

Politechnika Łódzka
Instytut Informatyki Stosowanej

Automatyzacja Obliczeń Inżynierskich
Laboratorium
sem. 6.

Ćwiczenie 2.

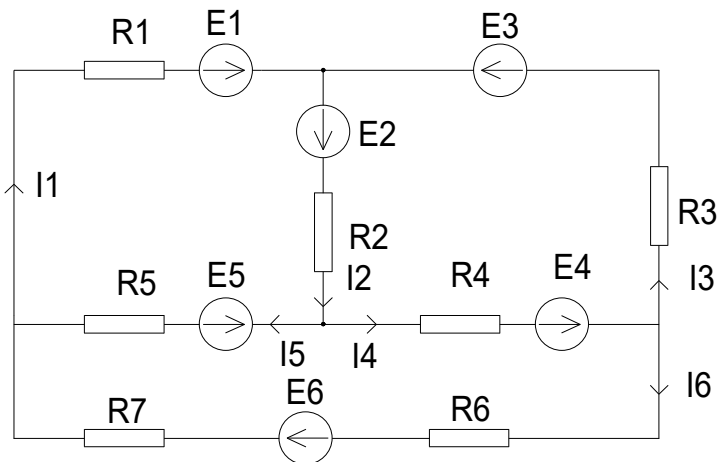
**Rozwiązywanie zagadnień inżynierskich w środowisku
arkusza kalkulacyjnego**

Opracował: dr hab. inż. Jacek Kucharski
dr inż. Piotr Urbanek

Zadanie 1. Analiza i synteza rozgałęzionych obwodów elektrycznych.

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się ze sposobami rozwiązywania rozgałęzionych obwodów elektrycznych za pomocą arkusza kalkulacyjnego. Ćwiczenie obejmuje zagadnienia związane z umiejętnością zapisywania równań macierzowych w arkuszu kalkulacyjnym, ich rozwiązywania oraz wykorzystania narzędzia scenariuszy do szybkiej analizy różnych przypadków pracy obwodu. Podsumowaniem ćwiczenia jest obliczenie prądów gałęziowych w analizowanym obwodzie, wykonanie wykresu zależności $U_{R4}=f(R_1, R_2)$ oraz synteza obwodu polegająca na takim doborze elementów pasywnych układu (oporników), aby prąd w wybranej gałęzi był równy założonej wcześniej wartości.

Utworzyć arkusz kalkulacyjny obliczający wartości prądów I_1 - I_6 oraz spadek napięcia na opornikach R_1 i R_4 w obwodzie prądu stałego przedstawionego na rys.1.



Rys. 1. Schemat obwodu elektrycznego prądu stałego.

Gdzie:

$E_1=45V$	$R_1=5\Omega$
$E_2=10V$	$R_2=6\Omega$
$E_3=26V$	$R_3=8\Omega$
$E_4=34V$	$R_4=6\Omega$
$E_5=5V$	$R_5=5\Omega$
$E_6=20V$	$R_6=15\Omega$
	$R_7=5\Omega$

Należy obliczyć prądy I_1 - I_6 płynące w gałęziach i spadek napięcia na opornikach R_1 i R_4 .

Wykorzystując narzędzie scenariuszy przeanalizować jak będzie się zmieniało napięcie na oporniku R_4 , gdy wartości oporników R_1 i R_2 wzrosną 2, 3 i 4 – krotnie. Sporządzić wykres obrazujący tę zależność.

Rozwiązanie zadania:

Spadek napięcia na dowolnym oporze R opisuje prawo Ohma. Mówi ono, że spadek napięcia U na idealnym oporniku R jest wprost proporcjonalny do płynącego przez niego prądu I .

Współczynnikiem proporcjonalności jest wartość zwana oporem elektrycznym R . Można je zapisać wzorem:

$$U = R \cdot I \quad (1)$$

Korzystając z drugiego prawa Kirchoffa, dla przedstawionego na rys. 1 obwodu prądu stałego można ułożyć trzy równania dla każdego oczka obwodu, mówiące, że suma spadków napięć w każdym oczku obwodu równa się zeru. Mamy zatem:

$$\begin{aligned} E_1 - I_1 R_1 + E_2 - I_2 R_2 - I_5 R_5 - E_5 &= 0 \\ E_2 - I_2 R_2 + E_4 - I_4 R_4 - I_3 R_3 + E_3 &= 0 \\ E_4 - I_4 R_4 - I_6 R_6 + E_6 - I_6 R_7 + E_5 + I_5 R_5 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Równania (2) można uzupełnić o trzy równania rozptywu prądów w gałęziach obwodu, wynikającymi z pierwszego prawa Kirchoffa:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_5 + I_6 \\ I_2 &= I_4 + I_5 \\ I_3 &= I_4 - I_6 \end{aligned} \quad (3)$$

Podstawiając równania (3) do równań (2) oraz porządkując równania (2) względem prądów I_4, I_5, I_6 otrzymujemy układ równań:

$$\begin{aligned} I_4 R_2 + I_5 (R_1 + R_2 + R_5) + I_6 R_1 &= E_1 + E_2 - E_5 \\ I_4 (R_2 + R_3 + R_4) + I_5 R_2 - I_6 R_3 &= E_2 + E_3 + E_4 \\ I_4 R_4 - I_5 R_5 + I_6 (R_6 + R_7) &= E_4 + E_5 + E_6 \end{aligned} \quad (4)$$

Równanie (4) daje się zapisać w postaci macierzowej, jako:

$$\mathbf{R} * \mathbf{I} = \mathbf{U} \quad (5)$$

Gdzie:

\mathbf{R} jest macierzą rezystancji o wymiarze (3×3) ,

\mathbf{I} – wektorem prądów gałęziowych o wymiarze (3×1) ,

\mathbf{U} – wektorem źródeł wymuszających o wymiarze (3×1) .

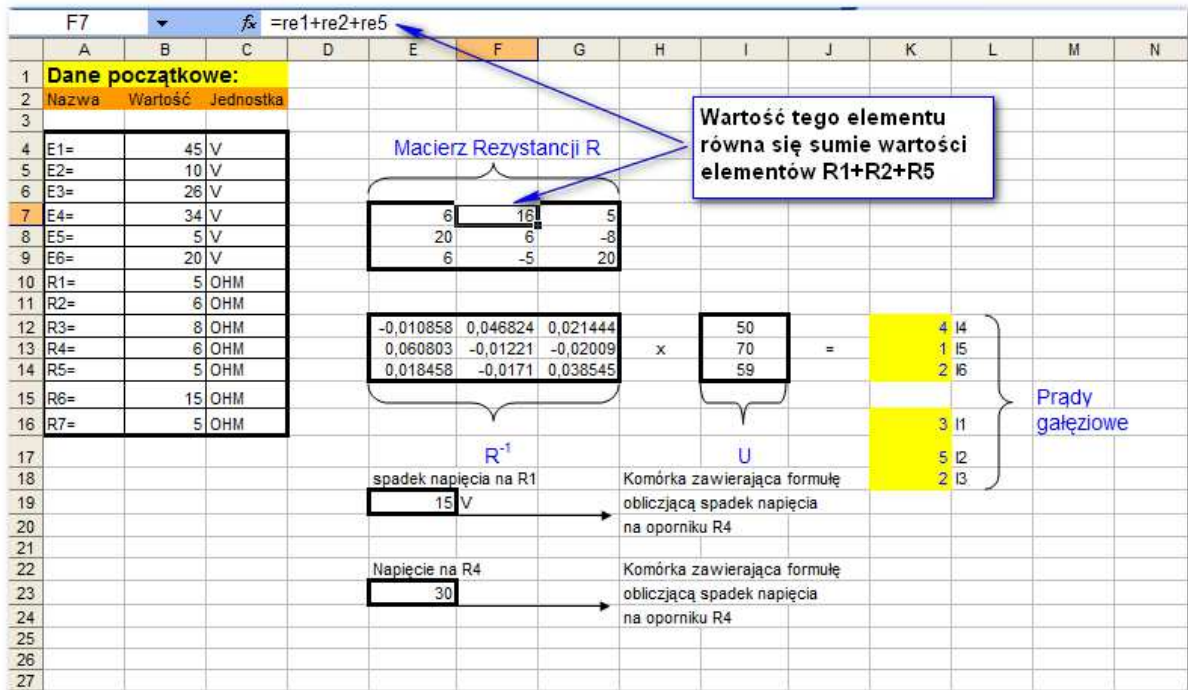
Mnożąc równanie (5) lewostronnie przez macierz odwrotną \mathbf{R}^{-1} otrzymujemy wartości prądów gałęziowych:

$$\mathbf{I} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{U} \quad (6)$$

Jeżeli macierz \mathbf{R} jest nieosobliwa, czyli $\det \mathbf{R} \neq 0$, to istnieje rozwiązanie układu równań, czyli jest możliwe wyznaczenie wartości prądów w macierzy \mathbf{I} .

a) Wykorzystanie arkusza kalkulacyjnego do znalezienia wartości prądów i napięć w układzie przedstawionym na rysunku 1.

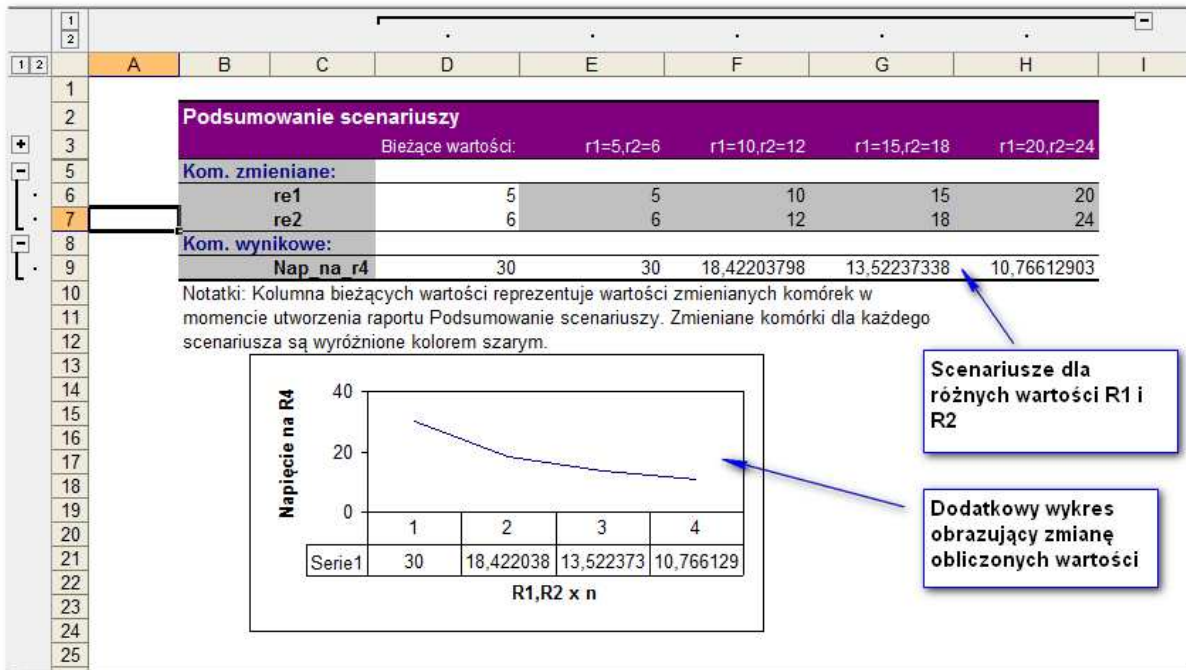
Przykładowy sposób rozwiązania takiego układu równań za pomocą arkusza kalkulacyjnego jest przedstawiony na rys. 2.



Rys. 2. Obliczanie prądów $I_1 \div I_6$ oraz napięcia na rezystorach R_1 i R_4 z wykorzystaniem rozwiązania równania macierzowego $I=R^{-1} \cdot U$.

b) Analiza problemu za pomocą scenariuszy

Przykładowa analiza przypadku $U_{R4}=f(R_1,R_2)$ za pomocą scenariusza arkusza kalkulacyjnego została przedstawiona na rys. 3.



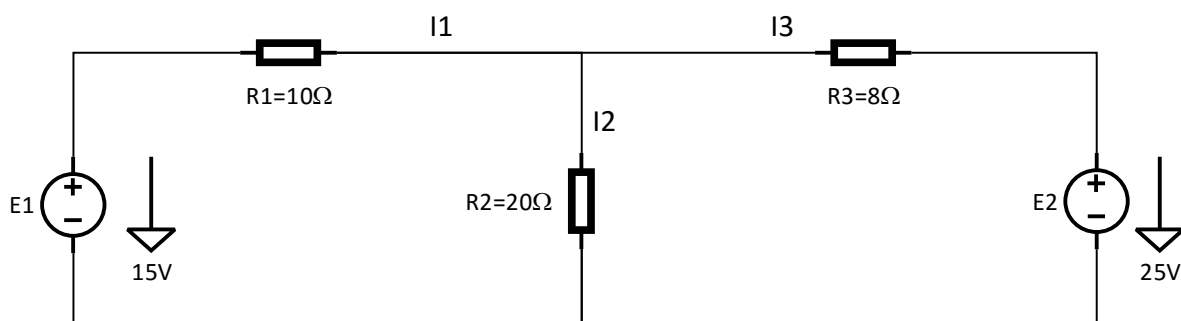
Rys. 3. Przykładowy wygląd scenariusza zależności $U_4=f(R_1,R_2)$.

c) **Wykorzystanie dodatku Solver do syntezy obwodu.**

Za pomocą dodatku Solver należy wskazać możliwości osiągnięcia w analizowanym obwodzie napięcia $U = 20V$ na rezystorze R_1 . Należy uwzględnić ograniczenia wartości wszystkich rezystorów ($0-1M\Omega$) oraz wartości napięć źródeł zasilających ($0-100V$).

Zadanie do samodzielnego wykonania:

Dany jest obwód elektryczny pokazany na rysunku 3a.



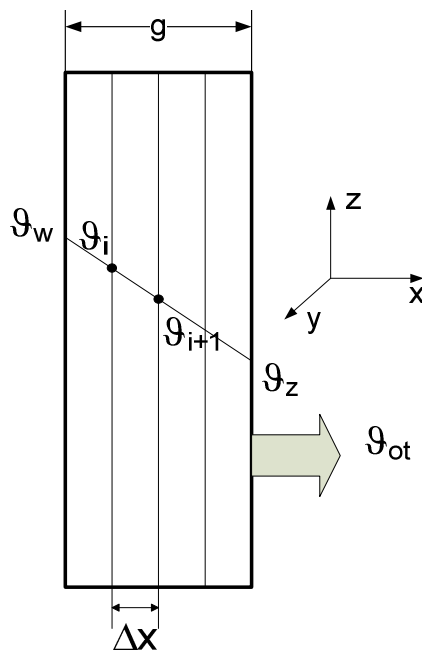
Rys. 4. Schemat obwodu elektrycznego wraz z wartościami rezystorów oraz źródeł napięcia stałego.

1. Dla schematu z rys. 4 wyznaczyć wartość prądów $I_1 \div I_3$ w obwodzie.
 2. Określić za pomocą dodatku „solver” wartość opornika R_2 , aby spadek napięcia na nim wynosił 10 V.
- Założyć, że wartość jego rezystancji w obwodzie może zmieniać się w granicach ($1\Omega \div 20k\Omega$).

3. Jak zmieniłyby się wartość prądu I_3 , gdyby wartość opornika R_3 wzrosła 2, 3 i 5 krotnie.

Wyznaczanie rozkładu temperatury wewnątrz płaskiej płyty

Wyznaczyć rozkład temperatury wewnątrz płyty o grubości $g=0,4\text{m}$ (rys.4), której jedna powierzchnia posiada temperaturę $\vartheta_w=500^\circ\text{C}$ a wewnątrz płyty przewodność cieplną $\lambda=0,3\text{ [W/m}^2\text{K]}$. Wartość współczynnika wymiany ciepła z otoczeniem wynosi $\alpha=25\text{W/m}^2\text{K}$, a wartość temperatury otoczenia $\vartheta_{ot}=20^\circ\text{C}$.



Rys. 4. Podział płyty na elementarne podobszary obliczeniowe.

Oznaczenia: ϑ_w - temperatura wewnętrzna płyty, ϑ_z - temperatura zewnętrzna płyty, ϑ_{ot} - temperatura otoczenia. ϑ_i , ϑ_{i+1} - temperatura warstw i-tej i i+1, Δx - grubość warstwy obliczeniowej.

Rozwiązanie:

Założenia upraszczające i warunki początkowe.

Zakładamy, że wymiary płyty ze grubość płyty g (liczona w kierunku osi x) jest dużo mniejsza od wymiarów płyty kierunkach osi y oraz z .

Płyta taka może być traktowana jako medium, przez które ciepło przepływa tylko w jednym kierunku - wzdłuż osi x .

Równanie opisujące przewodzenie ciepła w ciałach stałych sformułował w roku 1807 Fourier. Brzmi ono następująco:

Gęstość strumienia cieplnego jest wprost proporcjonalna do gradientu temperatury.

$$q_n = -\lambda \operatorname{grad} \vartheta = -\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) \quad (1)$$

Znak minus we wzorze (1) oznacza, że strumień ciepła płynie w kierunku malejących wartości temperatury (czyli od miejsca cieplejszego, do zimniejszego).

Z uwagi na założenie jednowymiarowości przepływu ciepła, równanie (1) upraszcza się do postaci:

$$q_n = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx} = -\lambda \frac{\Delta\vartheta}{g} = -\lambda \frac{\vartheta_z - \vartheta_w}{g} \quad (2)$$

gdzie:

g – grubość ściany,

$\Delta\vartheta$ – różnica temperatur wzdłuż grubości g .

Wzór (2) stanowi podstawę do rozwiązywania zagadnień jednowymiarowego przewodnictwa ciepła w ciałach stałych dla stanów cieplnie ustalonych.

Z powierzchni zewnętrznej płyty strumień ciepła oddawany jest do otoczenia o temperaturze ϑ_{ot} . Zjawisko to opisuje prawo Newtona, którego postać podana jest wzorem (3):

$$q = \alpha(\vartheta_z - \vartheta_{ot}) \quad (3)$$

Zgodnie z prawem zachowania energii, w stanie cieplnie ustalonym musi zachodzić równość strumieni ciepłych – dopływającego do powierzchni zewnętrznej i oddawanego do otoczenia. Mamy zatem:

$$-\lambda \frac{\vartheta_z - \vartheta_w}{g} = \alpha(\vartheta_z - \vartheta_{ot}) \quad (4)$$

gdzie: g – grubość płyty.

Ze wzoru (4) można wyznaczyć wartość temperatury na powierzchni płyty ϑ_z :

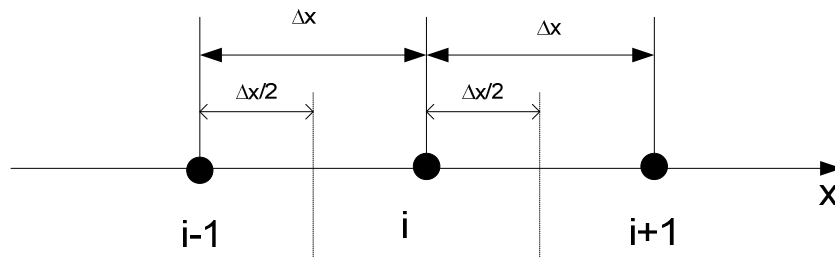
$$\vartheta_z = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha \cdot g} \vartheta_w + \frac{\alpha \cdot g}{\lambda + g} \vartheta_{ot} \quad (5)$$

Wzór (5) pokazuje zależność temperatury na zewnętrznej powierzchni płyty od jej własności materiałowych oraz temperatury ϑ_w i ϑ_{ot} .

Znając wartości temperatury ϑ_w i ϑ_z można wyznaczyć rozkład temperatury wzdłuż grubości płyty g . W tym celu należy rozpatrzyć układ stacjonarny, bezźródłowy, będący w stanie cieplnie ustalonym. Rozkład temperatury w takim układzie opisywany jest przez równanie Laplace'a, którego postać dla układu jednowymiarowego podana jest wzorem (6).

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = 0 \quad (6)$$

Korzystając z rys. 5. równanie (6) można zamienić na postać różnicową wg następujących wzorów:



Rys. 5. Podział płyty na węzły obliczeniowe.

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right]_{i+\frac{1}{2}\Delta x} \approx \frac{\vartheta_{i+1} - \vartheta_i}{\Delta x} \quad \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right]_{i-\frac{1}{2}\Delta x} \approx \frac{\vartheta_i - \vartheta_{i-1}}{\Delta x} \quad (7)$$

Pochodne drugiego rzędu w punkcie (i) będą zatem równe:

$$\left. \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \right]_i \approx \frac{\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right]_{i+\frac{1}{2}} - \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right]_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = \frac{\vartheta_{i+1} + \vartheta_{i-1} - 2\vartheta_i}{(\Delta x^2)} \quad (8)$$

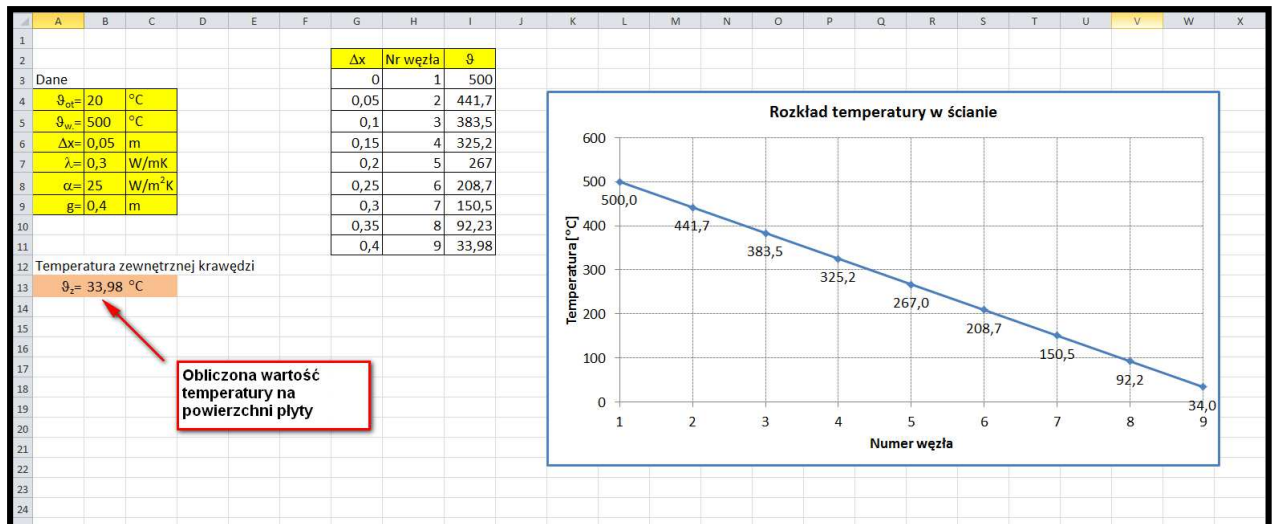
Podstawiając wzór (8) do równania Laplace'a (6) otrzymujemy wzór na wartość temperatury w węźle (i) dla układu jednowymiarowego.

$$\frac{\vartheta_{i+1} + \vartheta_{i-1} - 2\vartheta_i}{(\Delta x^2)} = 0 \Rightarrow \vartheta_i = \frac{\vartheta_{i+1} + \vartheta_{i-1}}{2} \quad (9)$$

Wzór (9) wykorzystujemy na obliczanie temperatury w węzłach wewnętrznych analizowanej płyty.

Rozwiązanie problemu za pomocą arkusza kalkulacyjnego.

Należy utworzyć arkusz kalkulacyjny pozwalający na obliczenie rozkładu temperatury na powierzchni zewnętrznej oraz wewnątrz płyty. Przyjąć skok podziału płyty równy $\Delta x=0,05\text{m}$.



Rys. 6. Przykładowy rozkład temperatury wzdłuż grubości płyty

Dobrać grubość płyty g tak, aby temperatura w środku płyty wynosiła nie więcej niż 200°C .