Matematyka Dyskretna

1. Elementy logiki

Niech $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ będą dowolnymi **zdaniami** wypowiadanymi w matematyce.

Na przykład:

$$\alpha: \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} x > 0$$

$$\beta: \bigvee_{x,y > 1} x^2 < y$$

Przypisujemy im dwie **wartości logiczne**: *prawdę* lub *fałsz*. *Prawdę* oznaczamy symbolem **1**, zaś *fałsz* symbolem **0**.

$w(\alpha), w(\beta)$ – wartości logiczne zdań α i β

$w(\alpha) = 1$ (zdanie α jest prawdziwe)

$w(\beta) = 0$ (zdanie β jest fałszywe)

Na przykład:

$$w\left(\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x > 0\right) = 0$$

$$w\left(\bigvee_{x,y>1} x^2 < y\right) = 1$$

Funktory zdaniotwórcze służą do łączenia zdań lub funkcji zdaniowych w większe zdania lub funkcje zdaniowe (tzw. **schematy**).

Funktory zdaniotwórcze dwuargumentowe:

- $\wedge$ – **koniunkcja** („i”),
- $\vee$ – **alternatywa** („lub”),
- $\Rightarrow$ – **implikacja** („jeśli …, to …”),
- $\Leftrightarrow$ – **równoważność** („… wtedy i tylko wtedy, gdy …”).

Funktor zdaniotwórczy jednoargumentowy:

- $\sim$ – **negacja** („nie prawda, że …”).

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Na przykład:

$$w\left(\sim\left(\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x > 0\right)\right) = w\left(\bigvee_{x\in\mathbb{R}} x \leq 0\right) = 1$$

$$w\left(\sim\left(\bigvee_{x,y>1} x^2 < y\right)\right) = w\left(\bigwedge_{x,y>1} x^2 \geq y\right) = 0$$

$$w\left(\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x > 0 \wedge \bigvee_{x,y>1} x^2 < y\right) = 0$$

$$w\left(\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x > 0 \vee \bigvee_{x,y>1} x^2 < y\right) = 1$$

$$w\left(\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x>0 \Rightarrow \bigvee_{x,y>1} x^2<y\right)=1$$

$$w\left(\bigvee_{x,y>1} x^2<y \Rightarrow \bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x>0\right)=0$$

$$w\left(\bigwedge_{x\in\mathbb{R}} x > 0 \Leftrightarrow \bigvee_{x,y>1} x^2 < y\right) = 0$$

Tautologią (***prawem rachunku funkcyjnego***) nazywamy dowolny schemat, który jest **zawsze prawdziwy** (niezależnie od wartości logicznych tworzących go zdań lub funkcji zdaniowych).

Znane tautologie:

1. prawo tożsamości:

$$p \Rightarrow p$$

2. prawo podwójnego przeczenia:

$$p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$$

3. prawo przemienności koniunkcji:

$$(p \land q) \Leftrightarrow (q \land p)$$

4. prawo przemienności alternatywy:

$$(p \lor q) \Leftrightarrow (q \lor p)$$

5. prawo łączności koniunkcji:

$$((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$$

6. prawo łączności alternatywy:

$$((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$$

7. prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy:

$$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$$

8. prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji:

$$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$$

9. prawo wyłączonego środka:

$$p \vee \sim p$$

10. prawo sprzeczności:

$$\sim (p \wedge \sim p)$$

11. prawo De Morgana (zaprzeczenie koniunkcji):

$$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

12. prawo De Morgana (zaprzeczenie alternatywy):

$$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

13. prawo przechodniości implikacji:

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

14. prawa transpozycji:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

(p ⇒ q) ⇒ (~p ⇒ ~q) oraz (~p ⇒ q) ⇒ (~q ⇒ p)

15. prawo eliminacji implikacji:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$$

16. prawo zaprzeczenia implikacji:

$$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$$

17. Prawo Claviusa: $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$

18. Prawo Dunsa Scotusa: $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

19. Prawo Fregego: $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(q \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$

20. Prawo odrywania: $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

Przykład.

Sprawdź bez użycia metody zero-jedynkowej czy podane schematy są tautologiami:

- $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
- $\Big((p \vee r) \wedge \big((p \vee s) \wedge (r \Rightarrow s)\big)\Big) \Rightarrow s$

Niech α: $\sim(p \land q) \Leftrightarrow (\sim p \lor \sim q)$.

Przypuśćmy, że $\bigvee_{p,q} w(\alpha) = 0$.

Zatem:

1. $w\big(\sim(p \land q)\big) = 0$ i $w(\sim p \lor \sim q) = 1$

lub

2. $w\big(\sim(p \land q)\big) = 1$ i $w(\sim p \lor \sim q) = 0$

Ad.1.

$w\big(\sim(p \wedge q)\big) = 0$ i $w(\sim p \vee \sim q) = 1$

Ad.1.

$$w\big(\sim(p \wedge q)\big) = 0 \text{ i } w(\sim p \vee \sim q) = 1$$

$$w(p \wedge q) = 1 \text{ i } w(\sim p \vee \sim q) = 1$$

Ad.1.

$w\big(\sim(p \wedge q)\big) = 0$ i $w(\sim p \vee \sim q) = 1$

$w(p \wedge q) = 1$ i $w(\sim p \vee \sim q) = 1$

$\underline{w(p) = 1}$ i $\underline{w(q) = 1}$ i $w(\sim p \vee \sim q) = 1$

Ad.1.

$w\big(\sim(p \wedge q)\big) = 0$ i $w(\sim p \vee \sim q) = 1$

$w(p \wedge q) = 1$ i $w(\sim p \vee \sim q) = 1$

$\underline{w(p) = 1}$ i $\underline{w(q) = 1}$ i $w(\sim p \vee \sim q) = 1$

sprzeczność!

Ad.2.

$$w\big(\sim(p \wedge q)\big) = 1 \text{ i } w(\sim p \vee \sim q) = 0$$

Ad.2.

$w\big(\sim(p \wedge q)\big) = 1$ i $w(\sim p \vee \sim q) = 0$

$w(p \wedge q) = 0$ i $w(\sim p \vee \sim q) = 0$

Ad.2.

$$w\big(\sim(p \wedge q)\big) = 1 \text{ i } w(\sim p \vee \sim q) = 0$$

$$w(p \wedge q) = 0 \text{ i } w(\sim p \vee \sim q) = 0$$

$$w(p \wedge q) = 0 \text{ i } w(\sim p) = 0 \text{ i } w(\sim q) = 0$$

Ad.2.

$$w\big(\sim(p \wedge q)\big) = 1 \text{ i } w(\sim p \vee \sim q) = 0$$

$$w(p \wedge q) = 0 \text{ i } w(\sim p \vee \sim q) = 0$$

$$w(p \wedge q) = 0 \text{ i } w(\sim p) = 0 \text{ i } w(\sim q) = 0$$

$$w(p \wedge q) = 0 \text{ i } \underline{w(p) = 1} \text{ i } \underline{w(q) = 1}$$

Ad.2.

$$w\big(\sim(p \wedge q)\big) = 1 \text{ i } w(\sim p \vee \sim q) = 0$$

$$w(p \wedge q) = 0 \text{ i } w(\sim p \vee \sim q) = 0$$

$$w(p \wedge q) = 0 \text{ i } w(\sim p) = 0 \text{ i } w(\sim q) = 0$$

$$w(p \wedge q) = 0 \text{ i } \underline{w(p) = 1} \text{ i } \underline{w(q) = 1}$$

sprzeczność!

Przypadki 1 i 2 okazały się sprzeczne, zatem nasze przypuszczenie nie było prawdziwe.

Czyli: $\underline{\alpha \text{ jest tautologią}}$.

Niech β: $\Big((p \vee r) \wedge \big((p \Rightarrow s) \wedge (r \Rightarrow s)\big)\Big) \Rightarrow s$.

Przypuśćmy, że $\bigvee_{p,r,s} w(\beta) = 0$.

Zatem:

$w\Big((p \vee r) \wedge \big((p \vee s) \wedge (r \Rightarrow s)\big)\Big) = 1$ i $\underline{w(s) = 0}$

$$w\Big((p \vee r) \wedge \big((p \vee s) \wedge (r \Rightarrow s)\big)\Big) = 1 \text{ i } \underline{w(s) = 0}$$

$$w(p \vee r) = 1 \text{ i } w\big((p \vee s) \wedge (r \Rightarrow s)\big) = 1 \text{ i } \underline{w(s) = 0}$$

$$w\Big((p \vee r) \wedge \big((p \vee s) \wedge (r \Rightarrow s)\big)\Big) = 1 \text{ i } \underline{w(s) = 0}$$

$$w(p \vee r) = 1 \text{ i } w\big((p \vee s) \wedge (r \Rightarrow s)\big) = 1 \text{ i } \underline{w(s) = 0}$$

$$w(p \vee r) = 1 \text{ i } w(p \vee s) = 1 \text{ i } w(r \Rightarrow s) = 1 \text{ i } \underline{w(s) = 0}$$

$$w\Big((p \lor r) \land \big((p \lor s) \land (r \Rightarrow s)\big)\Big) = 1 \text{ i } \underline{w(s) = 0}$$

$$w(p \lor r) = 1 \text{ i } w\big((p \lor s) \land (r \Rightarrow s)\big) = 1 \text{ i } \underline{w(s) = 0}$$

$$w(p \lor r) = 1 \text{ i } w(p \lor s) = 1 \text{ i } w(r \Rightarrow s) = 1 \text{ i } \underline{w(s) = 0}$$

$$w(p \lor r) = 1 \text{ i } \underline{w(p) = 1} \text{ i } \underline{w(r) = 0} \text{ i } \underline{w(s) = 0}$$

$$w\Big((p \vee r) \wedge \big((p \vee s) \wedge (r \Rightarrow s)\big)\Big) = 1 \text{ i } \underline{w(s) = 0}$$

$$w(p \vee r) = 1 \text{ i } w\big((p \vee s) \wedge (r \Rightarrow s)\big) = 1 \text{ i } \underline{w(s) = 0}$$

$$w(p \vee r) = 1 \text{ i } w(p \vee s) = 1 \text{ i } w(r \Rightarrow s) = 1 \text{ i } \underline{w(s) = 0}$$

$$w(p \vee r) = 1 \text{ i } \underline{w(p) = 1} \text{ i } \underline{w(r) = 0} \text{ i } \underline{w(s) = 0}$$

brak sprzeczności !

Nie uzyskaliśmy sprzeczności, zatem rzeczywiście <u>β nie jest tautologią</u>.

UWAGA!

1. Kiedy uzyskujemy **pierwszy brak sprzeczności**, przerywamy dowód i stwierdzamy, że schemat rzeczywiście **nie jest tautologią**.

2. Dopiero jeśli **wszystkie przypadki okażą się sprzeczne** możemy stwierdzić, że schemat **jest tautologią**.

Twierdzenia matematyczne na ogół mają postać implikacji

$$p \Rightarrow q$$

p – **poprzednik** implikacji (**założenie twierdzenia**)

q – **następnik** implikacji (**teza twierdzenia**)

Rodzaje implikacji:

Implikacja **prosta**: $p \Rightarrow q$

Implikacja **przeciwstawna**: $\sim q \Rightarrow \sim p$

Implikacja **odwrotna**: $q \Rightarrow p$

Implikacja **przeciwna**: $\sim p \Rightarrow \sim q$

Implikacje prosta i przeciwstawna są równoważne:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

Implikacje odwrotna i przeciwna są równoważne:

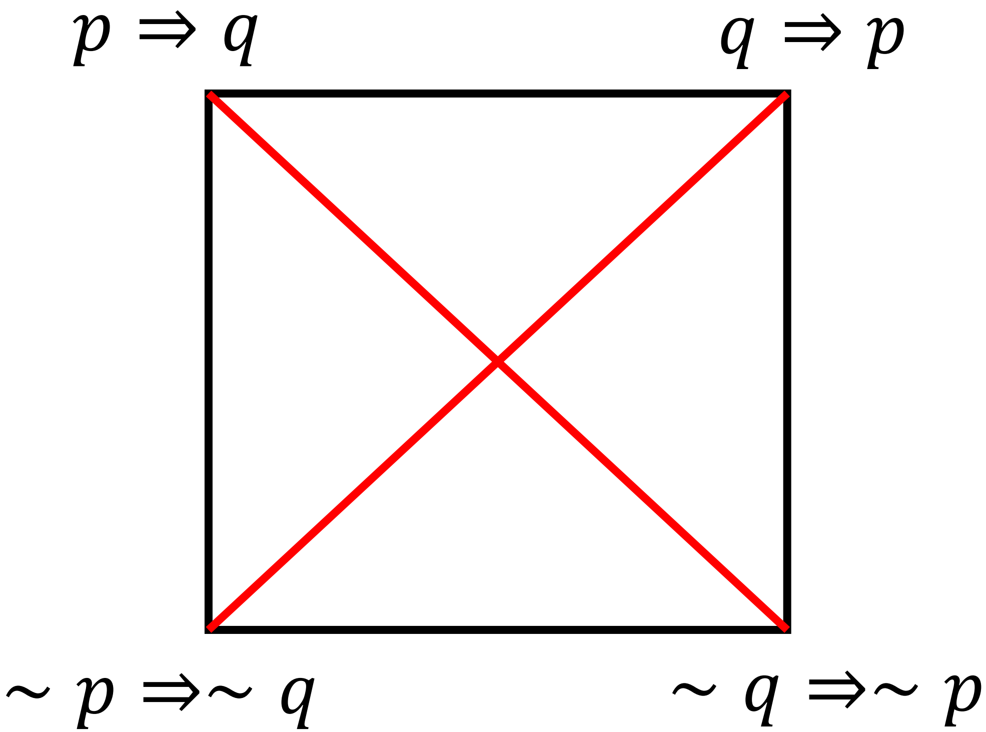
$$(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$$

Aby udowodnić równoważność należy udowodnić zachodzenie obydwu implikacji:

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow p)]$$

Można posłużyć się tutaj kwadratem logicznym.

Kwadrat logiczny:



W implikacji

$$p \Rightarrow q$$

p jest **warunkiem wystarczającym** na to by q

(p wystarcza by zachodziło q: $p \Rightarrow q$)

q jest **warunkiem koniecznym** na to by p

(jeśli q nie zachodzi to nie zachodzi też p: $\sim q \Rightarrow \sim p$)

W równoważności

$$p \Leftrightarrow q$$

p jest **warunkiem koniecznym i wystarczającym** na to by q.

q jest **warunkiem koniecznym i wystarczającym** na to by p.