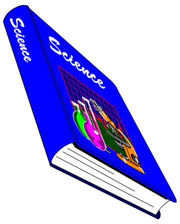
TEORIA GIER

HISTORIA TEORII GIER

Rok 1944: **powszechnie uznana data narodzin teorii gier**



Monografia:

John von Neumann, Oskar Morgenstern
Theory of Games and Economic Behavior
(*Teoria gier i postępowanie ekonomiczne*)

Rok 1994: **Nagroda Nobla z dziedziny ekonomii**

John Nash
John Harsányi → **3 specjaliści od teorii gier**
Reinhard Selten

Ostatnie 30 lat: **prawdziwa eksplozja zainteresowania różnych nauk teorią gier**

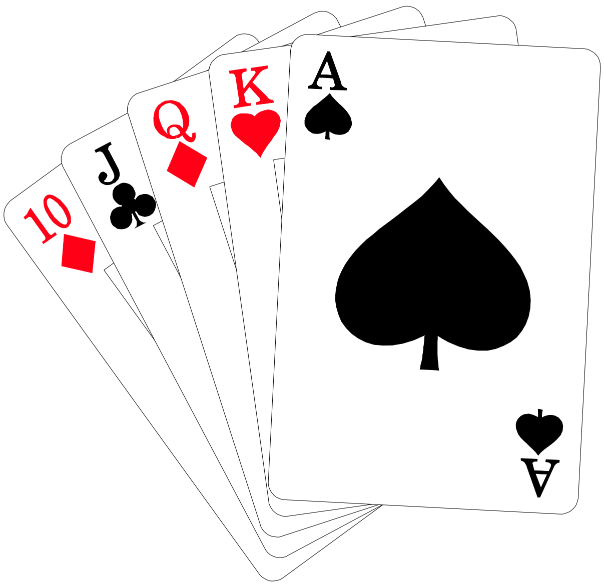
Teorię gier wykorzystuje się w wielu dziedzinach nauki, a zwłaszcza w:

- **ekonomii,**
- **naukach politycznych,**
- **socjologii,**
- **psychologii,**
- **biologii,**
- **informatyce.**

CZYM ZAJMUJE SIĘ TEORIA GIER?

Teoria gier jest dziedziną zajmującą się opisem różnych sytuacji, w których uczestniczą podmioty świadomie podejmujące pewne decyzje, w wyniku których następują rozstrzygnięcia mogące zmienić ich położenie. Teoria gier zajmuje się przede wszystkim sytuacjami konfliktowymi, ale również sytuacjami, w których interesy graczy są zgodne, ale ze względu na kłopoty w porozumiewaniu się trudno im ustalić jednolity sposób postępowania.

Matematyka jest wszechobecna w teorii gier jako narzędzie, ale również teoria gier inspiruje badania matematyczne. Optymalizacja wielokryterialna, analiza nieliniowa, a nawet podstawy matematyki, teoria zbiorów, wyglądałyby inaczej, gdyby nie były inspirowane odkryciami z zakresu teorii gier.



ELEMENTY GRY

Gracze

Graczy musi być co najmniej dwóch.

Graczami mogą być osoby, przedsiębiorstwa, kraje itp.

Strategie (możliwe sposoby postępowania graczy)

Strategia to kompletny opis postępowania gracza w każdej sytuacji, w jakiej może się znaleźć.

Wypłaty

Wszystkim strategiom są przypisane odpowiednie wypłaty dla poszczególnych graczy.

Wypłaty mogą mieć różną postać:

- **pieniężną**
  (np. osiągnięte zyski, poniesione koszty)
- **niepieniężną**
  (np. zdobycze terytorialne, liczba zabitych żołnierzy wroga)

WAŻNE ZAŁOŻENIE:

Każdy gracz chce jak najlepiej dla siebie, czyli maksymalizuje swoje zyski lub minimalizuje straty. (Zyski i straty nie muszą oczywiście przybierać postaci pieniężnej – są to pewne wartości funkcji użyteczności obu graczy).

Przykład:

Poniższe tabelki pokazują wypłaty (zyski) gracza 1 oraz jego przeciwnika (gracza 2). Gracz 1 ma do wyboru dwie strategie: A i B. Gracz 2 zawsze postępuje tak samo.

Strategia A

Gracz 1	Gracz 2
5	3

Strategia B

Gracz 1	Gracz 2
6	301

Którą strategię wybierze gracz 1?

Gracz 1 – wybierając strategię A – osiągnie zysk równy 5, zaś wybierając strategię B osiągnie zysk równy 6. Zatem gracz 1 wybierze strategię B.

Fakt, że przy wyborze strategii B przeciwnik zwiększy jednocześnie swoje zyski ponad 100-krotnie (do 301) nie ma znaczenia. Gracz 1 kieruje się przy wyborze tylko i wyłącznie własnym interesem.

RODZAJE GIER

Gry możemy podzielić według wielu różnych kryteriów.

Jednoetapowe	GRY	Wieloetapowe
Z pełną informacją	GRY	Z niepełną informacją
Z kompletną informacją	GRY	Z niekompletną informacją
Z kompletną pamięcią	GRY	Z niekompletną pamięcią
Jednorazowe	GRY	Powtarzalne (o skończonym oraz nieskończonym horyzoncie czasowym)
Z 2 graczami	GRY	Z 3 i więcej graczami

GRY JEDNOETAPOWE

W grach jednoetapowych gracze podejmują decyzje jednocześnie (w tym samym momencie) – tak jak np. w grze w marynarza. Gry jednoetapowe to jednocześnie gry z niepełną informacją – każdy gracz podejmuje decyzję nie znając decyzji podjętych przez pozostałych graczy.

PRZYKŁAD (DYLEMAT WIĘŹNIA)

Opis gry:

Wacek i Pacek zostali aresztowani za wspólnie dokonane przestępstwo. Obaj chłopcy są przesłuchiwani oddzielnie i mają do dyspozycji następujące możliwości:

- **przyznać się do winy,**
- **nie przyznać się do winy.**

(a) Jeśli obaj przyznają się do winy, to obaj zostaną skazani na 5 miesięcy więzienia.

(b) Jeśli żaden z nich nie przyzna się do winy, to obaj dostaną 2 miesiące więzienia.

(c) Jeśli jeden z nich przyzna się do winy, a drugi nie, to ten co się przyzna zostanie skazany na 1 miesiąc więzienia, a ten który się nie przyzna dostanie karę 12 miesięcy więzienia.

Gracze:
Wacek i Pacek

Strategie Wacka:
- **Przyznać się do winy**
- **Nie przyznać się do winy**

Strategie Packa:
- **Przyznać się do winy**
- **Nie przyznać się do winy**

Wypłaty:

	Wypłata Wacka	Wypłata Packa
Obaj przyznają się do winy	–5	–5
Żaden z nich nie przyzna się do winy	–2	–2
Tylko Wacek przyzna się do winy	–1	–12
Tylko Pacek przyzna się do winy	–12	–1

Wypłaty mają postać miesięcy spędzonych w więzieniu (ze znakiem ujemnym).

Cel każdego gracza:
Maksymalizacja wypłaty, czyli jak najkrótszy pobyt w więzieniu.

Sytuacja konfliktowa:
Decyzja jednego gracza wpływa na wypłatę drugiego gracza.

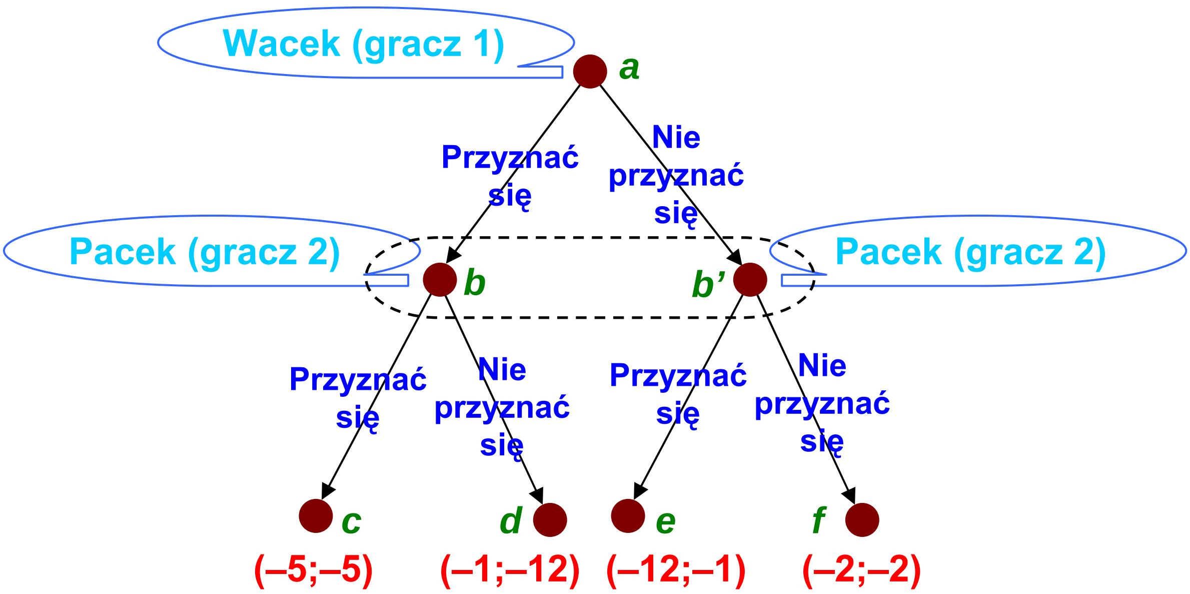
ILUSTRACJA GRY:

Gry graficznie można przedstawiać w dwóch postaciach:

- ✓ **w postaci rozwiniętej (ekstensywnej),**
- ✓ **w postaci normalnej (strategicznej).**

POSTAĆ ROZWINIĘTA (EKSTENSYWNA)

Postacią rozwiniętą (ekstensywną) gry jest drzewo.

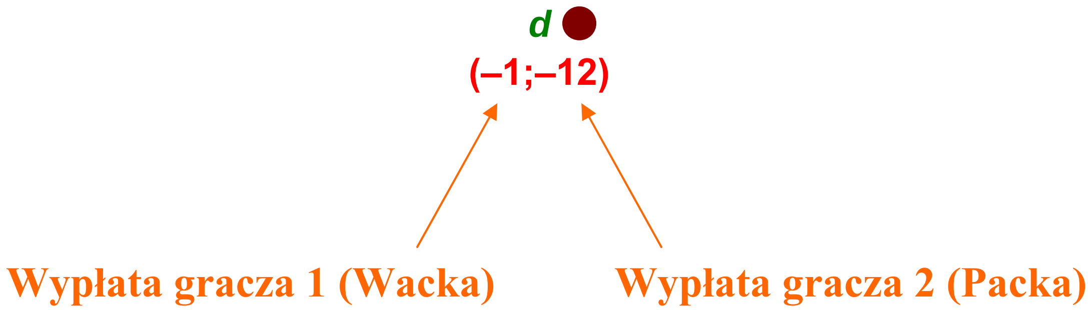


(strzałka) – **posunięcie jednego z graczy**

a, b, b', c, d, e, f – **wierzchołki gry**

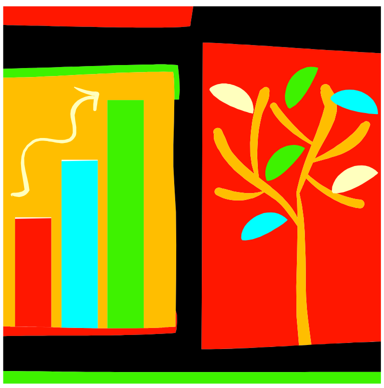
(–5; –5) … (–2; –2) – **wypłaty poszczególnych graczy**

Wierzchołek *a* (wierzchołek początkowy) pokazuje możliwości wyboru Wacka (przyznać się lub nie przyznać się). Wierzchołki *b* i *b'* pokazują możliwości wyboru Packa (przyznać się lub nie przyznać się). Wierzchołki *c*, *d*, *e* i *f* (wierzchołki końcowe) pokazują wypłaty w grze (wynik gry) w zależności od podjętych przez obu graczy decyzji. W nawiasach na pierwszym miejscu podana jest wypłata gracza 1 – w tym przypadku Wacka, zaś na drugim miejscu znajduje się wypłata gracza 2 – w tym przypadku jest nim Pacek:



„Mrówki” wokół wierzchołków *b* i *b'* oznaczają, że decyzje Packa są podejmowane w tym samym czasie, co decyzje Wacka (gra przebiega jednoetapowo – obaj gracze wykonują ruchy jednocześnie). Gdyby „mrówek” nie było, oznaczałoby to, że Pacek podejmuje decyzje po tym, jak decyzję podjął Wacek (gra dwuetapowa).

Przy grach jednoetapowych nie ma znaczenia, który gracz będzie graczem 1, a który – graczem 2. Gdybyśmy skonstruowali drzewo, na którym graczem 1 byłby Pacek, a graczem 2 – Wacek, wyniki uzyskalibyśmy takie same.



POSTAĆ NORMALNA (STRATEGICZNA)

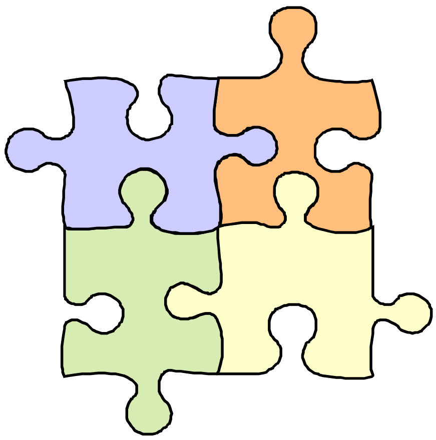
Postacią normalną (strategiczną) gry jest tabelka.

Gracz 2 / Gracz 1	Przyznać się	Nie przyznać się
Przyznać się	(–5; –5)	(–1; –12)
Nie przyznać się	(–12; –1)	(–2; –2)

W wierszach są podane strategie gracza 1 (w naszym przypadku Wacka).

W kolumnach są podane strategie gracza 2 (w naszym przypadku Packa).

W środku tabelki podane są wypłaty obu graczy odpowiadające poszczególnym strategiom. Na pierwszym miejscu znajdują się wypłaty gracza 1, a na drugim miejscu znajdują się wypłaty gracza 2.



GRY WIELOETAPOWE

W grach wieloetapowych gracze podejmują decyzje sekwencyjnie (jedna po drugiej). Tak jest np. w grze w szachy, kiedy gracz 2 podejmuje decyzję (wykonuje ruch) po graczu 1 i odwrotnie, gracz 1 podejmuje kolejną decyzję (wykonuje kolejny ruch) po graczu 2.
Jeżeli w grze wieloetapowej nie ma sytuacji, że gracz podejmuje decyzję nie znając decyzji innych graczy (chyba że inni gracze podejmują decyzje później), gra taka jest grą z pełną informacją.

PRZYKŁAD GRY DWUETAPOWEJ Z PEŁNĄ INFORMACJĄ

Opis gry:

Wacek planuje (i musi) zrealizować jedno z dwóch przedsięwzięć (przedsięwzięcie A lub przedsięwzięcie B) i proponuje Packowi uczestnictwo w tym przedsięwzięciu. Pacek ma do wyboru dwie możliwości:

- **zgodzić się na zaproponowany przez Wacka udział we wspólnym przedsięwzięciu;**
- **nie zgodzić się na zaproponowany przez Wacka udział we wspólnym przedsięwzięciu.**

(a) Jeśli Wacek wybierze przedsięwzięcie A i będzie je realizował razem z Packiem, Wacek osiągnie zysk 4, zaś Pacek – zysk 2.

(b) Jeśli Wacek wybierze przedsięwzięcie A i będzie je realizował samodzielnie, osiągnie wówczas zysk zerowy, zaś Pacek osiągnie zysk 3 (może to na przykład wynikać z tego, że Wacek – realizując samodzielnie przedsięwzięcie A – musi ujawnić coś interesującego dla Packa).

(c) Jeśli Wacek wybierze przedsięwzięcie B i będzie je realizował razem z Packiem, Wacek osiągnie zysk 3, zaś Pacek – zysk 4.

(d) Jeśli Wacek wybierze przedsięwzięcie B i będzie je realizował samodzielnie, osiągnie wówczas zysk 1, zaś Pacek – zysk 2.

Gracze:
Wacek i Pacek

Strategie Wacka:
- **Zaproponować przedsięwzięcie A**
- **Zaproponować przedsięwzięcie B**

Strategie Packa:
- **Zgodzić się na udział w obu przedsięwzięciach (TT)**
- **Zgodzić się na udział tylko w przedsięwzięciu A (TN)**
- **Zgodzić się na udział tylko w przedsięwzięciu B (NT)**
- **Nie zgodzić się na udział w żadnym przedsięwzięciu (NN)**

Proszę zauważyć, iż teraz Pacek ma cztery strategie, a nie dwie jak by się mogło początkowo wydawać (powiedzieć „tak” lub „nie”).

Wypłaty:

	Wypłata Wacka	Wypłata Packa
Wacek realizuje przed. A z Packiem	4	2
Wacek realizuje przed. A samodzielnie	0	3
Wacek realizuje przed. B z Packiem	3	4
Wacek realizuje przed. B samodzielnie	1	2

Wypłaty mogą np. pokazywać wielkość zysku osiągniętego odpowiednio przez poszczególnych graczy.

Cel każdego gracza:
Maksymalizacja wypłaty, czyli maksymalizacja zysku.

Sytuacja konfliktowa:
Wypłata Wacka zależy od decyzji Packa i na odwrót, wypłata Packa zależy od propozycji złożonej przez Wacka.

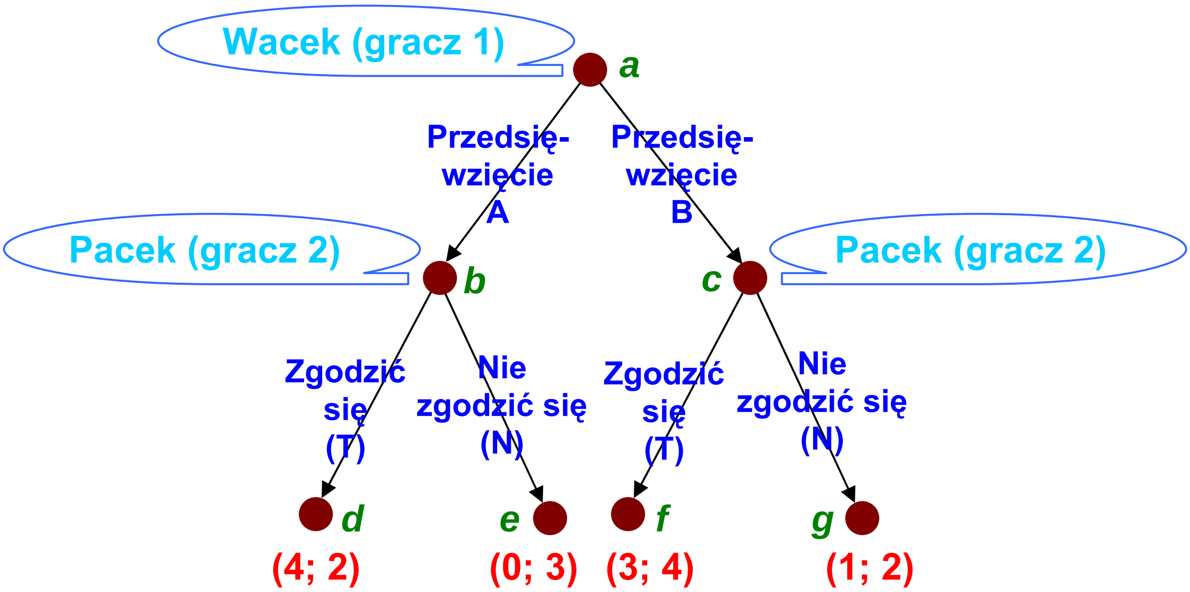
ILUSTRACJA GRY:

Gry wieloetapowe można przedstawiać graficznie również w dwóch postaciach:

- ✓ **w postaci rozwiniętej (ekstensywnej),**
- ✓ **w postaci normalnej (strategicznej).**

POSTAĆ ROZWINIĘTA (EKSTENSYWNA)

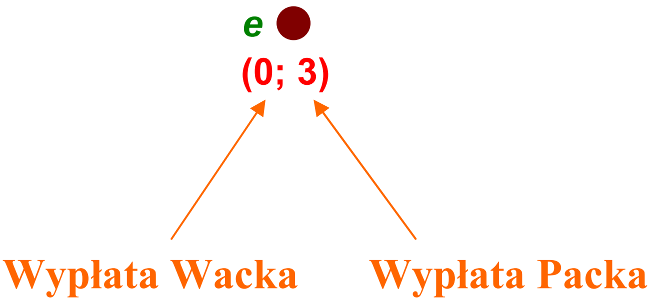
Postacią rozwiniętą (ekstensywną) gry jest oczywiście drzewo.



Konstrukcja drzewa jest analogiczna jak dla gry jednoetapowej:

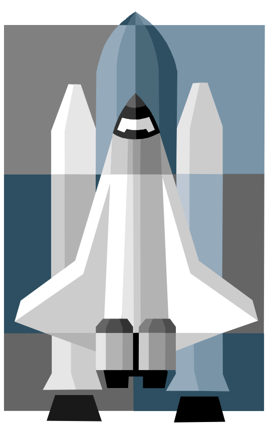
⟶ **(strzałka)** – **posunięcie jednego z graczy**
a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g – **wierzchołki gry**
(4; 2) … (1; 2) – **wypłaty poszczególnych graczy**

Wierzchołek *a* (wierzchołek początkowy) pokazuje możliwości wyboru Wacka (wybrać przedsięwzięcie A lub B). Wierzchołki *b* i *c* pokazują możliwości wyboru Packa (zgodzić się na udział lub odmówić udziału w danym przedsięwzięciu). Wierzchołki *d*, *e*, *f* i *g* (wierzchołki końcowe) pokazują wypłaty w grze (wynik gry) w zależności od podjętych przez obu graczy decyzji. W nawiasach na pierwszym miejscu podana jest wypłata gracza 1 (Wacka), zaś na drugim miejscu znajduje się wypłata gracza 2 (Packa):



Jedyną różnicą pomiędzy drzewem ilustrującym grę wieloetapową z pełną informacją a drzewem ilustrującym grę jednoetapową jest brak „mrówek” otaczających wybór dokonywany przez gracza 2. Właśnie ten brak „mrówek” oznacza, że decyzje są podejmowane sekwencyjnie i gracze znają decyzje podjęte na wcześniejszych etapach gry (gra z pełną informacją).

W grach wieloetapowych kolejność umieszczania poszczególnych graczy na drzewie musi odpowiadać kolejności, w jakiej faktycznie podejmują oni swoje decyzje. Ponieważ Wacek podejmuje decyzję pierwszy, jest on graczem numer 1.



POSTAĆ NORMALNA (STRATEGICZNA)

Postacią normalną (strategiczną) gry jest oczywiście tabelka.

Gracz 2 / Gracz 1	TT	TN	NT	NN
Przedsięwzięcie A	(4; 2)	(4; 2)	(0; 3)	(0; 3)
Przedsięwzięcie B	(3; 4)	(1; 2)	(3; 4)	(1; 2)

W wierszach podane są strategie gracza 1 (Wacka).

W kolumnach podane są strategie gracza 2 (Packa).

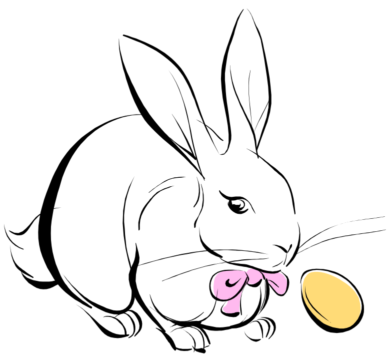
W środku tabelki podane są wypłaty obu graczy odpowiadające poszczególnym strategiom. Na pierwszym miejscu znajdują się wypłaty gracza 1, a na drugim miejscu znajdują się wypłaty gracza 2.

Proszę uważnie przeanalizować wielkość wypłat obu graczy w zależności od wybranych przez nich strategii.

STRATEGIE DOMINUJĄCE I STRATEGIE ZDOMINOWANE

Strategia dominująca to najlepsza ze wszystkich możliwych strategii, niezależnie od decyzji, jaką podejmie drugi gracz.

Strategia zdominowana to taka strategia, względem której istnieje(ą) strategia(e), która(e) jest(są) zawsze lepsza(e), niezależnie od decyzji, jaką podejmie drugi gracz.



A TERAZ KILKA PRZYKŁADÓW

(a) (Dylemat więźnia)

Wacek \ Pacek	Przyznać się	Nie przyznać się
Przyznać się	(–5; –5)	(–1; –12)
Nie przyznać się	(–12; –1)	(–2; –2)

Jeżeli Pacek przyzna się do winy, Wacek przyznając się zostanie skazany na 5 miesięcy więzienia, zaś nie przyznając się zostanie skazany na 12 miesięcy więzienia. Lepszym wyborem dla Wacka jest zatem „przyznać się”.

Jeżeli Pacek nie przyzna się do winy, Wacek przyznając się zostanie skazany na 1 miesiąc więzienia, zaś nie przyznając się zostanie skazany na 2 miesiące więzienia. Również teraz lepszym wyborem dla Wacka jest „przyznać się”.

A zatem niezależnie od decyzji Packa, zawsze dla Wacka korzystniej jest przyznać się do winy. Decyzja o nieprzyznaniu się do winy zawsze będzie decyzją gorszą.

Dla Wacka strategią dominującą będzie „przyznać się do winy”, natomiast „nie przyznać się do winy” będzie strategią zdominowaną.

Podobnie dla Packa strategią dominującą będzie „przyznać się do winy”, natomiast „nie przyznać się do winy” będzie strategią zdominowaną (jeśli ktoś nie wierzy, proszę przeprowadzić analogiczne rozumowanie).

(b)

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia A	Strategia B
Strategia A	(5; 7)	(6; 9)
Strategia B	(3; 4)	(4; 5)

Dla gracza 1 strategią dominującą jest strategia A:

- **jeżeli gracz 2 zagra A, to gracz 1 wybierając A otrzyma 5, a gdyby wybrał B otrzymałby tylko 3;**
- **jeżeli gracz 2 zagra B, to gracz 1 wybierając A otrzyma 6, a gdyby wybrał B otrzymałby tylko 4.**

Dla gracza 2 strategią dominującą jest strategia B:

- **jeżeli gracz 1 zagra A, to gracz 2 wybierając A otrzyma 7, zaś wybierając B otrzyma 9;**
- **jeżeli gracz 1 zagra B, to gracz 2 wybierając A otrzyma 4, zaś wybierając B otrzyma 5.**

Dla gracza 1 strategią zdominowaną jest strategia B ($3 < 5$ i $4 < 6$).

Dla gracza 2 strategią zdominowaną jest strategia A ($7 < 9$ i $4 < 5$).

(c)

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia A	Strategia B
Strategia A	(5; 7)	(6; 9)
Strategia B	(6; 4)	(4; 5)

Tutaj jedynie gracz 2 ma strategię dominującą, którą jest strategia B (9 > 7 i 5 > 4).

Dla gracza 2 strategia A jest strategią zdominowaną (7 < 9 i 4 < 5).

Gracz 1 nie ma strategii dominującej ani strategii zdominowanej (6 > 5, ale 4 < 6).

(d)

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia C	Strategia D
Strategia A	(5; 7)	(6; 6)
Strategia B	(6; 4)	(4; 5)

Tutaj ani gracz 1 ani gracz 2 nie mają strategii dominującej ani też zdominowanej.

A teraz trochę gier bardziej skomplikowanych (każdy z graczy ma do wyboru 3 strategie).

(e)

Gracz 2 Gracz 1	Strategia A	Strategia B	Strategia C
Strategia A	(2; 1)	(2; 4)	(–2; 8)
Strategia B	(5; –2)	(7; 5)	(1; 6)
Strategia C	(4; 5)	(3; 8)	(0; 9)

Dla gracza 1:

- ✓ **<u>strategia B</u> jest strategią dominującą (5 > 2 i 5 > 4; 7 > 2 i 7 > 3; 1 > –2 i 1 > 0);**
- ✓ **<u>strategie A i C</u> są strategiami zdominowanymi.**

Dla gracza 2:

- ✓ **<u>strategia C</u> jest strategią dominującą (8 > 1 i 8 > 4; 6 > –2 i 6 > 5; 9 > 5 i 9 > 8);**
- ✓ **<u>strategie A i B</u> są strategiami zdominowanymi.**

(f)

Gracz 1 \ Gracz 2	Strategia A	Strategia B	Strategia C
Strategia A	(2; 1)	(2; 4)	(–2; 8)
Strategia B	(1; –2)	(7; 5)	(–1; 6)
Strategia C	(4; 5)	(3; 8)	(1; 9)

Dla gracza 2 strategie A i B są strategiami zdominowanymi, a strategia C jest strategią dominującą (tak jak w przykładzie (e)).

Dla gracza 1 strategią zdominowaną jest strategia A (zawsze gorsza niż strategia C). Gracz 1 nie ma jednak strategii dominującej (strategia C nie jest zawsze lepsza niż strategia B i na odwrót).

(g)

Gracz 2 Gracz 1	Strategia A	Strategia B	Strategia C
Strategia D	(5; –2)	(2; –1)	(6; –4)
Strategia E	(4; –6)	(1; –1)	(0; –5)
Strategia F	(0; –3)	(1; –5)	(4; –4)

Dla gracza 1 strategią dominującą jest strategia D. Strategie E i F są strategiami zdominowanymi.

Gracz 2 nie ma strategii dominującej. Strategią zdominowaną gracza 2 jest strategia C, która jest zdominowana łącznie przez strategie A i B:

- ✓ **gdy gracz 1 zagra D, dla gracza 2 lepsze od strategii C są strategie A i B;**
- ✓ **gdy gracz 1 zagra E, dla gracza 2 lepsza od strategii C jest strategia B;**
- ✓ **gdy gracz 1 zagra F, dla gracza 2 lepsza od strategii C jest strategia A.**

Powyższe przykłady powinny ułatwić zrozumienie wyznaczania strategii dominujących i strategii zdominowanych.

Co jednak zrobić z taką sytuacją, gdy jakaś strategia nie jest strategią dominującą, a jednocześnie pozwala na osiągnięcie graczowi najwyższych wypłat, niezależnie od decyzji, jaką podjął przeciwnik?

Spójrzmy na przykład na poniższą grę:

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia C	Strategia D
Strategia A	(5; 2)	(6; 1)
Strategia B	(4; 3)	(6; 1)

Dla gracza 2 strategia C jest strategią dominującą, zaś strategia D jest strategią zdominowaną.

Natomiast dla gracza 1:

- ✓ **strategia A jest lepsza niż B, jeżeli gracz 2 zagrał C;**
  ale:
- ✓ **strategia A jest taka sama jak B, jeżeli gracz 2 zagrał D.**

Najwyższy czas dokonać odpowiedniego podziału strategii dominujących i strategii zdominowanych.

MOCNA DOMINACJA
I SŁABA DOMINACJA

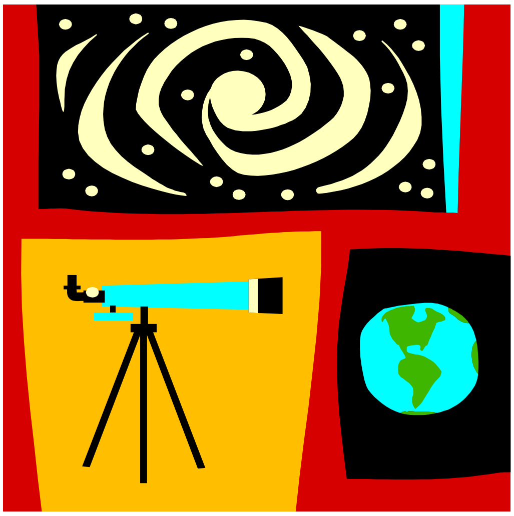
W przykładach (a) – (g) mieliśmy do czynienia tylko z mocną dominacją. Strategie określane dotychczas jako dominujące były w domyśle strategiami mocnodominującymi, zaś strategie określane dotychczas jako zdominowane były w domyśle strategiami mocnozdominowanymi.

Teraz nauczymy się wyznaczać strategie słabodominujące oraz strategie słabozdominowane.

Strategia słabodominująca to taka strategia, dla której nie istnieje strategia lepsza przy dowolnej decyzji, jaką podjąłby drugi gracz.

Strategia słabozdominowana to taka strategia, dla której istnieje(ą) strategia(e), która(e) jest(są) zawsze niegorsza(e), niezależnie od decyzji, jaką podejmie drugi gracz.

Lepsze zrozumienie pojęć mocnej i słabej dominacji ułatwią poniższe przykłady.



(h)

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia C	Strategia D
Strategia A	(5; 2)	(6; 1)
Strategia B	(4; 3)	(6; 1)

W przykładzie tym występuje mocna i słaba dominacja.

Dla gracza 2 strategia C jest strategią mocnodominującą (2 > 1 i 3 > 1), zaś strategia D jest strategią mocnozdominowaną (1 < 2 i 1 < 3).

Natomiast dla gracza 1 strategia A jest strategią słabodominującą (5 ≥ 4 i 6 ≥ 6), zaś strategia B jest strategią słabozdominowaną (4 ≤ 5 i 6 ≤ 6).

(i) (Przykład gry dwuetapowej)

Wacek \ Pacek	TT	TN	NT	NN
Przedsięwzięcie A	(4; 2)	(4; 2)	(0; 3)	(0; 3)
Przedsięwzięcie B	(3; 4)	(1; 2)	(3; 4)	(1; 2)

Wacek nie ma ani strategii dominującej ani zdominowanej (zarówno mocno- jak i słabo).

Dla Packa:

- ✓ **strategia NT** jest **strategią słabodominującą** ($3 \geq 2$, $3 \geq 2$, $3 \geq 3$ oraz $4 \geq 4$, $4 \geq 2$, $4 \geq 2$);
- ✓ **strategia TN** jest **strategią słabozdominowaną** ($2 \leq 2$, $2 \leq 3$, $2 \leq 3$ oraz $2 \leq 4$, $2 \leq 4$, $2 \leq 2$).

(j)

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia D	Strategia E	Strategia F
Strategia A	(5; 11)	(3; 10)	(4; 7)
Strategia B	(5; 4)	(3; 9)	(2; 4)
Strategia C	(4; 2)	(2; 3)	(3; 8)

Dla gracza 1:

- ✓ **strategia A jest strategią słabodominującą (5 ≥ 5 i 5 ≥ 4; 3 ≥ 3 i 3 ≥ 2; 4 ≥ 2 i 4 ≥ 3);**
- ✓ **strategia B jest strategią słabozdominowaną przez strategię A (5 ≤ 5; 3 ≤ 3; 2 ≤ 4);**
- ✓ **strategia C jest strategią mocnozdominowaną:**
  - o **jeżeli gracz 2 wybierze D lub E, to strategie A i B są dla gracza 1 lepsze od strategii C;**
  - o **jeżeli gracz 2 wybierze F, to strategia A jest dla gracza 1 lepsza od strategii C.**

Gracz 2 nie ma ani strategii dominującej ani strategii zdominowanej (zarówno mocno- jak i słabo).

RÓWNOWAGA NASHA

Równowaga Nasha (zwana po prostu równowagą) to takie pary strategii, które są najlepszymi odpowiedziami na siebie nawzajem.

Gdy w grze zostanie osiągnięta równowaga Nasha, żaden z graczy nie może poprawić swojego wyniku poprzez jednostronną zmianę wybranej strategii.

W jednej grze może być kilka równowag Nasha.

W „dylemacie więźnia" Wacek i Pacek mieli strategię dominującą „przyznać się". Równowagą Nasha w tej grze będzie zatem kombinacja („przyznać się", „przyznać się").

Gdy obaj gracze przyznają się do winy, żaden z nich nie zwiększyłby swojej wypłaty zmieniając jednostronnie strategię i nie przyznając się do winy. Jeżeli bowiem Wacek przyzna się do winy, najlepszą odpowiedzią Packa jest także „przyznać się" i na odwrót, jeżeli Pacek przyzna się do winy, najlepszą odpowiedzią Wacka jest również przyznanie się do winy.

Równowaga Nasha nie oznacza tego, że obaj gracze osiągają największe możliwe wypłaty.

Uważny czytelnik zauważy przecież, że gdyby obaj gracze nie przyznali się do winy, uzyskaliby wyższe wypłaty niż przyznając się do winy. Takie rozwiązanie nie jest jednak równowagą Nasha – zakłada ono współpracę obu graczy i wybór przez nich strategii zdominowanych. Na tym etapie takie rozwiązanie pomijamy.

W „dylemacie więźnia" znaleźliśmy już równowagę Nasha. Jest nią para strategii („przyznać się", „przyznać się"). W równowadze obaj gracze zostają aresztowani na 5 miesięcy więzienia.

Na przykładzie poniższej gry przedstawimy procedurę, która pozwoli łatwo znaleźć równowagę (równowagi) Nasha w innych grach.

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia D	Strategia E	Strategia F
Strategia A	10; 12	1; 9	5; 1
Strategia B	2; 6	3; 8	4; 7
Strategia C	6; 7	1; 8	4; 6

KROK 1 **Dla każdej strategii gracza 2 kółkiem oznaczmy najlepszą strategię (odpowiedź) gracza 1.**

W naszym przypadku:

- **gdy gracz 2 wybrał strategię D, gracz 1 powinien wybrać strategię A;**
- **gdy gracz 2 wybrał strategię E, gracz 1 powinien wybrać strategię B;**
- **gdy gracz 2 wybrał strategię F, gracz 1 powinien wybrać strategię A.**

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia D	Strategia E	Strategia F
Strategia A	10; 12	1; 9	5; 1
Strategia B	2; 6	3; 8	4; 7
Strategia C	6; 7	1; 8	4; 6

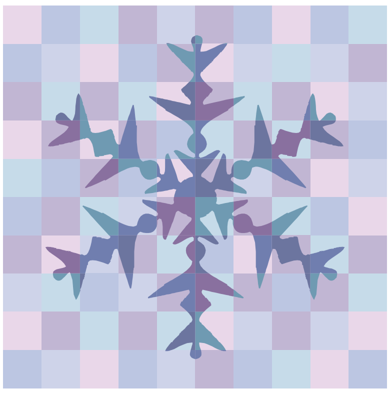
KROK 2

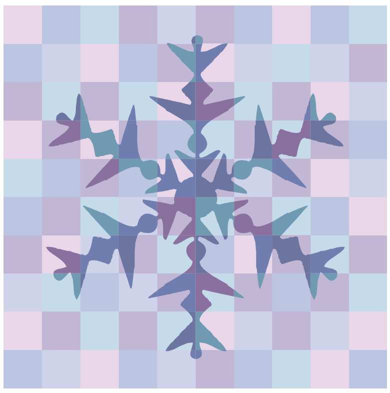
Dla każdej strategii gracza 1 kwadratem oznaczmy najlepszą strategię (odpowiedź) gracza 2.

W naszym przypadku:

- **gdy gracz 1 wybrał strategię A, gracz 2 powinien wybrać strategię D;**
- **gdy gracz 1 wybrał strategię B, gracz 2 powinien wybrać strategię E;**
- **gdy gracz 1 wybrał strategię C, gracz 2 powinien wybrać strategię E.**

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia D	Strategia E	Strategia F
Strategia A	10; 12	1; 9	5; 1
Strategia B	2; 6	3; 8	4; 7
Strategia C	6; 7	1; 8	4; 6





KROK 3

Równowagami Nasha będą te komórki tabeli (a co za tym idzie – odpowiadające im pary strategii), w których będzie kółko i kwadrat.

W naszym przypadku występują dwie równowagi Nasha:

- **gracz 1 wybiera strategię A, a gracz 2 – strategię D (wypłaty wynoszą 10 dla gracza 1 oraz 12 dla gracza 2);**
- **gracz 1 wybiera strategię B, a gracz 2 – strategię E (wypłaty wynoszą 3 dla gracza 1 oraz 8 dla gracza 2).**

Gracz 1 \ Gracz 2	Strategia D	Strategia E	Strategia F
Strategia A	10; 12	1; 9	5; 1
Strategia B	2; 6	3; 8	4; 7
Strategia C	6; 7	1; 8	4; 6

Równowagi Nasha

W równowadze Nasha wybór przez jednego z graczy danej strategii jest najlepszą odpowiedzią na strategię drugiego gracza i na odwrót, strategia drugiego gracza jest najlepszą odpowiedzią na strategię pierwszego gracza.

W naszym przykładzie jedna z dwóch równowag Nasha jest dla obu graczy gorsza. Postępujący rozsądnie gracze powinni wybrać równowagę („A", „D"), zamiast równowagi („B", „E"). Niemniej jednak („B", „E") jest również równowagą Nasha: jeżeli gracz 1 wybierze strategię B, to gracz 2 wybierze przecież strategię E i na odwrót, jeżeli gracz 2 wybierze E, to gracz 1, żeby zmaksymalizować wypłatę, powinien wybrać B.

Poniżej przedstawiamy równowagi Nasha dla gier z przykładów (b) – (j). Kółkami i kwadracikami oznaczyliśmy najlepsze odpowiedzi odpowiednio pierwszego i drugiego gracza na poszczególne strategie przeciwnika, zaś na żółto w pogrubionej ramce oznaczyliśmy te komórki tabeli, w których występuje równowaga Nasha.

(b)

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia A	Strategia B
Strategia A	5; 7	**6; $\boxed{9}$**
Strategia B	3; 4	4; $\boxed{5}$

(c)

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia A	Strategia B
Strategia A	5; 7	**6; $\boxed{9}$**
Strategia B	6; 4	4; $\boxed{5}$

(d)

Gracz 1 \ Gracz 2	Strategia C	Strategia D
Strategia A	5; $\boxed{7}$	6; 6
Strategia B	6; 4	4; $\boxed{5}$

W tej grze **nie występuje** równowaga Nasha w dotychczas zdefiniowanej postaci. W tej grze będzie występować równowaga Nasha w strategiach mieszanych (zob. część „strategie czyste i strategie mieszane").

(e)

Gracz 1 \ Gracz 2	Strategia A	Strategia B	Strategia C
Strategia A	2; 1	2; 4	–2; $\boxed{8}$
Strategia B	5; –2	7; 5	1; $\boxed{6}$
Strategia C	4; 5	3; 8	0; $\boxed{9}$

(f)

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia A	Strategia B	Strategia C
Strategia A	2; 1	2; 4	–2; $\boxed{8}$
Strategia B	1; –2	7; 5	–1; $\boxed{6}$
Strategia C	4; 5	3; 8	1; $\boxed{9}$

(g)

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia A	Strategia B	Strategia C
Strategia D	5; –2	2; $\boxed{–1}$	6; –4
Strategia E	4; –6	1; $\boxed{–1}$	0; –5
Strategia F	0; $\boxed{–3}$	1; –5	4; –4

(h)

Gracz 1 \ Gracz 2	Strategia C	Strategia D
Strategia A	5; 2	6; 1
Strategia B	4; 3	6; 1

(i)

Wacek \ Pacek	TT	TN	NT	NN
Przedsięwzięcie A	4; 2	4; 2	0; 3	0; 3
Przedsięwzięcie B	3; 4	1; 2	3; 4	1; 2

(j)

Gracz 1 \ Gracz 2	Strategia D	Strategia E	Strategia F
Strategia A	5; 11	3; 10	4; 7
Strategia B	5; 4	3; 9	2; 4
Strategia C	4; 2	2; 3	3; 8

I jeszcze dwie gry, w których żaden z graczy nie ma strategii dominującej, a równowaga Nasha występuje:

(k)

Gracz 1 \ Gracz 2	Strategia A	Strategia B
Strategia A	1; $\boxed{4}$	4; 1
Strategia B	0; 2	5; $\boxed{3}$

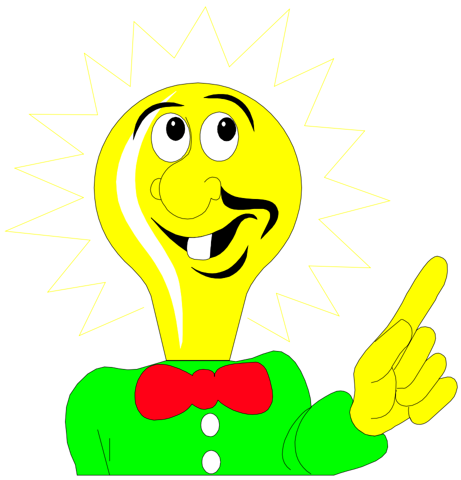
(l)

Gracz 1 \ Gracz 2	Strategia A	Strategia B	Strategia C
Strategia A	40; $\boxed{40}$	15; 35	70; 30
Strategia B	50; 10	20; $\boxed{20}$	60; 10
Strategia C	60; 30	15; 35	50; $\boxed{50}$

STRATEGIE CZYSTE I STRATEGIE MIESZANE

Dotychczas każdy z graczy dokonywał wyboru danej strategii z całkowitą pewnością. Stosował zatem strategie czyste. Uzyskane w taki sposób równowagi Nasha noszą nazwę równowag Nasha w strategiach czystych.

W odróżnieniu od strategii czystych, strategie mieszane zakładają, że gracze w sposób losowy decydują o wyborze jednej ze swoich strategii czystych. Równowagami Nasha w strategiach mieszanych będziemy określać takie równowagi, w których gracze stosują strategie mieszane.



Wróćmy do przykładu (d):

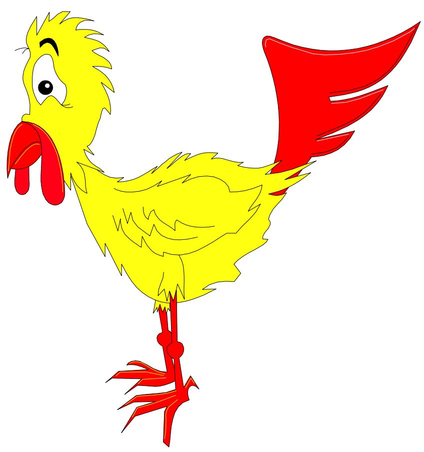
(d)

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia C	Strategia D
Strategia A	5; 7	6; 6
Strategia B	6; 4	4; 5

Jak wykazaliśmy, w tej grze nie występuje równowaga Nasha w strategiach czystych.

Na przykład, jeżeli gra rozpoczęła się kombinacją (strategia A, strategia C), to gracz 1 może zwiększyć swe zyski zmieniając strategię na strategię B; jeżeli jednak gracz 1 gra strategię B, to gracz 2 będzie grał strategię D, co z kolei zmusi gracza 1 do powrotu do strategii A; gracz 2 wybierze wówczas strategię C i gra znajdzie się w punkcie wyjścia.

Jeżeli nie występuje równowaga Nasha w strategiach czystych, gracze muszą stosować strategie mieszane. Strategie mieszane polegają na tym, że gracze w sposób losowy z określonym prawdopodobieństwem wybierają swoje strategie czyste.



Poniżej przedstawiamy kilka strategii mieszanych dla gracza 1 z przykładu (d):

1

Strategia	A	B
Prawdopodobieństwo użycia	$^1/_2$	$^1/_2$

2

Strategia	A	B
Prawdopodobieństwo użycia	$^1/_3$	$^2/_3$

3

Strategia	A	B
Prawdopodobieństwo użycia	$^3/_4$	$^1/_4$

W pierwszym przypadku strategie A i B są stosowane przez gracza 1 z prawdopodobieństwem 0,5.

W drugim przypadku strategia A jest stosowana przez gracza 1 z prawdopodobieństwem $^1/_3$, a strategia B z prawdopodobieństwem $^2/_3$.

W trzecim przypadku strategia A jest stosowana przez gracza 1 z prawdopodobieństwem $^3/_4$, a strategia B z prawdopodobieństwem $^1/_4$.

Jakie powinny być wartości przyjętego prawdopodobieństwa, aby w grze można było osiągnąć równowagę Nasha w strategiach mieszanych?

Reguła jest następująca:

Przyjęte przez jednego z graczy wartości prawdopodobieństwa muszą być takie, że wielkości wypłat drugiego gracza zrównają się dla każdej z czystych strategii należących do zbioru jego możliwych posunięć.

Oznaczmy przez p_A prawdopodobieństwo zastosowania przez gracza 1 strategii A, zaś przez $p_B = 1 - p_A$ prawdopodobieństwo zastosowania przez gracza 1 strategii B. Gracz 1 musi tak dobrać wartość p_A, żeby graczowi 2 było obojętne czy stosuje strategię C czy strategię D. A zatem oczekiwana wypłata gracza 2 z tytułu zastosowania strategii C musi się zrównać z oczekiwaną wypłatą, jaką gracz 2 osiągnie dzięki zastosowaniu strategii D.

Oczekiwana wypłata gracza 2 ze strategii C wynosi:

$$7p_A + 4(1 - p_A) \qquad [1]$$

Oczekiwana wypłata gracza 2 ze strategii D wynosi:

$$6p_A + 5(1 - p_A) \qquad [2]$$

Po przyrównaniu [1] do [2] otrzymujemy:

$$7p_A + 4 - 4p_A = 6p_A + 5 - 5p_A$$
$$3p_A + 4 = p_A + 5$$
$$2p_A = 1$$
$$p_A = {}^1/_2 \quad \text{oraz} \quad p_B = 1 - p_A = {}^1/_2$$

Żeby osiągnąć równowagę Nasha, gracz 1 powinien stosować strategię A z prawdopodobieństwem $^1/_2$ i strategię B również z prawdopodobieństwem $^1/_2$. Jest to zatem optymalna strategia mieszana gracza 1. Graczowi 2 jest wówczas obojętne, którą strategię wybierze. Dla gracza 2 oczekiwane wypłaty z obu strategii są bowiem takie same.

Oczekiwana wypłata gracza 2 ze strategii C wynosi:

$$7 \cdot {}^1/_2 + 4 \cdot {}^1/_2 = {}^7/_2 + {}^4/_2 = {}^{11}/_2 = 5{,}5$$

Oczekiwana wypłata gracza 2 ze strategii D wynosi:

$$6 \cdot {}^1/_2 + 5 \cdot {}^1/_2 = {}^6/_2 + {}^5/_2 = {}^{11}/_2 = 5{,}5$$

W analogiczny sposób ustalamy strategię mieszaną zapewniającą równowagę dla gracza 2.

Oznaczmy przez p_C prawdopodobieństwo zastosowania przez gracza 2 strategii C, zaś przez $p_D = 1 - p_C$ prawdopodobieństwo zastosowania przez gracza 2 strategii D. Gracz 2 musi tak dobrać wartość p_C, żeby graczowi 1 było obojętne czy stosuje strategię A czy B. A zatem oczekiwana wypłata gracza 1 ze strategii A musi się zrównać z oczekiwaną wypłatą gracza 1 ze strategii B.

Oczekiwana wypłata gracza 1 ze strategii A wynosi:

$$\mathbf{5}p_C + \mathbf{6}(\mathbf{1} - p_C) \qquad [3]$$

Oczekiwana wypłata gracza 1 ze strategii B wynosi:

$$\mathbf{6}p_C + \mathbf{4}(\mathbf{1} - p_C) \qquad [4]$$

Po przyrównaniu [3] do [4] otrzymujemy:

$$5p_C + 6 - 6p_C = 6p_C + 4 - 4p_C$$
$$-3p_C = -2$$
$$p_C = {}^2/_3 \quad \text{oraz} \quad p_D = 1 - p_C = {}^1/_3$$

Żeby osiągnąć równowagę Nasha, gracz 2 powinien stosować strategię C z prawdopodobieństwem $^2/_3$ i strategię D z prawdopodobieństwem $^1/_3$. Jest to optymalna strategia mieszana gracza 2. Graczowi 1 jest wówczas obojętne, którą strategię wybierze: oczekiwane wypłaty ze strategii A i B są takie same.

Oczekiwana wypłata gracza 1 ze strategii A wynosi:

$$5\cdot{}^2/_3 + 6\cdot{}^1/_3 = {}^{10}/_3 + {}^6/_3 = {}^{16}/_3 = 5\,{}^1/_3$$

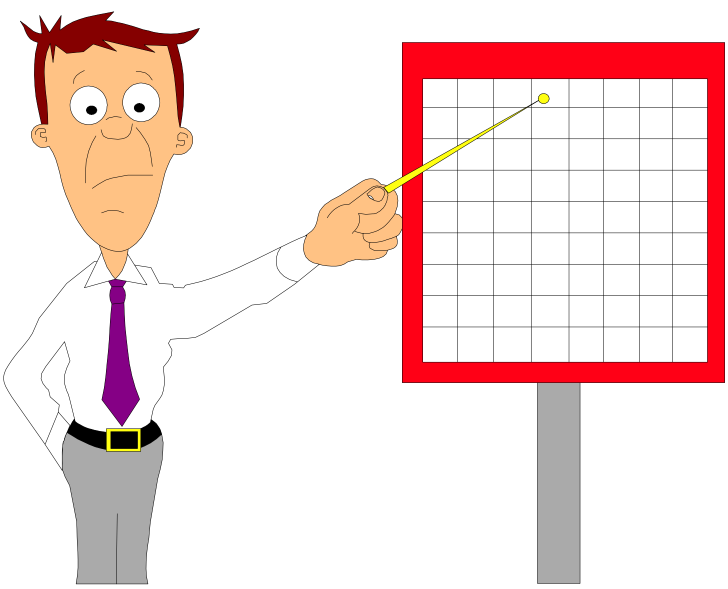
Oczekiwana wypłata gracza 1 ze strategii B wynosi:

$$6\cdot{}^2/_3 + 4\cdot{}^1/_3 = {}^{12}/_3 + {}^4/_3 = {}^{16}/_3 = 5\,{}^1/_3$$

Strategię mieszaną zapewniającą równowagę oraz oczekiwane wypłaty obu graczy zapisujemy w następujący sposób:

		$(p = {}^{2}/_{3})$	$(p = {}^{1}/_{3})$	
	Gracz 2 / Gracz 1	Strategia C	Strategia D	Oczekiwana wypłata gracza 1
$(p = {}^{1}/_{2})$	Strategia A	5; 7	6; 6	$5^{1}/_{3}$
$(p = {}^{1}/_{2})$	Strategia B	6; 4	4; 5	$5^{1}/_{3}$
	Oczekiwana wypłata gracza 2	$5^{1}/_{2}$	$5^{1}/_{2}$	

Jeżeli gracz 1 będzie stosował strategię A z prawdopodobieństwem równym ${}^{1}/_{2}$ i strategię B z prawdopodobieństwem ${}^{1}/_{2}$, a gracz 2 będzie stosował strategię C z prawdopodobieństwem równym ${}^{2}/_{3}$ i strategię D z prawdopodobieństwem ${}^{1}/_{3}$, w grze zostanie osiągnięta równowaga Nasha w strategiach mieszanych. Oczekiwana wypłata gracza 1 będzie wynosiła $5^{1}/_{3}$, a oczekiwana wypłata gracza 2 będzie wynosiła $5^{1}/_{2}$.



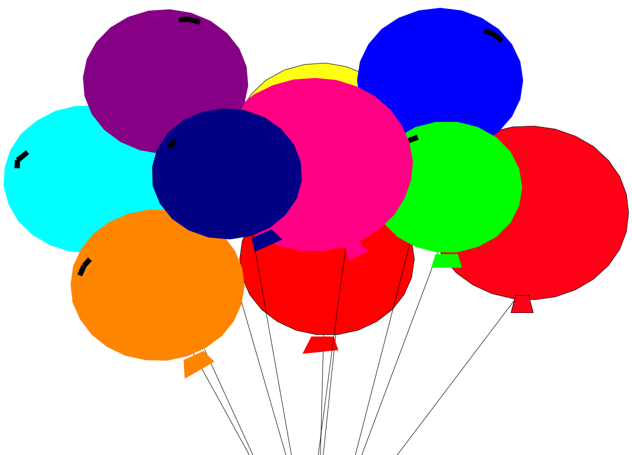
W równowadze Nasha w strategiach mieszanych (podobnie jak w równowadze Nasha w strategiach czystych) żaden z graczy nie może zwiększyć swojej oczekiwanej wypłaty zmieniając jednostronnie swoją strategię (w tym przypadku – strategię mieszaną).

Dopóki gracz 2 realizuje optymalną strategię mieszaną z prawdopodobieństwami ${}^{2}/_{3}$ i ${}^{1}/_{3}$, każda strategia gracza 1 (zarówno czysta, jak i mieszana) przyniesie graczowi 1 taką samą oczekiwaną wypłatę równą $5\,{}^{1}/_{3}$:

Przyjęta strategia mieszana przez gracza 1		Oczekiwana wypłata gracza 1
Prawdo-podobieństwo użycia stra-tegii czystej	Strategia czysta	
1 0	A B	$1 \cdot 5\,{}^{1}/_{3} + 0 \cdot 5\,{}^{1}/_{3} = 5\,{}^{1}/_{3}$
${}^{1}/_{2}$ ${}^{1}/_{2}$	A B	${}^{1}/_{2} \cdot 5\,{}^{1}/_{3} + {}^{1}/_{2} \cdot 5\,{}^{1}/_{3} = 5\,{}^{1}/_{3}$
${}^{2}/_{3}$ ${}^{1}/_{3}$	A B	${}^{2}/_{3} \cdot 5\,{}^{1}/_{3} + {}^{1}/_{3} \cdot 5\,{}^{1}/_{3} = 5\,{}^{1}/_{3}$
0 1	A B	$0 \cdot 5\,{}^{1}/_{3} + 1 \cdot 5\,{}^{1}/_{3} = 5\,{}^{1}/_{3}$

Podobnie, dopóki gracz 1 realizuje optymalną strategię mieszaną z prawdopodobieństwami $^1/_2$ i $^1/_2$, każda strategia gracza 2 (zarówno czysta, jak i mieszana) przyniesie graczowi 2 taką samą oczekiwaną wypłatę równą $5^1/_2$:

Przyjęta strategia mieszana przez gracza 2		Oczekiwana wypłata gracza 2
Prawdo-podobieństwo użycia stra-tegii czystej	Strategia czysta	
1 0	C D	$1\cdot5^1/_2 + 0\cdot5^1/_2 = 5^1/_2$
$^1/_2$ $^1/_2$	C D	$^1/_2\cdot5^1/_2 + {}^1/_2\cdot5^1/_2 = 5^1/_2$
$^2/_3$ $^1/_3$	C D	$^2/_3\cdot5^1/_2 + {}^1/_3\cdot5^1/_2 = 5^1/_2$
0 1	C D	$0\cdot5^1/_2 + 1\cdot5^1/_2 = 5^1/_2$



UWAGA: Nie należy rezygnować ze swojej strategii mieszanej zapewniającej równowagę.

Jeżeli dany gracz zrezygnuje ze swojej strategii mieszanej zapewniającej równowagę, mądry przeciwnik to wykorzysta i będzie stosował taką strategię, dzięki której osiągnie większą oczekiwaną wypłatę.

Wróćmy do przykładu (d):

Jeżeli gracz 2 będzie stosował strategie czyste C i D, obie z prawdopodobieństwami $^1/_2$ (a więc strategię mieszaną nie prowadzącą do równowagi), oczekiwane wypłaty dla gracza 1 wyniosą:

- **ze strategii A:**

$$5\cdot{}^1/_2 + 6\cdot{}^1/_2 = {}^5/_2 + {}^6/_2 = {}^{11}/_2 = 5^1/_2$$

- **ze strategii B:**

$$6\cdot{}^1/_2 + 4\cdot{}^1/_2 = {}^6/_2 + {}^4/_2 = {}^{10}/_2 = 5$$

A zatem gracz 1 będzie stosował strategię czystą A z całkowitą pewnością, gdyż osiągnie dzięki temu oczekiwaną wypłatę równą $5^1/_2$, a więc większą od wypłaty równej $5^1/_3$ osiągniętej z zastosowania strategii mieszanej prowadzącej do równowagi oraz większą od wypłaty równej 5 osiągniętej z zastosowania strategii czystej B.

Podsumowanie:

W każdej grze (o skończonej liczbie graczy i ruchów) istnieje co najmniej jedna równowaga Nasha. Jeżeli nie ma równowagi w strategiach czystych, to na pewno występuje równowaga Nasha w strategiach mieszanych. Może się też zdarzyć, że w jakiejś grze występują zarówno równowagi Nasha w strategiach czystych, jak i mieszanych.

Każda gra 2×2 ma jeden z wymienionych poniżej układów równowag:

(a) jedną równowagę,
(b) trzy równowagi (dwie w strategiach czystych i jedną w strategiach mieszanych),
(c) dwie równowagi (obie w strategiach czystych),
(d) nieskończenie wiele równowag, w tym dwie, trzy lub cztery w strategiach czystych.

Poniżej podajemy optymalne strategie mieszane prowadzące do równowagi dla kilku innych przykładów. x oznacza prawdopodobieństwo stosowania przez gracza 1 strategii A, a y – prawdopodobieństwo stosowania przez gracza 2 strategii A lub C.

(m)

Gracz 1 \ Gracz 2	Strategia A	Strategia B
Strategia A	1; 4	2; 6
Strategia B	0; 8	10; 7

$$4x + 8(1 - x) = 6x + 7(1 - x) \qquad 1y + 2(1 - y) = 0y + 10(1 - y)$$
$$x = {}^1/_3 \quad \text{oraz} \quad 1 - x = {}^2/_3 \qquad y = {}^8/_9 \quad \text{oraz} \quad 1 - y = {}^1/_9$$

W tej grze nie występuje równowaga Nasha w strategiach czystych. Występuje równowaga Nasha w strategiach mieszanych – gracz 1 powinien stosować swoje strategie czyste z prawdopodobieństwami odpowiednio ${}^1/_3$ i ${}^2/_3$, zaś gracz 2 powinien stosować swoje strategie czyste z prawdopodobieństwami odpowiednio ${}^8/_9$ i ${}^1/_9$.

		($p = {}^8/_9$)	($p = {}^1/_9$)	
	Gracz 1 \ Gracz 2	Strategia A	Strategia B	Oczekiwana wypłata gracza 1
($p = {}^1/_3$)	Strategia A	1; $\boxed{4}$ → 1; 4	2; $\boxed{6}$	$1^1/_9$
($p = {}^2/_3$)	Strategia B	0; $\boxed{8}$	10; 7	$1^1/_9$
	Oczekiwana wypłata gracza 2	$6^2/_3$	$6^2/_3$	

(n)

Gracz 1 \ Gracz 2	Strategia C	Strategia D
Strategia A	4; 7	0; 1
Strategia B	2; 2	3; 9

$$7x + 2(1 - x) = 1x + 9(1 - x) \qquad 4y + 0(1 - y) = 2y + 3(1 - y)$$
$$x = {}^{7}/_{13} \quad \text{oraz} \quad 1 - x = {}^{6}/_{13} \qquad y = {}^{3}/_{5} \quad \text{oraz} \quad 1 - y = {}^{2}/_{5}$$

W tej grze występują 2 równowagi Nasha w strategiach czystych:

- **„strategia A, strategia C" → gracz 1 otrzymuje wypłatę równą 4, a gracz 2 – wypłatę równą 7;**
- **„strategia B, strategia D" → gracz 1 otrzymuje wypłatę równą 3, a gracz 2 – wypłatę równą 9.**

Występuje także równowaga Nasha w strategiach mieszanych:

- **gracz 1 powinien stosować swoje strategie czyste z prawdopodobieństwami odpowiednio ${}^{7}/_{13}$ i ${}^{6}/_{13}$, zaś gracz 2 powinien stosować swoje strategie czyste z prawdopodobieństwami odpowiednio ${}^{3}/_{5}$ i ${}^{2}/_{5}$.**

		($p = {}^{3}/_{5}$)	($p = {}^{2}/_{5}$)	
	Gracz 1 \ Gracz 2	Strategia C	Strategia D	Oczekiwana wypłata gracza 1
($p = {}^{7}/_{13}$)	Strategia A	4; 7	0; 1	$2^{2}/_{5}$
($p = {}^{6}/_{13}$)	Strategia B	2; 2	3; 9	$2^{2}/_{5}$
	Oczekiwana wypłata gracza 2	$4^{9}/_{13}$	$4^{9}/_{13}$	

(o)

Gracz 1 \ Gracz 2	Strategia A	Strategia B
Strategia A	6; 5	4; 3
Strategia B	7; 2	8; 1

$$5x + 2(1-x) = 3x + 1(1-x) \qquad 6y + 4(1-y) = 7y + 8(1-y)$$
$$x = -1 \quad \text{oraz} \quad 1 - x = 2 \qquad y = {}^{4}/_{3} \quad \text{oraz} \quad 1 - y = -{}^{1}/_{3}$$

W tej grze istnieje tylko równowaga Nasha w strategiach czystych. Jest nią para strategii („strategia B", „strategia A"). Gracz 1 osiąga wypłatę równą 7, a gracz 2 osiąga wypłatę równą 2.

W tej grze <u>nie występuje</u> natomiast równowaga Nasha w strategiach mieszanych. Obliczone wartości *x* i *y* <u>nie mogą być</u> prawdopodobieństwami – wartości prawdopodobieństw dla dowolnych zdarzeń <u>muszą</u> zawierać się w przedziale <0;1>.

Gracz 1 \ Gracz 2	Strategia A	Strategia B
Strategia A	6; $\boxed{5}$	4; 3
Strategia B	7; $\boxed{2}$	8; 1

POSTĘPOWANIE OPTYMALNE GRACZY

Jakie działanie, najlepiej służące osiągnięciu jego celów, powinien podjąć gracz, kiedy rywalizuje z innym graczem, którego postępowanie jest podporządkowane własnym interesom?

Teoria gier dostarcza następującej odpowiedzi:

W sytuacjach, w których konkurenci podejmują działania niezależnie od siebie (a zatem niemożliwa jest zmowa), każdy gracz powinien stosować strategię zapewniającą osiągnięcie równowagi. Strategia zapewniająca równowagę pozwala zmaksymalizować wielkość wypłaty każdego z graczy w warunkach określonych przez wybór strategii dokonany przez przeciwnika.

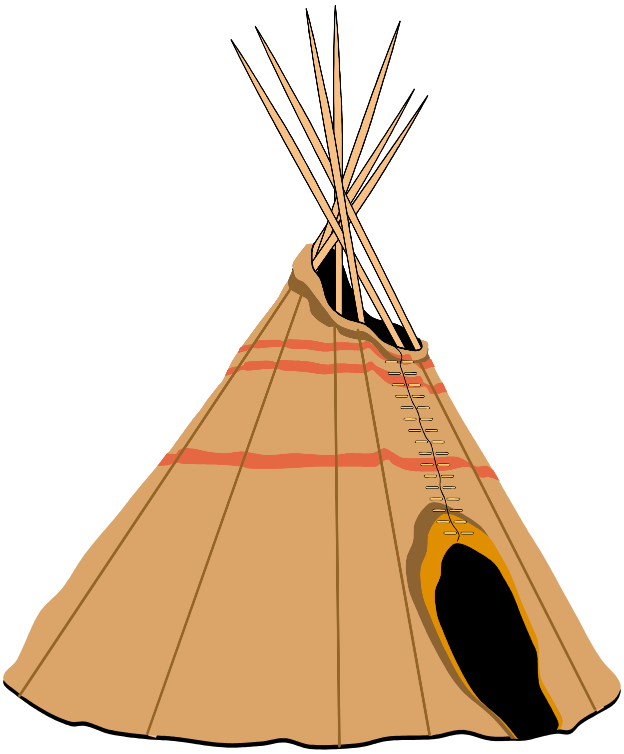
Reguła powyższa oznacza, że każdy z graczy powinien wybrać strategię zapewniającą równowagę Nasha. Jeżeli jest kilka równowag Nasha, nie ma powszechnie stosowanej reguły dotyczącej tego, którą z równowag należy wybrać. W następnej części przedstawimy jeden ze sposobów wyboru „najlepszej" równowagi. Trzeba jednak pamiętać, że wybór konkretnej równowagi często zależy także od merytorycznego opisu gry.

RÓWNOWAGA „NAJLEPSZA”

Jeżeli w grze występuje jedna równowaga Nasha, gracze powinni wybrać strategie zapewniające osiągnięcie tej jedynej równowagi.

Którą równowagę należy jednak wybrać, jeżeli w grze występuje więcej niż jedna równowaga?

Nie istnieje jednoznaczna odpowiedź na to pytanie. Powstało wiele prac na temat klasyfikacji równowag i sposobów wyboru najlepszej z nich, jednak żadna z tych prac nie została powszechnie zaakceptowana jako uniwersalny standard.



W tej części przedstawimy zaproponowany przez Harsányi'ego i Seltena sposób wyboru „najlepszej" równowagi dla gier 2×2, w których występują dwie równowagi w strategiach czystych położone na przekątnej tablicy wypłat oraz jedna równowaga w strategiach mieszanych. Przykładem są następujące gry:

(p)

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia C	Strategia D
Strategia A	17; 16	2; 4
Strategia B	6; 3	9; 11

(r)

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia C	Strategia D
Strategia A	12; 9	1; 2
Strategia B	3; 4	10; 17

(s)

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia C	Strategia D
Strategia A	99; 49	0; 0
Strategia B	0; 0	1; 51

W każdej z tych gier występują dwie równowagi Nasha w strategiach czystych i jedna równowaga Nasha w strategiach mieszanych (obliczeń nie będziemy już przedstawiać):

(p)

		$(p = {}^{7}/_{18})$	$(p = {}^{11}/_{18})$	
	Gracz 2 / Gracz 1	Strategia C	Strategia D	Oczekiwana wypłata gracza 1
$(p = {}^{2}/_{5})$	Strategia A	17; $\boxed{16}$	2; 4	$7^{5}/_{6}$
$(p = {}^{3}/_{5})$	Strategia B	6; 3	9; $\boxed{11}$	$7^{5}/_{6}$
	Oczekiwana wypłata gracza 2	$8^{1}/_{5}$	$8^{1}/_{5}$	

(r)

		$(p = {}^{1}/_{2})$	$(p = {}^{1}/_{2})$	
	Gracz 2 / Gracz 1	**Strategia C**	**Strategia D**	**Oczekiwana wypłata gracza 1**
$(p = {}^{13}/_{20})$	**Strategia A**	12; $\boxed{9}$	1; 2	$6^{1}/_{2}$
$(p = {}^{7}/_{20})$	**Strategia B**	3; 4	10; $\boxed{17}$	$6^{1}/_{2}$
	Oczekiwana wypłata gracza 2	$7^{1}/_{4}$	$7^{1}/_{4}$	

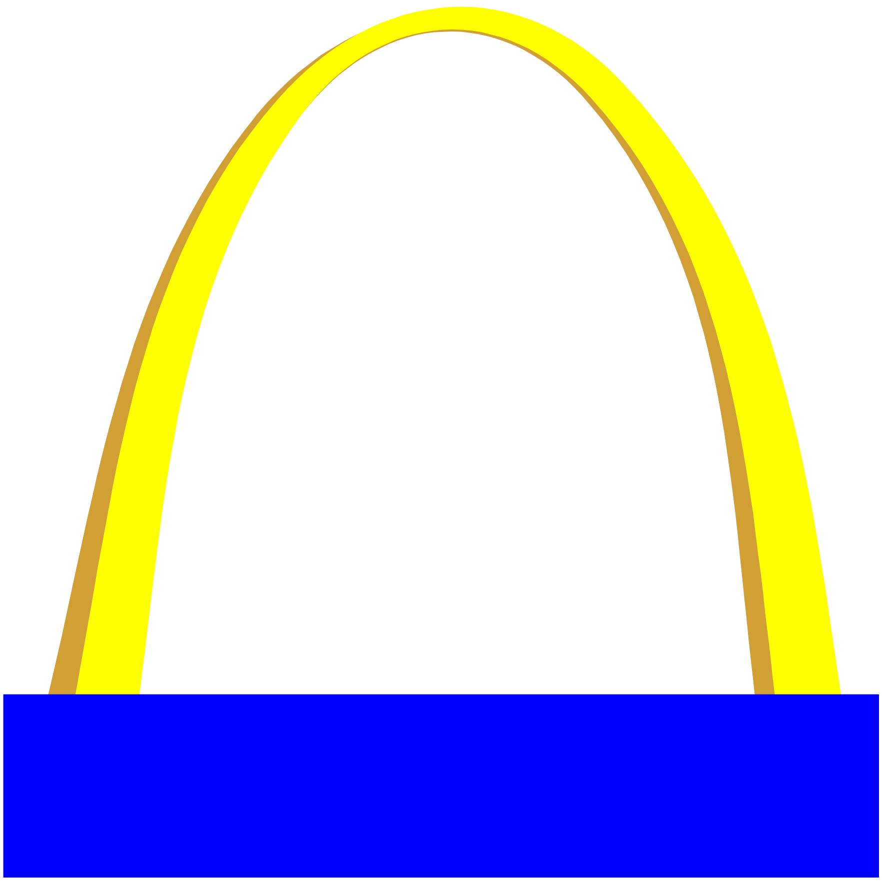
(s)

		$(p = {}^{1}/_{100})$	$(p = {}^{99}/_{100})$	
	Gracz 2 / Gracz 1	**Strategia C**	**Strategia D**	**Oczekiwana wypłata gracza 1**
$(p = {}^{51}/_{100})$	**Strategia A**	99; $\boxed{49}$	0; 0	${}^{99}/_{100}$
$(p = {}^{49}/_{100})$	**Strategia B**	0; 0	1; $\boxed{51}$	${}^{99}/_{100}$
	Oczekiwana wypłata gracza 2	$24^{99}/_{100}$	$24^{99}/_{100}$	

Reguła wyboru „najlepszej” równowagi zaproponowana przez Harsányi’ego i Seltena jest następująca:

a) **spośród wszystkich równowag gracze powinni wybrać równowagę dominującą ze względu na wypłaty;**

b) **jeżeli nie ma równowagi dominującej ze względu na wypłaty, gracze powinni wybrać równowagę dominującą ze względu na ryzyko.**



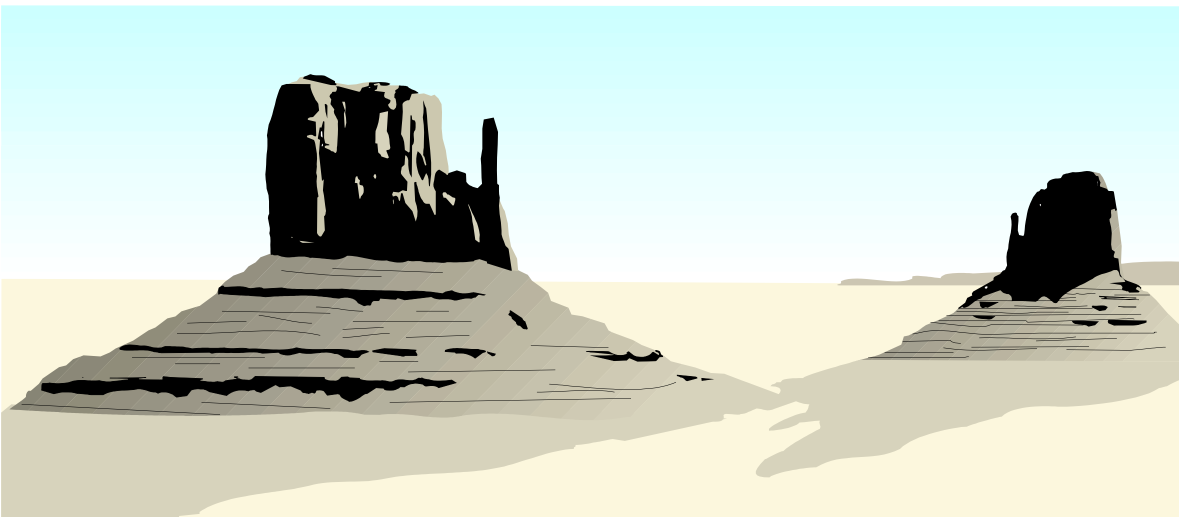
Równowaga dominująca ze względu na wypłaty to taka równowaga, w której wypłata każdego z graczy jest największa ze zbioru wypłat danego gracza we wszystkich równowag Nasha.

Tylko w grze z przykładu (p) istnieje równowaga dominująca ze względu na wypłaty. Jest nią równowaga w strategiach czystych: „strategia A, strategia C”. Gracz 1 osiąga wypłatę równą 17, a gracz 2 osiąga wypłatę równą 16.

Wypłata 17 dla gracza 1 jest większa zarówno od wypłaty 9 z równowagi w strategiach czystych „strategia B, strategia D”, jak również od oczekiwanej wypłaty $7^{5}/_{6}$ uzyskanej w równowadze Nasha w strategiach mieszanych.

Wypłata 16 dla gracza 2 jest większa zarówno od wypłaty 11 z równowagi w strategiach czystych „strategia B, strategia D”, jak również od oczekiwanej wypłaty $8^{1}/_{5}$ uzyskanej w równowadze Nasha w strategiach mieszanych.

W grach z przykładów (r) i (s) nie występuje równowaga dominująca ze względu na wypłaty (dla gracza 1 lepsza jest inna równowaga Nasha niż dla gracza 2). W tych grach należy znaleźć równowagę dominującą ze względu na ryzyko.



Równowaga dominująca ze względu na ryzyko to taka równowaga, która odznacza się najmniejszym ryzykiem związanym z wyborem poszczególnych strategii.

Przeanalizujmy przykład (r):

(r)

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia C	Strategia D
Strategia A	12; 9	1; 2
Strategia B	3; 4	10; 17

Załóżmy, że gracz 1 ocenia prawdopodobieństwo użycia strategii C przez gracza 2 na p, zaś prawdopodobieństwo użycia strategii D przez gracza 2 na $1 - p$. Oczekiwana wypłata gracza 1 wynosi wówczas:

$12p + 1(1 - p) = 11p + 1$ **przy użyciu strategii A,**
$3p + 10(1 - p) = -7p + 10$ **przy użyciu strategii B.**

Wartość oczekiwana wypłaty gracza 1 przy użyciu strategii A jest większa niż wartość oczekiwana wypłaty przy użyciu strategii B, jeżeli:

$$11p + 1 > -7p + 10$$
$$p > {}^{1}/_{2}$$

A zatem, jeśli tylko gracz 1 będzie oceniać prawdopodobieństwo użycia strategii C przez gracza 2 jako większe niż ${}^{1}/_{2}$, to użyje strategii A, mając nadzieję na osiągnięcie równowagi „strategia A, strategia C”.

Analogiczne rozumowanie przeprowadzamy dla gracza 2.

Załóżmy, że gracz 2 ocenia prawdopodobieństwo użycia strategii B przez gracza 1 na q, zaś prawdopodobieństwo użycia strategii A przez gracza 1 na $1 - q$. Oczekiwana wypłata gracza 2 wynosi wówczas:

$9(1 - q) + 4q = -5q + 9$ przy użyciu strategii C,
$2(1 - q) + 17q = 15q + 2$ przy użyciu strategii D.

Wartość oczekiwana wypłaty gracza 2 przy użyciu strategii D jest większa niż wartość oczekiwana wypłaty przy użyciu strategii C, jeżeli:

$$15q + 2 > -5q + 9$$
$$q > {}^{7}/_{20}$$

A zatem, jeśli tylko gracz 2 będzie oceniać prawdopodobieństwo użycia strategii B przez gracza 1 jako większe niż $^{7}/_{20}$, to użyje strategii D, mając nadzieję na osiągnięcie równowagi „strategia B, strategia D”.

Gracz 1 woli równowagę „strategia A, strategia C”. Żeby gracz 1 wybrał strategię A, prawdopodobieństwo użycia strategii C przez gracza 2 musi być większe niż $^{1}/_{2}$.

Gracz 2 woli równowagę „strategia B, strategia D”. Żeby gracz 2 wybrał strategię D, prawdopodobieństwo użycia strategii B przez gracza 1 musi być większe niż $^{7}/_{20}$.

Widzimy zatem, że gracz 2 ma poważniejsze powody by wybrać strategię D, niż gracz 1 strategię A ($^{7}/_{20} < {}^{1}/_{2}$). Obaj gracze o tym wiedzą i biorą to pod uwagę analizując postępowanie przeciwnika. Ponieważ gracz 2 ma poważniejsze powody by wybrać strategię D, gracze prawdopodobnie wybiorą równowagę „strategia B, strategia D”. Równowaga ta jest równowagą dominującą ze względu na ryzyko.

W podobny sposób znajdujemy równowagę dominującą ze względu na ryzyko dla przykładu (s):

(s)

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia C	Strategia D
Strategia A	99; 49	0; 0
Strategia B	0; 0	1; 51

Załóżmy, że gracz 1 ocenia prawdopodobieństwo użycia strategii C przez gracza 2 na p, zaś prawdopodobieństwo użycia strategii D przez gracza 2 na $1 - p$. Oczekiwana wypłata gracza 1 wynosi wówczas:

$99p + 0(1 - p) = 99p$ — **przy użyciu strategii A,**

$0p + 1(1 - p) = -p + 1$ — **przy użyciu strategii B.**

Wartość oczekiwana wypłaty gracza 1 przy użyciu strategii A jest większa niż wartość oczekiwana wypłaty przy użyciu strategii B, jeżeli:

$$99p > -p + 1$$
$$p > {}^{1}/_{100}$$

A zatem, jeśli tylko gracz 1 będzie oceniać prawdopodobieństwo użycia strategii C przez gracza 2 jako większe niż ${}^{1}/_{100}$, to użyje strategii A, mając nadzieję na osiągnięcie równowagi „strategia A, strategia C”.

Analogiczne rozumowanie przeprowadzamy dla gracza 2.

Załóżmy, że gracz 2 ocenia prawdopodobieństwo użycia strategii B przez gracza 1 na q, zaś prawdopodobieństwo użycia strategii A przez gracza 1 na $1 - q$. Oczekiwana wypłata gracza 2 wynosi wówczas:

$49(1 - q) + 0q = -49q + 49$ **przy użyciu strategii C,**
$0(1 - q) + 51q = 51q$ **przy użyciu strategii D.**

Wartość oczekiwana wypłaty gracza 2 przy użyciu strategii D jest większa niż wartość oczekiwana wypłaty przy użyciu strategii C, jeżeli:

$$51q > -49q + 49$$
$$q > {}^{49}/_{100}$$

A zatem, jeśli tylko gracz 2 będzie oceniać prawdopodobieństwo użycia strategii B przez gracza 1 jako większe niż $^{49}/_{100}$, to użyje strategii D, mając nadzieję na osiągnięcie równowagi „strategia B, strategia D".

Gracz 1 woli równowagę „strategia A, strategia C". Żeby gracz 1 wybrał strategię A, prawdopodobieństwo użycia strategii C przez gracza 2 musi być większe niż $^{1}/_{100}$.

Gracz 2 woli równowagę „strategia B, strategia D". Żeby gracz 2 wybrał strategię D, prawdopodobieństwo użycia strategii B przez gracza 1 musi być większe niż $^{49}/_{100}$.

Widzimy zatem, że gracz 1 ma poważniejsze powody by wybrać strategię A, niż gracz 2 strategię D ($^{1}/_{100} < {}^{49}/_{100}$). Obaj gracze o tym wiedzą i biorą to pod uwagę analizując postępowanie przeciwnika. Ponieważ gracz 1 ma poważniejsze powody by wybrać strategię A, gracze prawdopodobnie wybiorą równowagę „strategia A, strategia C". Równowaga ta jest równowagą dominującą ze względu na ryzyko.

Podamy teraz ogólny schemat znajdowania równowagi dominującej ze względu na ryzyko dla gier 2×2, w których występują dwie równowagi w strategiach czystych położone na głównej przekątnej tabeli (jeżeli równowagi występują na drugiej przekątnej tabeli, wystarczy tylko zmienić kolejność strategii jednego z graczy).

Ogólna postać takiej gry jest następująca:

(t)

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia C	Strategia D
Strategia A	x_{ac}; y_{ac}	x_{ad}; y_{ad}
Strategia B	x_{bc}; y_{bc}	x_{bd}; y_{bd}

Ponieważ równowagami Nasha w strategiach czystych są pary strategii „strategia A, strategia C” oraz „strategia B, strategia D”, mamy zatem:

$$x_{ac} \ge x_{bc} \quad y_{ac} \ge y_{ad} \quad x_{bd} \ge x_{ad} \quad y_{bd} \ge y_{bc}$$

Oznaczmy:

$$u_1 = x_{ac} - x_{bc} \quad u_2 = y_{ac} - y_{ad}$$
$$v_1 = x_{bd} - x_{ad} \quad v_2 = y_{bd} - y_{bc}$$

Liczby u_1, u_2, v_1 i v_2 są nieujemne.

Gra z przykładu (t) ma jeszcze jedną równowagę w strategiach mieszanych: (p_A; p_B; p_C; p_D), gdzie:

- p_A – **prawdopodobieństwo użycia przez gracza 1 strategii A,**
- p_B – **prawdopodobieństwo użycia przez gracza 1 strategii B,**
- p_C – **prawdopodobieństwo użycia przez gracza 2 strategii C,**
- p_D – **prawdopodobieństwo użycia przez gracza 2 strategii D.**

Prawdopodobieństwa p_A, p_B, p_C i p_D można obliczyć według gotowych wzorów:

$$\boxed{p_A = \frac{v_2}{u_2 + v_2}} \qquad [5]$$

$$\boxed{p_B = 1 - p_A = \frac{u_2}{u_2 + v_2}} \qquad [6]$$

$$\boxed{p_C = \frac{v_1}{u_1 + v_1}} \qquad [7]$$

$$\boxed{p_D = 1 - p_C = \frac{u_1}{u_1 + v_1}} \qquad [8]$$

We wzorach [5] – [8] dzielimy przez $u_2 + v_2$ lub $u_1 + v_1$. Gdyby którakolwiek z tych sum była równa zero, to gra miałaby nieskończenie wiele równowag, ale albo jedna z nich dominowałaby wszystkie pozostałe ze względu na wypłaty, albo wypłaty we wszystkich równowagach byłyby jednakowe. Tak samo byłoby, gdyby równowagi w strategiach czystych nie leżały na żadnej z przekątnych tabeli.

Równowagę dominującą ze względu na ryzyko wybieramy według reguły:

- **Jeżeli $u_1 u_2 > v_1 v_2$, równowagą dominującą ze względu na ryzyko jest równowaga w strategiach czystych „strategia A, strategia C”, dająca wypłaty (x_{ac}; y_{ac}).**

- **Jeżeli $u_1 u_2 < v_1 v_2$, równowagą dominującą ze względu na ryzyko jest równowaga w strategiach czystych „strategia B, strategia D”, dająca wypłaty (x_{bd}; y_{bd}).**

- **Jeżeli $u_1 u_2 = v_1 v_2$, równowagą dominującą ze względu na ryzyko jest równowaga w strategiach mieszanych (p_A; p_B; p_C; p_D), w której prawdopodobieństwa używania przez poszczególnych graczy swoich strategii można obliczyć z gotowych wzorów [5] – [8].**

Sprawdźmy poprawność powyższego schematu dla gier z przykładów (r) i (s).

(r)

Gracz 2 Gracz 1	Strategia C	Strategia D
Strategia A	12; 9	1; 2
Strategia B	3; 4	10; 17

$$x_{ac} = 12 \quad x_{bc} = 3 \quad x_{ad} = 1 \quad x_{bd} = 10$$
$$y_{ac} = 9 \quad y_{bc} = 4 \quad y_{ad} = 2 \quad y_{bd} = 17$$

$$u_1 = x_{ac} - x_{bc} = 9 \quad u_2 = y_{ac} - y_{ad} = 7$$
$$v_1 = x_{bd} - x_{ad} = 9 \quad v_2 = y_{bd} - y_{bc} = 13$$

Równowagą w strategiach mieszanych jest równowaga (p_A; p_B; p_C; p_D). Prawdopodobieństwa użycia poszczególnych strategii wynoszą:

$$p_A = \frac{v_2}{u_2 + v_2} = \frac{13}{7+13} = \frac{13}{20} \qquad p_B = \frac{u_2}{u_2 + v_2} = \frac{7}{7+13} = \frac{7}{20}$$

$$p_C = \frac{v_1}{u_1 + v_1} = \frac{9}{9+9} = \frac{1}{2} \qquad p_D = \frac{u_1}{u_1 + v_1} = \frac{9}{9+9} = \frac{1}{2}$$

Ponieważ w tej grze nie ma równowagi dominującej ze względu na wypłaty, musimy znaleźć równowagę dominującą ze względu na ryzyko:

$$u_1 u_2 = 9 \cdot 7 = 63 \qquad v_1 v_2 = 9 \cdot 13 = 117$$

Ponieważ $u_1 u_2 < v_1 v_2$, równowagą dominującą ze względu na ryzyko jest równowaga w strategiach czystych „strategia B, strategia D", dająca wypłaty (10; 17).

Analogicznie sprawdzimy poprawność podanego schematu teoretycznego dla gry z przykładu (s).

(s)

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia C	Strategia D
Strategia A	99; 49	0; 0
Strategia B	0; 0	1; 51

$$x_{ac} = 99 \quad x_{bc} = 0 \quad x_{ad} = 0 \quad x_{bd} = 1$$
$$y_{ac} = 49 \quad y_{bc} = 0 \quad y_{ad} = 0 \quad y_{bd} = 51$$

$$u_1 = x_{ac} - x_{bc} = 99 \quad u_2 = y_{ac} - y_{ad} = 49$$
$$v_1 = x_{bd} - x_{ad} = 1 \quad v_2 = y_{bd} - y_{bc} = 51$$

Równowagą w strategiach mieszanych jest równowaga (p_A; p_B; p_C; p_D). Prawdopodobieństwa użycia poszczególnych strategii wynoszą:

$$p_A = \frac{v_2}{u_2 + v_2} = \frac{51}{49 + 51} = \frac{51}{100} \qquad p_B = 1 - p_A = \frac{49}{100}$$

$$p_C = \frac{v_1}{u_1 + v_1} = \frac{1}{99 + 1} = \frac{1}{100} \qquad p_D = 1 - p_C = \frac{99}{100}$$

Ponieważ w tej grze nie ma równowagi dominującej ze względu na wypłaty, musimy znaleźć równowagę dominującą ze względu na ryzyko:

$$u_1 u_2 = 99 \cdot 49 = 4851 \qquad v_1 v_2 = 1 \cdot 51 = 51$$

Ponieważ $u_1 u_2 > v_1 v_2$, równowagą dominującą ze względu na ryzyko jest równowaga w strategiach czystych „strategia A, strategia C”, dająca wypłaty (99; 49).

Jak widać, powyższe wyniki uzyskane na podstawie gotowych wzorów są zgodne z wynikami otrzymanymi wcześniej przy omawianiu przykładów (r) i (s).

GRY O SUMIE ZEROWEJ
I GRY O STAŁEJ SUMIE

Rozważmy następujące gry:

(u)

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia A	Strategia B
Strategia A	50; 50	47; 53
Strategia B	47; 53	51; 49

(w)

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia A	Strategia B
Strategia A	5; –5	6; –6
Strategia B	–3; 3	–4; 4

W obu grach – niezależnie od strategii – suma wypłat obu graczy jest stała:

- **w grze z przykładu (u) wynosi 100,**
- **w grze z przykładu (w) wynosi 0.**

Tego typu gry nazywamy GRAMI O STAŁEJ SUMIE.

W grach o stałej sumie znając wynik jednego gracza możemy określić wynik drugiego gracza.

Szczególnym przypadkiem gier o stałej sumie są GRY O SUMIE ZEROWEJ, w których suma wypłat obu graczy jest równa zero.

Gry o sumie zerowej możemy także zapisywać w takiej postaci, gdzie w poszczególnych komórkach tabeli będzie jedna liczba – wypłata gracza 1. Wypłata gracza 2 w takim przypadku to zawsze przeciwieństwo wypłaty gracza 1.

Grę o sumie zerowej z przykładu (w) możemy zapisać w postaci:

(w)

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia A	Strategia B
Strategia A	5	6
Strategia B	–3	–4

W komórkach są przedstawione wypłaty gracza 1.

Wypłata gracza 2 to zawsze przeciwieństwo (nie odwrotność) wypłaty gracza 1, np.:

- ✓ **jeśli gracz 1 osiąga wypłatę równą 5, to gracz 2 osiąga wypłatę równą –5 (a nie $^{1}/_{5}$);**
- ✓ **jeśli gracz 1 osiąga wypłatę równą –3, to gracz 2 osiąga wypłatę równą 3 (a nie $-^{1}/_{3}$).**

Inny przykład gry dwuosobowej o sumie zerowej jest następujący:

(y)

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia D	Strategia E	Strategia F
Strategia A	–2	–3	4
Strategia B	1	–8	8
Strategia C	–9	–5	–10

Na przykład, jeżeli gracz 1 stosuje strategię A, a gracz 2 stosuje strategię D, to gracz 1 osiąga wypłatę równą –2, a gracz 2 osiąga wypłatę równą 2.

Grę z przykładu (y) można oczywiście zapisać również w takiej postaci, gdzie w komórkach są wypłaty *obu* graczy, jednak zapis taki dla gier dwuosobowych o sumie zerowej rzadko jest używany:

Gracz 2 / Gracz 1	Strategia D	Strategia E	Strategia F
Strategia A	–2; 2	–3; 3	4; –4
Strategia B	1; –1	–8; 8	8; –8
Strategia C	–9; 9	–5; 5	–10; 10

GRY MACIERZOWE I GRY DWUMACIERZOWE

Gry dwuosobowe o sumie zerowej (i o skończonej liczbie strategii każdego gracza) nazywamy GRAMI MACIERZOWYMI (w każdej komórce tabeli znajduje się bowiem jedna liczba).

Inne dwuosobowe gry ze skończoną liczbą strategii każdego gracza nazywamy GRAMI DWUMACIERZOWYMI (w każdej komórce tabeli są dwie liczby, a macierz, której elementem są pary liczb, to właściwie to samo, co para macierzy).

ZASTOSOWANIE TEORII GIER: PRZYKŁADY NIEEKONOMICZNE

Przedstawimy teraz kilka prostych przykładów zastosowania teorii gier.

GRA W TCHÓRZA (W CYKORA)

Opis gry:

Na wąskiej drodze dwóch kierowców jedzie naprzeciw siebie luksusowymi samochodami. Każdy z kierowców ma do wyboru: zjechać na pobocze i zostać frajerem albo jechać prosto licząc, że na pobocze zjedzie przeciwnik, i zostać twardzielem. Żeby tylko nie doszło do sytuacji, że obaj kierowcy postanowili jechać prosto – wówczas stłuczka jest nieunikniona i obaj ponoszą straty. Wypłaty w tej grze są następujące:

Kierowca 2 / Kierowca 1	Zjechać na pobocze	Jechać prosto
Zjechać na pobocze	1; 1	0; 2
Jechać prosto	2; 0	–1; –1

Jak widać, najlepszą wypłatę (równą 2) gracz osiąga wtedy, kiedy pojedzie prosto, a przeciwnik zjedzie na pobocze. Jak powinien zachować się każdy z kierowców?

Rozwiązanie:

Każdy z kierowców powinien zastosować strategię mieszaną – jechać prosto z prawdopodobieństwem równym $^1/_2$ oraz zjechać na pobocze również z prawdopodobieństwem $^1/_2$.

Komentarz:
W tej grze żaden z graczy nie ma strategii dominującej. Występują dwie równowagi Nasha w strategiach czystych oraz jedna równowaga Nasha w strategiach mieszanych.

Żeby móc zastosować wzory [5] – [8] do znalezienia równowagi Nasha w strategiach mieszanych oraz żeby móc wykorzystać przedstawioną wcześniej procedurę znajdowania równowagi dominującej ze względu na ryzyko, należy zmienić kolejność strategii jednego z graczy w tabelce gry tak, żeby równowagi Nasha w strategiach czystych występowały na głównej przekątnej:

Kierowca 1 \ Kierowca 2	Zjechać na pobocze	Jechać prosto
Jechać prosto	2; $\boxed{0}$	–1; –1
Zjechać na pobocze	1; 1	0; $\boxed{2}$

Równowagę Nasha w strategiach mieszanych obliczamy wykorzystując gotowe wzory [5] – [8]:

$$x_{ac} = 2 \quad x_{bc} = 1 \quad x_{ad} = -1 \quad x_{bd} = 0$$
$$y_{ac} = 0 \quad y_{bc} = 1 \quad y_{ad} = -1 \quad y_{bd} = 2$$

$$u_1 = x_{ac} - x_{bc} = 1 \qquad u_2 = y_{ac} - y_{ad} = 1$$
$$v_1 = x_{bd} - x_{ad} = 1 \qquad v_2 = y_{bd} - y_{bc} = 1$$

$$p_A = \frac{v_2}{u_2 + v_2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \qquad p_B = 1 - p_A = \frac{1}{2}$$

$$p_C = \frac{v_1}{u_1 + v_1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \qquad p_D = 1 - p_C = \frac{1}{2}$$

W równowadze Nasha w strategiach mieszanych obaj kierowcy stosują swoje strategie czyste z prawdopodobieństwami $^1/_2$.

Oczekiwana wypłata gracza 1 wynosi:

- **w przypadku zastosowania strategii „jechać prosto”:**

$$2 \cdot {}^1/_2 + (-1) \cdot {}^1/_2 = {}^1/_2$$

- **w przypadku zastosowania strategii „zjechać na pobocze”:**

$$1 \cdot {}^1/_2 + 0 \cdot {}^1/_2 = {}^1/_2$$

Oczekiwana wypłata gracza 2 wynosi:

- **w przypadku zastosowania strategii „jechać prosto”:**

$$(-1) \cdot {}^1/_2 + 2 \cdot {}^1/_2 = {}^1/_2$$

- **w przypadku zastosowania strategii „zjechać na pobocze”:**

$$0 \cdot {}^1/_2 + 1 \cdot {}^1/_2 = {}^1/_2$$

Zilustrujmy wszystkie 3 równowagi Nasha występujące w tej grze:

		$(p = {}^1/_2)$	$(p = {}^1/_2)$	
	Kierowca 2 / Kierowca 1	Zjechać na pobocze	Jechać prosto	Oczekiwana wypłata kierowcy 1
$(p = {}^1/_2)$	Jechać prosto	2; $\boxed{0}$	–1; –1	$^1/_2$
$(p = {}^1/_2)$	Zjechać na pobocze	1; 1	0; $\boxed{2}$	$^1/_2$
	Oczekiwana wyp-łata kierowcy 2	$^1/_2$	$^1/_2$	

Jak widać, w tej grze nie ma równowagi dominującej ze względu na wypłaty (dla kierowcy 1 najlepsza jest równowaga „jechać prosto, zjechać na pobocze”, a dla kierowcy 2 najlepsza jest równowaga „zjechać na pobocze, jechać prosto”). A zatem trzeba znaleźć równowagę dominującą ze względu na ryzyko:

$$u_1u_2 = 1 \cdot 1 = 1 \qquad v_1v_2 = 1 \cdot 1 = 1$$

Ponieważ $u_1u_2 = v_1v_2$, równowagą dominującą ze względu na ryzyko jest równowaga w strategiach mieszanych i obaj kierowcy powinni grać tak, żeby osiągnąć tę równowagę.

LĄDOWANIE ALIANTÓW W NORMANDII

Opis gry:

Jest dzień 6 czerwca 1944 roku („Dzień D”). W tym dniu wcześnie rano tysiące statków desantowych zbliżyło się do normandzkich plaż i w ten sposób rozpoczęła się inwazja aliantów w Normandii, co było początkiem końcowej fazy II Wojny Światowej. Wojska alianckie mogły także podjąć próbę lądowania w okolicach Calais – miasta położonego bardziej na północy Francji. Armia niemiecka wiedziała o planowanym lądowaniu wojsk alianckich i o tym, że miejscem lądowania będzie albo Calais albo Normandia, jednak obronę mogła zorganizować tylko w jednym z tych miejsc. Wypłaty pokazane w poniższej tablicy można interpretować jako prawdopodobieństwo ostatecznego wygrania wojny przez aliantów:

Niemcy / Alianci	Calais	Normandia
Calais	0,6	0,9
Normandia	0,8	0,6

W którym miejscu alianci powinni rozpocząć operację lądowania we Francji? Gdzie Niemcy powinni zgromadzić główne siły obronne?

Rozwiązanie:

Alianci powinni lądować w Calais z prawdopodobieństwem równym 0,4, a w Normandii – z prawdopodobieństwem równym 0,6. Niemcy powinni zgromadzić główne siły obronne w Calais z prawdopodobieństwem równym 0,6, a w Normandii – z prawdopodobieństwem równym 0,4.

Komentarz:

Jest to gra o stałej sumie równej 1. Jeśli np. prawdopodobieństwo wygrania wojny przez aliantów wynosi 0,6, to prawdopodobieństwo przegrania wojny przez aliantów (a więc wypłata Niemców) wynosi 1 – 0,6 = 0,4.

Grę tę można zatem przedstawić w postaci dwumacierzowej:

Alianci \ Niemcy	Calais	Normandia
Calais	0,6; 0,4	0,9; 0,1
Normandia	0,8; 0,2	0,6; 0,4

W tej grze żaden z graczy nie ma strategii dominującej. Nie występuje także równowaga Nasha w strategiach czystych. Obliczymy zatem równowagę Nasha w strategiach mieszanych:

$$0{,}4x + 0{,}2(1 - x) = 0{,}1x + 0{,}4(1 - x) \qquad 0{,}6y + 0{,}9(1 - y) = 0{,}8y + 0{,}6(1 - y)$$
$$x = 0{,}4 \quad \text{oraz} \quad 1 - x = 0{,}6 \qquad\qquad y = 0{,}6 \quad \text{oraz} \quad 1 - y = 0{,}4$$

Oczekiwana wypłata aliantów w przypadku lądowania w Calais wynosi:

$$0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}9 \cdot 0{,}4 = 0{,}72$$

i jest równa oczekiwanej wypłacie w przypadku lądowania w Normandii:

$$0{,}8 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}72$$

Oczekiwana wypłata armii niemieckiej w przypadku zorganizowania obrony w Calais wynosi:

$$0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}28$$

i jest równa oczekiwanej wypłacie w przypadku zorganizowania obrony w Normandii:

$$0{,}1 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}28$$

W tej grze występuje zatem jedna równowaga Nasha. Jest nią równowaga Nasha w strategiach mieszanych. Równowagę tę można przedstawić następująco:

	Niemcy / Alianci	Calais (*p* = 0,6)	Normandia (*p* = 0,4)	Oczekiwana wypłata aliantów
(*p* = 0,4)	Calais	0,6; $\boxed{0,4}$	0,9; 0,1	0,72
(*p* = 0,6)	Normandia	0,8; 0,2	0,6; $\boxed{0,4}$	0,72
	Oczekiwana wypłata Niemców	0,28	0,28	

A zatem obie strony powinny zastosować strategie mieszane. Alianci powinni rozpocząć operację lądowania w Calais z prawdopodobieństwem równym 0,4, a w Normandii – z prawdopodobieństwem równym 0,6. Niemcy powinni zorganizować główną obronę w Calais z prawdopodobieństwem równym 0,6, a w Normandii – z prawdopodobieństwem równym 0,4. Oczekiwane prawdopodobieństwo wygrania wojny przez aliantów wynosi w równowadze 0,72. A zatem oczekiwane prawdopodobieństwo przegrania wojny przez aliantów wynosi w równowadze 1 – 0,72 = 0,28.

Wyniki uzyskane z tej gry są zgodne z rzeczywistością. Ponieważ prawdopodobieństwo wygrania wojny przez aliantów jest większe od prawdopodobieństwa przegrania przez nich wojny, należałoby oczekiwać wygrania wojny przez aliantów. I rzeczywiście tak było – koalicja antyhitlerowska pokonała armię niemiecką. Również Normandia jako miejsce rozpoczęcia operacji Overlord wydaje się bardziej prawdopodobna – prawdopodobieństwo zastosowania przez aliantów strategii czystej „lądować w Normandii” jest bowiem większe od prawdopodobieństwa zastosowania drugiej strategii czystej „lądować w Calais”.

WYŚCIG ZBROJEŃ

Opis gry:
Są lata sześćdziesiąte. Dwa mocarstwa światowe: Stany Zjednoczone i Związek Radziecki wydają dużo pieniędzy na zbrojenia. Celem każdego z państw jest posiadanie większego arsenału militarnego od przeciwnika. Wypłaty obu państw przedstawia poniższa tablica:

USA \ ZSRR	Rozbrojenie	Zbrojenia
Rozbrojenie	10; 10	–50; 20
Zbrojenia	20; –50	–20; –20

Gra toczy się jednorazowo. Jak powinno postąpić każde z państw: rozbroić się czy kontynuować politykę prowadzenia zbrojeń?

Rozwiązanie:
Oba kraje (USA i ZSRR) powinny wybrać strategię „zbrojenia".

Komentarz:
Jest to gra typu „dylemat więźnia". Strategia „zbrojenia" jest strategią dominującą obu graczy i prowadzi do równowagi Nasha w strategiach czystych:

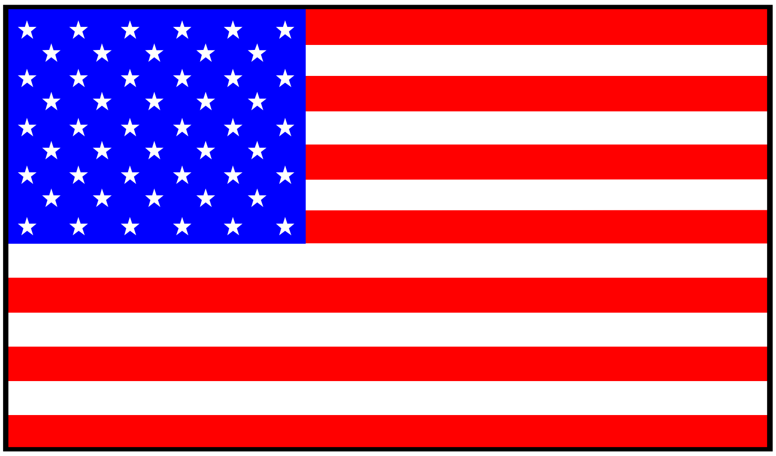
USA \ ZSRR	Rozbrojenie	Zbrojenia
Rozbrojenie	10; 10	–50; $\boxed{20}$
Zbrojenia	20; –50	–20; $\boxed{-20}$

W tej grze nie występuje równowaga Nasha w strategiach mieszanych. Chcąc obliczyć prawdopodobieństwa użycia przez gracza 1 poszczególnych strategii czystych uzyskujemy wartości prawdopodobieństw spoza przedziału <0;1>:

$$10x - 50(1 - x) = 20x - 20(1 - x)$$

$$x = {}^{3}/_{2} \notin \langle 0;1 \rangle$$

Ponieważ równowaga „zbrojenia, zbrojenia” jest jedyną równowagą Nasha w tej grze, zarówno Stany Zjednoczone jak i Związek Radziecki powinny wybrać strategie prowadzące do tej równowagi, a więc zbroić się. Chociaż dwustronne rozbrojenie przyniosłoby większe wypłaty obydwu krajom, stan ten w grze toczącej się jednorazowo nie zostanie raczej osiągnięty (zbyt dużo można stracić, gdy przeciwnik postąpi inaczej).



PROBLEM WSPÓLNEGO PASTWISKA

Opis gry:

W małej miejscowości, w której mieszka 5 gospodarzy, jest jedno wspólne pastwisko, z którego mieszkańcy mogą korzystać nieodpłatnie. Każdy z gospodarzy ma 2 krowy, które może karmić paszą zakupioną w sklepie lub wypasać na wspólnym pastwisku. Niestety, wydajność pastwiska maleje wraz ze wzrostem liczby pasących się krów według wzoru:

$$W = 12 - Q = 12 - (q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5)$$

gdzie:

W – **wydajność pastwiska,**

Q – **ogólna liczba krów pasących się na pastwisku** ($Q = q_1 + \ldots + q_5$),

q_i – **liczba krów *i*-tego gospodarza pasących się na pastwisku** ($i = 1,\ldots,5$; $q_i = 0, 1, 2$).

Wypłata *i*-tego gospodarza (w_i) jest proporcjonalna do wydajności pastwiska (W) oraz do liczby krów, jaką wypasa gospodarz (q_i):

$$w_i = q_i \cdot W = q_i \cdot [12 - (q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5)]$$

Wypłatę rozumiemy tu jako miarę korzyści w porównaniu z sytuacją, w której nie korzysta się z pastwiska.

Gra toczy się jednorazowo. Ile krów powinien wypasać każdy z gospodarzy?

Rozwiązanie:

Dwie krowy.

Komentarz:
Ponieważ wypłata pojedynczego gospodarza jest proporcjonalna do liczby krów, jakie wypasa on na pastwisku, może się wydawać, że wypas przez każdego z gospodarzy dwóch krów jest bezdyskusyjny. Należy jednak zauważyć, że w miarę zwiększania się ogólnej liczby krów na pastwisku, gwałtownie maleje jego wydajność. Może warto zatem wypasać mniej krów i korzystać z większej wydajności pastwiska? Zaraz to sprawdzimy.

W grze jest pięciu graczy. Na początku mogłoby się wydawać, że postać normalna tej gry musi być tabelką pięciowymiarową. Jednak po uważnym zastanowieniu się widać, że wypłata danego gracza zależy tylko od liczby jego własnych krów pasących się na pastwisku (q_i) oraz od ogólnej liczby cudzych krów na pastwisku ($Q - q_i$). Oznacza to, że postać normalną tej gry można sprowadzić do tabelki dwuwymiarowej:

Liczba cudzych krów / Liczba własnych krów	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	11	10	9	8	7	6	5	4	3
2	20	18	16	14	12	10	8	6	4

Liczby umieszczone w tabelce to wypłaty *i*-tego gospodarza obliczone wg wzoru:

$$w_i = q_i \cdot \{12 - Q\} = q_i \cdot \{12 - [(Q - q_i) + q_i]\}$$

Na przykład, gdy *i*-ty gospodarz wypasa 2 krowy, a pozostali gospodarze – łącznie 7 krów, wypłata *i*-tego gospodarza wynosi:

$$w_i = 2 \cdot \{12 - [7 + 2]\} = 6$$

Z kolei, gdy *i*-ty gospodarz wypasa 1 krowę, a pozostali gospodarze – łącznie 2 krowy, wypłata *i*-tego gospodarza wynosi:

$$w_i = 1 \cdot \{12 - [2 + 1]\} = 9$$

Jak widać, dominującą strategią *i*-tego (a więc i każdego) gospodarza jest wypas dwóch krów na pastwisku. Gdy każdy z gospodarzy będzie wypasał 2 krowy, liczba cudzych krów będzie wynosiła 8 i każdy z graczy otrzyma wypłatę równą 4. Będzie to równowaga Nasha w tej grze.

Można jednak zauważyć, że gdyby każdy z gospodarzy wypasał na pastwisku tylko 1 krowę, każdy z nich osiągnąłby większą wypłatę równą 7 (na pastwisku byłyby wówczas 4 cudze krowy). Jednak pokusa wypasu 2 krów jest tak duża, że wspólne porozumienie o wypasie 1 krowy jest mało prawdopodobne do przestrzegania i racjonalny gospodarz będzie wypasał 2 krowy na pastwisku.

ZASTOSOWANIE TEORII GIER: PRZYKŁADY EKONOMICZNE

Przedstawimy teraz kilka prostych przykładów zastosowania teorii gier w ekonomii. Opisane w tej części problemy będziemy starać się rozwiązać na gruncie ekonomii, wykorzystując poznane procedury z zakresu teorii gier do minimum. Na przykład, nie będziemy znajdować równowag dominujących ze względu na ryzyko, jak również pominiemy równowagi Nasha w strategiach mieszanych. W przypadku istnienia np. kilku równowag, opiszemy metody, jakie obie strony mogą wykorzystać, żeby osiągnąć równowagę najbardziej dla siebie korzystną.

OLIGOPOL Z POROZUMIENIEM

Opis gry:
Na rynku działają 2 firmy. Każda z nich może wybrać wariant małej lub dużej produkcji. Zyski każdej z firm zależą od decyzji własnej oraz od decyzji konkurenta i są przedstawione w poniższej tabeli:

Firma 2 / Firma 1	Mała produkcja	Duża produkcja
Mała produkcja	5; 5	1; 8
Duża produkcja	8; 1	3; 3

Gra toczy się jednorazowo. Jaki wariant wielkości produkcji powinno wybrać przedsiębiorstwo?

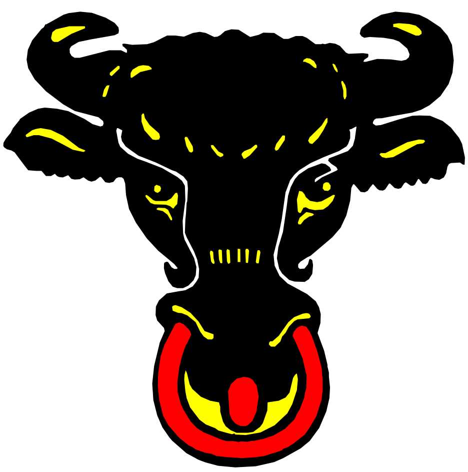
Rozwiązanie:
Duża produkcja.

Komentarz:

Gra ta pokazuje typową sytuację przedsiębiorstw skłonnych do utworzenia zmowy (kartelu). Charakter tej gry jest bardzo podobny do dylematu więźnia. Początkowo wielu osobom może się wydawać, że obie firmy powinny wybrać wariant małej produkcji – każda z nich osiągnęłaby zysk równy 5. Jednak takie postępowanie w grze toczącej się jednorazowo nie jest optymalne: niezależnie od decyzji przeciwnika każda z firm osiągnie większe zyski wybierając wariant dużej produkcji. Każda z firm wybierze zatem strategię „duża produkcja" (a więc swoją strategię dominującą), gra znajdzie się w równowadze Nasha w strategiach czystych i zyski każdej z firm będą równe 3:

Firma 1 \ Firma 2	Mała produkcja	Duża produkcja
Mała produkcja	5; 5	1; $\boxed{8}$
Duża produkcja	8; 1	3; $\boxed{3}$

Oczywiście, gdyby przedsiębiorstwa zmówiły się i dwustronnie ograniczyły wielkość produkcji, osiągnęłyby większe zyski. Jednak pokusa wyłamania się z kartelu jest tak duża, że takie postępowanie w grze toczącej się jednorazowo jest nieoptymalne.



WEJŚCIE NA RYNEK

Opis gry:

Dwa nowe przedsiębiorstwa pragną wejść na rynek, na którym jest miejsce co najwyżej dla jednego nowego przedsiębiorstwa. Zyski (straty) obydwu firm zależą od decyzji własnej oraz od decyzji konkurenta i są przedstawione w poniższej tablicy:

Firma 1 \ Firma 2	Wejść na rynek	Nie wchodzić na rynek
Wejść na rynek	–10; –10	10; 0
Nie wchodzić na rynek	0; 10	0; 0

Gra toczy się jednorazowo. Czy nowe przedsiębiorstwo powinno wejść na rynek czy pozostać poza rynkiem?

Rozwiązanie:

Wejść na rynek pod warunkiem, że się to zrobi pierwszy. W tym celu należy wysyłać różne sygnały do konkurenta, że się już weszło lub planuje wejść na rynek. Jeżeli jednak konkurent zrobił to szybciej, dane przedsiębiorstwo nie powinno wchodzić na rynek.

Komentarz:

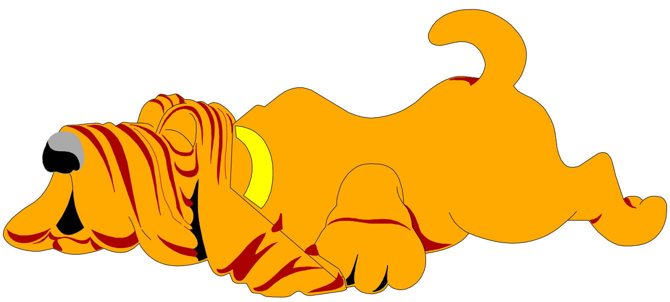
Chociaż żadna z firm nie ma strategii dominującej, w tej grze występują dwie równowagi Nasha w strategiach czystych:

Firma 1 \ Firma 2	Wejść na rynek	Nie wchodzić na rynek
Wejść na rynek	–10; –10	10; $\boxed{0}$
Nie wchodzić na rynek	0; $\boxed{10}$	0; 0

W tej grze występuje także równowaga Nasha w strategiach mieszanych, jednak znalezienie jej nie jest konieczne do rozwiązania naszego problemu.

W każdej z równowag Nasha w strategiach czystych na rynek wejdzie tylko jedno nowe przedsiębiorstwo. Pytanie brzmi tylko „które?". Prawdopodobnie to, które wcześniej niż konkurent wyśle jakiś sygnał, że już weszło na rynek albo publicznie rozgłośni pewne informacje, że na 100% wejdzie w najbliższym czasie na rynek (np. poczyni jakieś poważne inwestycje pod kątem nowego rynku albo zawrze umowy z odbiorcami, dostawcami itp.). W takiej sytuacji najlepszą odpowiedzią konkurenta jest niewchodzenie na nowy rynek (oczywiście, jeśli wiadomo, że inna firma na 100% na rynek wejdzie). Wejście drugiej firmy, gdyby na rynku działało już jedno przedsiębiorstwo, spowodowałoby katastrofalne skutki dla obu podmiotów, które osiągnęłyby stratę równą 10.

Grę tę można również zastosować do sytuacji, kiedy dwa przedsiębiorstwa planują wprowadzić na rynek nowy – w miarę podobny – produkt, podczas gdy na rynku jest miejsce dla produktu oferowanego tylko przez jedno przedsiębiorstwo. W takiej grze rozwiązanie jest podobne – istnieją dwie równowagi Nasha. W każdej z równowag na rynek jest wprowadzany produkt oferowany tylko przez jedną firmę. Od konkretnego przypadku zależy jednak to, która to będzie firma.



UDZIAŁ W RYNKU

Opis gry:

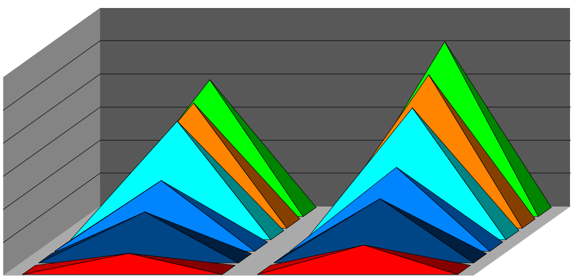
W duopolu (oligopolu, w którym działają tylko dwie firmy) dwa przedsiębiorstwa rywalizują o jak największy udział w rynku. Wypłaty oznaczają wyrażony w punktach procentowych wzrost (+) lub spadek (–) udziału w rynku pierwszej firmy i są przedstawione w poniższej tabelce:

Firma 2 / Firma 1	Strategia D	Strategia E	Strategia F
Strategia A	–3	–2	5
Strategia B	4	3	4
Strategia C	8	–4	–6

Gra toczy się jednorazowo. Jaką strategię powinna wybrać firma 1, a jaką – firma 2?

Rozwiązanie:

Firma 1 powinna wybrać strategię B, a firma 2 powinna wybrać strategię E.



Komentarz:

Jest to przykład gry o sumie zerowej, w której wypłata jednego gracza jest dokładnie przeciwna do wypłaty drugiego gracza. Na przykład, wzrost udziału firmy 1 w rynku o 4 punkty procentowe oznacza zmniejszenie udziału firmy 2 w rynku o 4 punkty procentowe. Grę tę można przedstawić także w następujący sposób:

Firma 2 / Firma 1	Strategia D	Strategia E	Strategia F
Strategia A	–3; 3	–2; 2	5; –5
Strategia B	4; –4	3; –3	4; –4
Strategia C	8; –8	–4; 4	–6; 6

Obie firmy zagrają „strategia B, strategia E”, gdyż jest to jedyna para strategii prowadzących do równowagi Nasha:

Firma 2 / Firma 1	Strategia D	Strategia E	Strategia F
Strategia A	$\boxed{-3}$	–2	5
Strategia B	4	$\boxed{3}$	4
Strategia C	8	–4	$\boxed{-6}$

W równowadze Nasha udział firmy 1 w rynku wzrasta o 3 punkty procentowe i o tyle samo maleje udział firmy 2 w rynku. Wybór strategii A lub C przez firmę 1 albo wybór strategii D lub F przez firmę 2 przy racjonalnym zachowaniu przeciwnika pogorszyłby wypłatę przedsiębiorstwa, które zrezygnowało ze strategii prowadzącej do równowagi.

NEGOCJACJE

Opis gry:

Sprzedawca i nabywca negocjują ostateczną cenę pewnego dobra. Obie strony wiedzą, że koszty produkcji tego dobra wynoszą 800 zł, zaś wartość tego dobra dla nabywcy wynosi 1200 zł. Celem nabywcy jest kupienie dobra po jak najniższej cenie, zaś celem sprzedawcy jest sprzedaż dobra po jak najwyższej cenie. Zysk (wypłata) nabywcy jest równy $1200 - P$, zaś zysk (wypłata) sprzedawcy wynosi $P - 800$, gdzie P jest ceną kupna/sprzedaży danego dobra. W czasie negocjacji sprzedawca i nabywca przedstawiają swoje oferty:

- **jeżeli cena w ofercie sprzedawcy i w ofercie nabywcy jest taka sama, transakcja zostanie zrealizowana po tej cenie;**
- **jeżeli cena w ofercie sprzedawcy jest wyższa od ceny w ofercie nabywcy, transakcja w ogóle nie zostanie zrealizowana;**
- **jeżeli cena oferowana przez sprzedawcę jest niższa od ceny oferowanej przez nabywcę, transakcja zostanie przeprowadzona po cenie równej średniej arytmetycznej z cen oferowanych przez nabywcę i sprzedawcę.**

Ponieważ żadna ze stron nie złoży oferty dla siebie niekorzystnej oraz takiej, którą druga strona od razu odrzuciłaby, ceny mogące pojawić się w ofertach należą do przedziału <801; 1199> (zaokrąglając wszystkie ceny do pełnych złotych). Jak widać, do przedziału tego nie należą ceny 800 i 1200 zł, gdyż pierwsza z nich nie zostanie przyjęta przez sprzedawcę, a druga przez nabywcę (kto by się zgodził na transakcję, która przyniesie zerowy zysk…).

Załóżmy, że negocjacje odbywają się w dwóch formach:

(1) Obie strony składają ofertę jednocześnie, nie znając oferty rywala. Złożonej oferty nie można już zmienić.

(2) Jedna ze stron składa ofertę jako pierwsza. Oferta drugiej strony jest wówczas odpowiedzią na ofertę pierwszej strony.

Jaką cenę powinien zaoferować nabywca, a jaką sprzedawca?

Rozwiązanie:
W przypadku (1) wszystko zależy od tego, jak poszczególnym stronom zależy na kupnie/sprzedaży tego dobra. Nabywca powinien zaoferować cenę od 1000 do 1199 zł (w zależności od tego, jak jest zdeterminowany do zakupu dobra). Sprzedawca powinien zaoferować cenę od 801 do 1000 zł (również w zależności od tego, na ile zależy mu na sprzedaży dobra).

W przypadku (2):

- **Jeżeli ofertę jako pierwszy składa sprzedawca, sprzedawca oferuje cenę 1199 zł, którą nabywca akceptuje.**
- **Jeżeli ofertę jako pierwszy składa nabywca, nabywca oferuje cenę 801 zł, którą sprzedawca akceptuje.**

Komentarz:
Gra z przykładu (1) jest grą jednoetapową (obaj gracze podejmują decyzje jednocześnie). Gra z przykładu (2) jest grą dwuetapową z pełną informacją (drugi gracz, podejmując decyzję, zna decyzję pierwszego gracza).

Przedstawimy teraz postać normalną gry z przykładu (1).

Obaj gracze (sprzedawca i nabywca) mają tyle strategii, ile jest cen z przedziału <801; 1199>. Gdybyśmy chcieli zilustrować pełną postać normalną tej gry, potrzebowalibyśmy tablicy o wymiarach 399×399. Uprościmy jednak naszą analizę, ograniczając liczbę rozpatrywanych wariantów cen do trzech: 900, 1000 i 1100 zł. Jak się później okaże, zawężenie takie nie zmieni wniosków z naszej analizy.

Normalną postać gry oraz wypłaty obu graczy przedstawia tablica:

Sprzedawca / Nabywca	P_S = 900 zł	P_S = 1000 zł	P_S = 1100 zł
P_N = 900 zł	300; 100	0; 0	0; 0
P_N = 1000 zł	250; 150	200; 200	0; 0
P_N = 1100 zł	200; 200	150; 250	100; 300

P_N – cena oferowana przez nabywcę,
P_S – cena oferowana przez sprzedawcę.

Wypłaty obu graczy otrzymaliśmy w następujący sposób:

- **Jeżeli cena oferowana przez nabywcę (P_N) jest niższa od ceny oferowanej przez sprzedawcę (P_S), transakcja nie dojdzie do skutku i wypłaty obu graczy wyniosą zero.**
  Np. $P_N = 900$ zł i $P_S = 1100$ zł
  $\rightarrow$ (0; 0)

- **Jeżeli cena oferowana przez nabywcę (P_N) jest równa cenie oferowanej przez sprzedawcę (P_S), transakcja zostanie zrealizowana po tej cenie ($P_N = P_S = P$), wypłata nabywcy wyniesie $1200 - P$, zaś wypłata sprzedawcy $P - 800$.**
  Np. $P_N = 900$ zł i $P_S = 900$ zł
  $\rightarrow (1200 - 900 = 300; 900 - 800 = 100)$

- **Jeżeli cena oferowana przez nabywcę (P_N) jest wyższa od ceny oferowanej przez sprzedawcę (P_S), transakcja zostanie zrealizowana po cenie równej średniej arytmetycznej z cen oferowanych przez nabywcę i sprzedawcę: $P = {}^1/_2(P_N + P_S)$. Wypłata nabywcy wyniesie $1200 - P$, zaś wypłata sprzedawcy $P - 800$.**
  Np. $P_N = 1100$ zł i $P_S = 1000$ zł
  $\rightarrow (1200 - {}^1/_2(1100 + 1000) = 150; {}^1/_2(1100 + 1000) - 800 = 250)$

W tej grze żaden z graczy nie ma strategii dominującej. Występują 3 równowagi Nasha w strategiach czystych położone na przekątnej tablicy wypłat:

Sprzedawca / Nabywca	P_S = 900 zł	P_S = 1000 zł	P_S = 1100 zł
P_N = 900 zł	300; $\boxed{100}$	0; 0	0; 0
P_N = 1000 zł	250; 150	200; $\boxed{200}$	0; 0
P_N = 1100 zł	200; 200	150; 250	100; $\boxed{300}$

Równowagami Nasha są wszystkie pary strategii, w których cena oferowana przez nabywcę jest równa cenie oferowanej przez sprzedawcę. Na tej podstawie można wnioskować, że gdybyśmy rozważali wszystkich 399 możliwych strategii obu graczy, gra miałaby 399 równowag. Byłyby nimi wszystkie pary strategii, w których cena oferowana przez nabywcę jest równa cenie oferowanej przez sprzedawcę.

Jak widać, jedynie w równowadze „P_N = 1000 zł, P_S = 1000 zł" zyski obu stron są jednakowe. W pozostałych równowagach albo większe zyski osiąga nabywca albo sprzedawca. Jak zatem określić, którą równowagę powinny wybrać obie strony?

Ciężko to stwierdzić. Nabywca nie powinien raczej oferować ceny niższej od 1000 zł (licząc na zysk powyżej 200 zł), gdyż przy analogicznym postępowaniu sprzedawcy, który też będzie liczył na zysk powyżej 200 zł, a więc zaoferuje cenę powyżej 1000 zł, transakcja w ogóle nie dojdzie do skutku i wypłaty obu graczy wyniosą zero. Obie strony powinny tak zagrać, że przy analogicznym zachowaniu przeciwnika transakcja zostanie zrealizowana. Będzie to miało miejsce, kiedy nabywca zaoferuje cenę powyżej 1000 zł, zaś analogicznym zachowaniem sprzedawcy jest zaoferowanie ceny poniżej 1000 zł. To, jaka cena dokładnie

zostanie zaoferowana, zależy od tego, w jakim stopniu nabywcy i sprzedawcy zależy na kupnie/sprzedaży dobra. Zdeterminowany nabywca zaoferuje cenę 1199 zł, która gwarantuje zakup towaru i przynosi nabywcy zysk co najmniej równy 1 zł. Z kolei zdeterminowany sprzedawca zaoferuje cenę 801 zł, która gwarantuje sprzedaż towaru i przynosi sprzedawcy zysk również co najmniej równy 1 zł.

Inaczej obie strony powinny postąpić w przykładzie (2). Ponieważ każdy z graczy osiągnie większy zysk, gdy transakcja zostanie zrealizowana, niż w przypadku niezawarcia transakcji w ogóle, osoba podejmująca decyzję jako pierwsza powinna zaoferować cenę najbardziej dla siebie korzystną (sprzedawca – 1199 zł, zaś nabywca – 801 zł). Druga strona na pewno zgodzi się na taką cenę, gdyż zysk równy 1 jest lepszy niż zysk zerowy, który wystąpiłby w przypadku, gdyby do transakcji nie doszło.

MIĘDZYNARODOWY KONTRAKT NA DOSTAWĘ ZŁÓŻ

Opis gry:

Polskie przedsiębiorstwo ĄĄĄ rozważa wydobywanie ropy naftowej w pewnym kraju słabo rozwiniętym (KSR). Zyski z inwestycji równe 50 mln zł miałyby być dzielone po połowie między KSR i polską firmę. Istnieje jednak zagrożenie, że KSR znacjonalizuje inwestycję firmy ĄĄĄ – polska firma poniosłaby wtedy straty równe 10 mln zł, a KSR czerpałby całość zysków z wydobywania ropy, które zmniejszyłyby się do 40 mln zł, zakładając mniej efektywne zarządzanie państwowego właściciela.

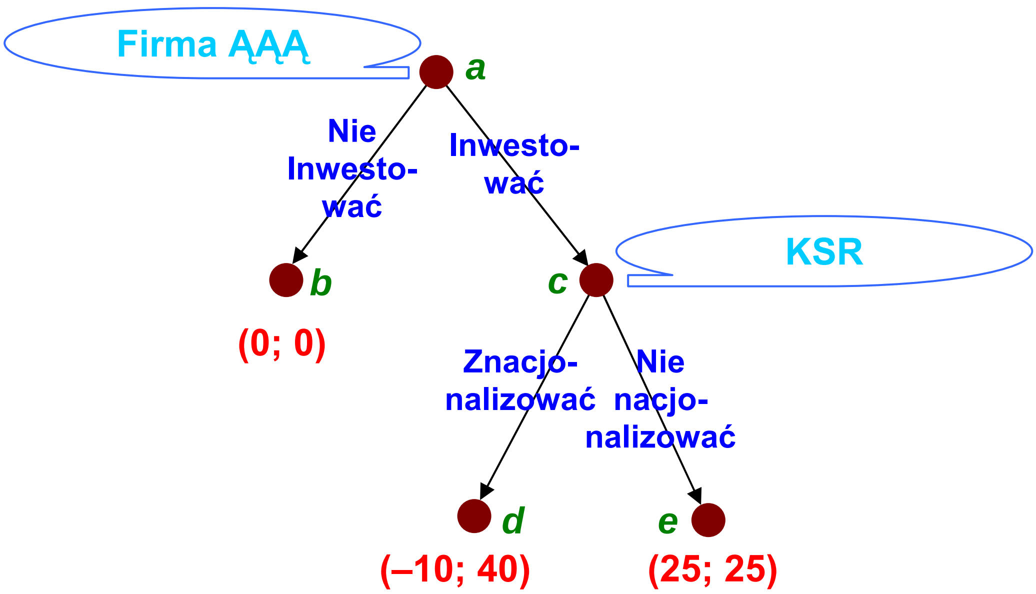
Czy polska firma powinna zainwestować i rozpocząć wydobywanie ropy w KSR?

Rozwiązanie:

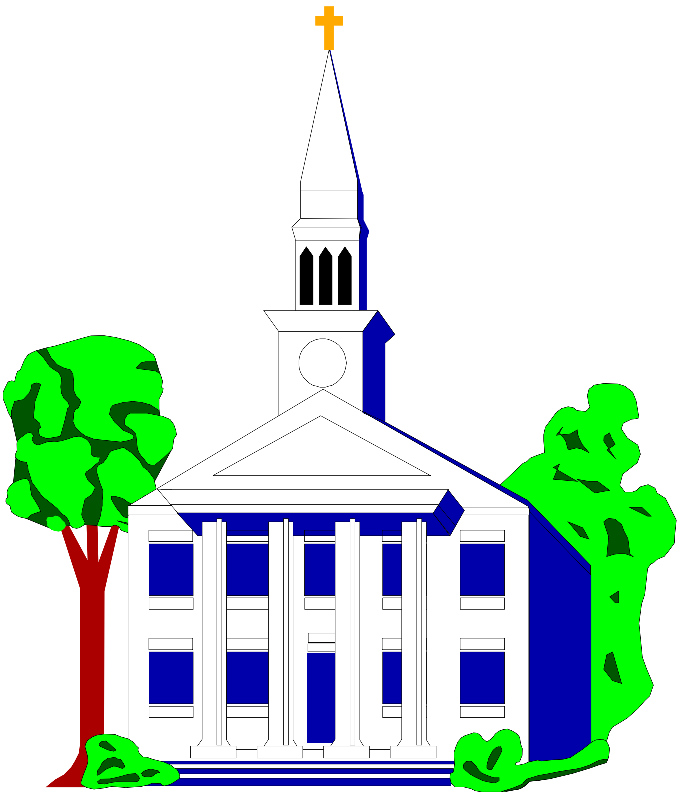
Nie.

Komentarz:

Jest to przykład gry dwuetapowej z pełną informacją, do której zilustrowania wykorzystamy następujące drzewo:



Na początku decyzję podejmuje firma ĄĄĄ, która ma do wyboru albo zainwestować w przemysł naftowy albo nie rozpoczynać inwestycji. Jeżeli firma ĄĄĄ zdecyduje się rozpocząć inwestycję, decyzję podejmuje gracz 2, czyli KSR. Ma on do wyboru albo znacjonalizować kopalnię albo respektować warunki umowy i nie nacjonalizować kopalni. Ponieważ decyzja o nacjonalizacji kopalni pozwoli na uzyskanie większej wypłaty niż w przypadku respektowania umowy, KSR znacjonalizuje szyby naftowe, jak tylko polska firma je wybuduje. Ponieważ w przypadku nacjonalizacji szybów naftowych zysk firmy ĄĄĄ wyniesie –10 (czyli firma poniesie stratę), polskie przedsiębiorstwo nie zdecyduje się na inwestycję w KSR.



MONOPOL ZAGROŻONY WEJŚCIEM NOWEGO PRZEDSIĘBIORSTWA

Opis gry:

Monopolista jest zagrożony wejściem na rynek nowego przedsiębiorstwa. Jedyną obroną przed nową firmą jest obniżenie ceny sprzedawanego produktu. Niestety, obniżka ceny dotyka również samego monopolistę, który ma mniejsze zyski. Obniżenie cen może mieć charakter prewencyjny (zapobiegający wejściu nowego przedsiębiorstwa) lub niszczycielski (próbujący usunąć nowe przedsiębiorstwo z rynku). Poniższa tabela (która nie jest ilustracją żadnej gry!) przedstawia wypłaty (zyski) monopolisty oraz nowego przedsiębiorstwa w zależności od podjętych decyzji:

Decyzja monopolisty	Decyzja nowego przedsiębiorstwa	Wypłata monopolisty	Wypłata nowego przedsiębiorstwa
Utrzymać cenę	Wejść na rynek	12	8
Utrzymać cenę	Nie wchodzić na rynek	24	0
Obniżyć cenę	Wejść na rynek	8	–8
Obniżyć cenę	Nie wchodzić na rynek	18	0

Gra rozgrywa się dwuetapowo (sekwencyjnie). Najpierw decyzję podejmuje jeden gracz, a następnie drugi.

Jakie decyzje podejmą gracze, jeżeli pierwsze podejmuje decyzję nowe przedsiębiorstwo?

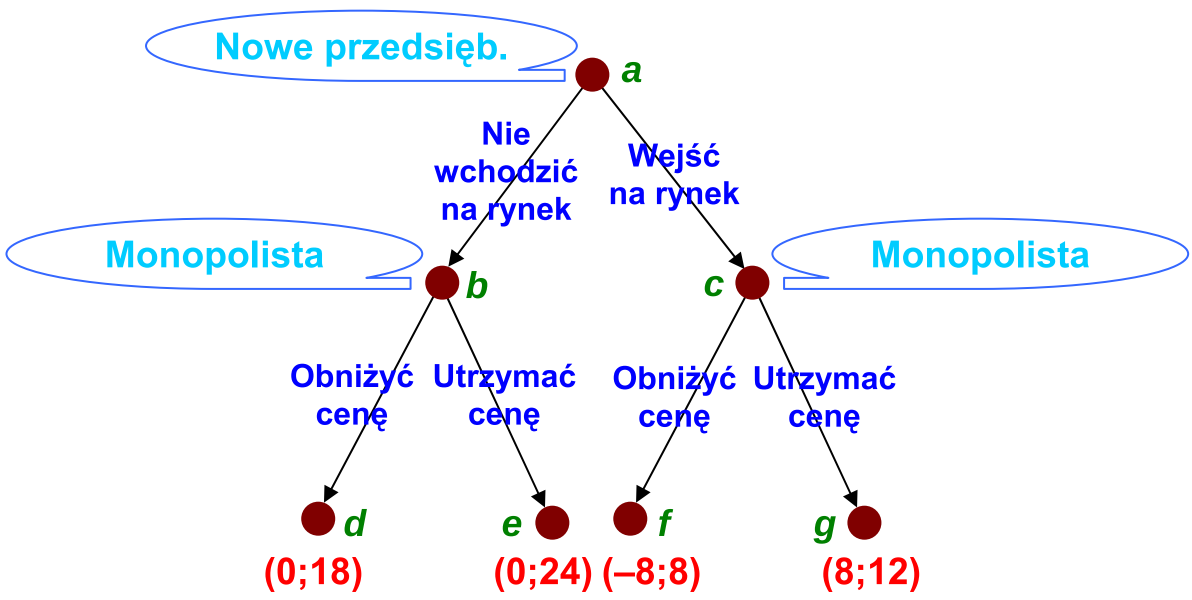
Jakie decyzje podejmą gracze, jeżeli pierwszy podejmuje decyzję monopolista?

Rozwiązanie:
Nowe przedsiębiorstwo, pierwsze podejmując decyzję, wybierze wariant „wejść na rynek", a następnie monopolista podejmie decyzję „utrzymać cenę".

Monopolista, pierwszy podejmując decyzję, wybierze wariant „obniżyć cenę", a następnie nowe przedsiębiorstwo podejmie decyzję „nie wchodzić na rynek".

Komentarz:
Ponieważ gra jest grą dwuetapową (z pełną informacją), do zilustrowania jej użyjemy postaci rozwiniętej (drzewa).

Jeżeli pierwsze decyzję podejmuje nowe przedsiębiorstwo, drzewo gry będzie wyglądało następująco:



Optymalną strategię najlepiej jest ustalić według reguły:

We wszystkich grach wieloetapowych z pełną informacją optymalne rozwiązanie można uzyskać stosując metodę indukcji wstecznej, czyli poruszając się po drzewie gier od dołu do góry i eliminując nieoptymalne gałęzie drzewa.

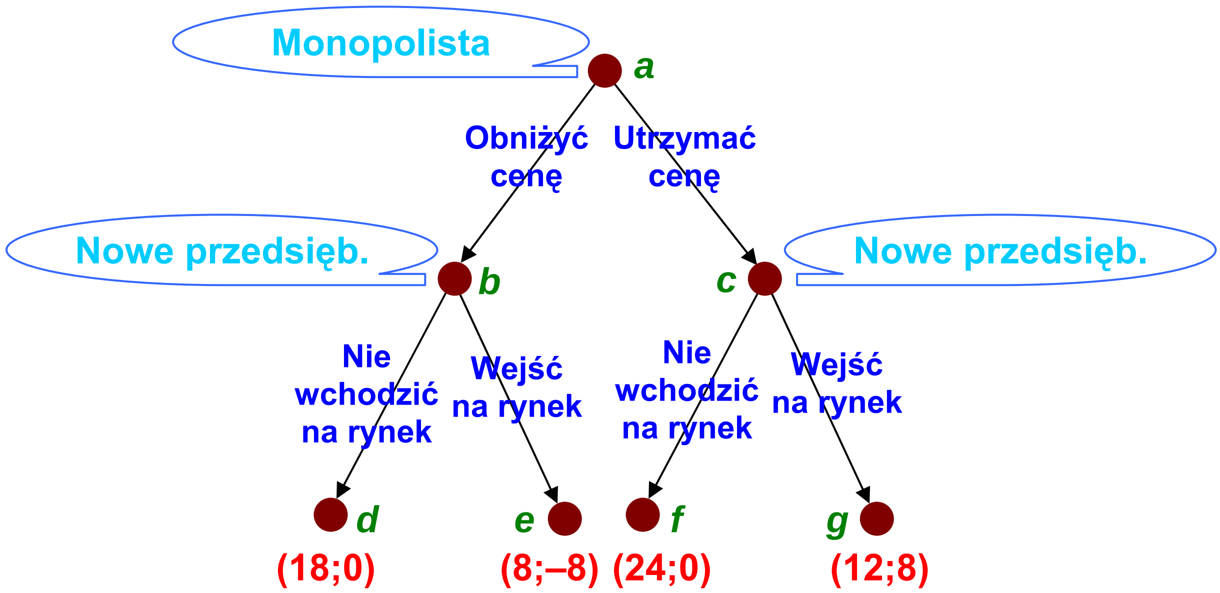
Także i tutaj można zastosować metodę indukcji wstecznej.

Jeżeli nowe przedsiębiorstwo nie weszłoby na rynek, monopolista obniżając cenę otrzymałby wypłatę równą 18, a utrzymując cenę – wypłatę równą 24, a zatem wybrałby wariant „utrzymać cenę". Wypłata nowego przedsiębiorstwa byłaby wówczas równa 0.

Jeżeli nowe przedsiębiorstwo weszłoby na rynek, monopolista obniżając cenę otrzymałby wypłatę równą 8, a utrzymując cenę – wypłatę równą 12, a zatem wybrałby wariant „utrzymać cenę". Wypłata nowego przedsiębiorstwa byłaby wówczas równa 8.

Nowe przedsiębiorstwo, mając do wyboru wypłatę 0 lub 8, wybierze oczywiście 8. A zatem równowaga w tej grze jest następująca: nowe przedsiębiorstwo wchodzi na rynek, a monopolista utrzymuje dotychczasową cenę.

Wyniki gry będą jednak inne, jeżeli jako pierwszy decyzję podejmuje monopolista. Drzewo tej gry jest następujące:



Optymalne rozwiązanie, tak samo jak poprzednio, znajdujemy metodą indukcji wstecznej.

Jeżeli monopolista obniży cenę, nowe przedsiębiorstwo nie wchodząc na rynek otrzymałoby wypłatę równą 0, a wchodząc na rynek – wypłatę równą –8, a zatem wybrałoby wariant „nie wchodzić na rynek". Wypłata monopolisty byłaby wówczas równa 18.

Jeżeli monopolista utrzyma wysoką cenę, nowe przedsiębiorstwo nie wchodząc na rynek otrzymałoby wypłatę równą 0, a wchodząc na rynek – wypłatę równą 8, a zatem wybrałoby wariant „wejść na rynek". Wypłata monopolisty byłaby wówczas równa 12.

Monopolista, mając do wyboru wypłatę 18 lub 12, wybierze oczywiście 18. A zatem równowaga w tej grze jest następująca: monopolista obniża cenę, a nowe przedsiębiorstwo nie wchodzi na rynek.

Można także wskazać na pewne ekonomiczne aspekty tej gry. W pierwszym przypadku, kiedy nowe przedsiębiorstwo podejmuje decyzję jako pierwsze i prawdopodobnie wybierze wejście na rynek, monopolista może zastosować groźbę obniżki ceny, żeby zapobiec wejściu nowego przedsiębiorstwa. Same słowa oczywiście nie wystarczą: w oczach nowego przedsiębiorstwa groźba obniżki ceny musi być wiarygodna. Na przykład, monopolista może rozbudować zdolności wytwórcze, co sprawi, że w przypadku wejścia konkurenta można będzie niewielkim kosztem obniżyć cenę i zwiększyć produkcję. Innymi przykładami odstraszania od wejścia są m. in. wysokie wydatki na reklamę, wypełnianie przestrzeni rynkowej wieloma odmianami tego samego produktu (różnicowanie marki) i wprowadzanie udoskonaleń produktu wymagających wysokich nakładów na B + R.

Odstraszaniu od wejścia ma również służyć polityka obniżania ceny przez monopolistę, zanim nowe przedsiębiorstwo podejmie decyzję o ewentualnym wejściu na rynek. Jest to bardzo dobrze zilustrowane na drugim z przedstawionych drzew. Żeby jednak polityka obniżania ceny była w oczach nowego przedsiębiorstwa wiarygodna, monopolista powinien poczynić dodatkowo inne ruchy potwierdzające utrzymywanie niskich cen, takie jak np. zawarcie długoterminowych umów z nabywcami, gwarantujących określony poziom cen. W przeciwnym przypadku polityka niskich cen może być mało wiarygodna w oczach nowego przedsiębiorstwa i nowe przedsiębiorstwo wejdzie jednak na rynek.

KONKURENCJA POWTARZALNA

Opis gry:
Wróćmy do omawianego wcześniej przykładu oligopolu z porozumieniem, w którym dwa przedsiębiorstwa miały do wyboru wariant małej lub dużej produkcji:

Firma 1 \ Firma 2	Mała produkcja	Duża produkcja
Mała produkcja	5; 5	1; 8
Duża produkcja	8; 1	3; 3

Załóżmy teraz, że mamy do czynienia z grą powtarzalną (grą toczącą się wiele razy), w której:
(1) liczba okresów jest skończona (gra o skończonym horyzoncie czasowym),
(2) liczba okresów jest nieskończona (gra o nieskończonym horyzoncie czasowym).

Jaki teraz wariant wielkości produkcji powinny wybrać przedsiębiorstwa dążące do maksymalizacji zysku?

Rozwiązanie:
Gdy liczba okresów jest skończona – wariant dużej produkcji.
Gdy liczba okresów jest nieskończona – wariant małej produkcji.

Komentarz:
Gra tego typu bardzo często występuje w rzeczywistości. Przecież działające w oligopolu przedsiębiorstwa decyzje produkcyjne muszą podejmować w każdym okresie: co miesiąc, co kwartał, co rok itp. Naturalne jest zatem, że rozpatrywanie tej gry w charakterze gry powtarzalnej ma większe uzasadnienie ekonomiczne.

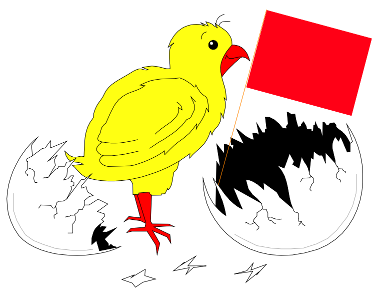
W grze jednookresowej przedsiębiorstwa nie powinny współpracować ze sobą i powinny wybrać wariant dużej produkcji.

Jeżeli gra toczy się np. przez dwa okresy, wiadomo, że w drugim (ostatnim) okresie każde z przedsiębiorstw wybierze dużą produkcję. W pierwszym okresie także będzie się opłacało wybrać wariant dużej produkcji (a więc strategię dominującą) – zyski z takiej decyzji będą zawsze większe od zysków z decyzji o wyborze małej produkcji. Oba przedsiębiorstwa tak pomyślą i oba wybiorą dużą produkcję w grze dwuokresowej.

Podobnie będzie w każdej grze powtarzalnej o skończonym horyzoncie czasowym: skoro opłaca się wyłamać i zwiększyć produkcję w ostatnim oraz przedostatnim okresie, to tak samo opłaca się to zrobić we wcześniejszych okresach.

A zatem w grze, w której liczba okresów jest skończona, przedsiębiorstwa w każdym okresie wybiorą wariant dużej produkcji.

Inne będzie natomiast rozwiązanie w grze o nieskończonym horyzoncie czasowym. W takiej grze opłaca się współpracować i wybrać małą produkcję. Jeżeli w jakimś okresie jedna z firm wyłamie się ze współpracy i wybierze wariant dużej produkcji, w następnym okresie druga z firm zrobi na pewno to samo i od tego momentu aż do nieskończoności zyski w każdym okresie będą mniejsze. Nie opłaca się zatem zwiększać produkcji w celu osiągnięcia większych zysków w jednym okresie, skoro później już w nieskończoność osiągane zyski będą mniejsze.



KONIEC