b|} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \alpha$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\frac{a \circ c}{|a| \cdot |c|} = \frac{10}{\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}} = 1$$

$$1 \text{ rad} \approx 60^\circ$$

kąty skierowane

P.D. 1 (Na kartkach)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| =$$

$$|B| =$$

$$A^T =$$

$$B^T =$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot A =$$

$$B^T \cdot B =$$

$$A^{-1} =$$

$$B^{-1} =$$

$$a = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$|a|$$

$$b \circ a$$

$$|b|$$

$$b \times a$$

$$b = \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a \circ b$$

$$b^+$$

$$a \times b$$

$$a^+$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A \circ a \quad \checkmark \quad A \circ B \circ a$$

$$A \circ b \quad \checkmark \quad B \circ A \circ a$$

$$A \circ C \quad \checkmark \quad B \circ C \quad \checkmark \quad C \circ a \quad \checkmark \quad C^T \circ a \quad \checkmark$$

$$a \circ C \quad \checkmark \quad a \circ C^T \quad \checkmark \quad b \circ C \quad \checkmark \quad b \circ C^T \quad \checkmark$$

$$|A \circ a| \quad \checkmark \quad |A \circ b| \quad \checkmark$$

Zadanie

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{a} \circ \bar{b} = 0$$

$$3b_x + 2b_y = 0$$

$$b_z \in \mathbb{R}$$

$$\bar{a}^+ = \bar{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$$

$$b_y = \frac{-3b_x}{2}$$

$$b_x \in \mathbb{R}$$

$$b_y = \frac{-3b_x}{2}$$

Zadanie

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{a} \circ \bar{c} = |\bar{a}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{5}}$$

$$\bar{a} \circ \bar{c} = -1 + 2\sqrt{2} + 0 = 2\sqrt{2} - 1$$

$$\arccos\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{5}}\right) = \varphi$$

$$c = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{5}$$

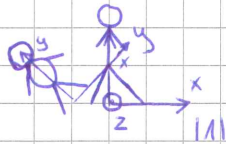
$$|\bar{c}| = 2$$

$$\varphi = 65.87^\circ$$

$$\varphi = \angle \bar{a} \bar{c} = ?$$

Macierz rotacji

Nie ma różnic w długości (wektory jednostkowe są takie same)



Czy to jest macierz rotacji?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

nie jest to M. rotacji

jest to macierz skożyna

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

czy są prostopadłe?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1 \ 1 \ 1$$

czy są równe
i muszą być 1!

Chcemy zrobić macierz rotacji

$$\begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} \times \vec{a}$$

$$\begin{matrix} \vec{z} & \vec{x} & \vec{y} \\ \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$1 //$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 //$$

$$R^{[1]} = R^{[1]}$$

$$R \cdot R^{[1]} = R \cdot R^{[1]} = [1]$$

Cecha macierzy jednostkowej

$$\det(R) = |R| = 1$$

$$R^T \cdot R = 1$$