Matematyka Dyskretna

2. Działania na zbiorach

Zbiór (mnogość) to **nieuporządkowany** zestaw **różnych** obiektów. Jest jest to pojęcie podstawowe, niedefiniowane.

Zbiory oznaczamy wielkimi literami np.: A, B, X, S, T, natomiast ich elementy - małymi : a, b, x, s, t.

Pewne szczególne, często występujące zbiory, mają swoje własne nazwy np.:

$N = \{0,1,2,3,\ldots\}$ - zbiór liczb naturalnych

$Z+ = \{1,2,3,\ldots\}$ - zbiór liczb całkowitych dodatnich

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3,\ldots\}$ - zbiór liczb całkowitych

$Q = \{m/n: m,n \in Z \wedge n \neq 0\}$ - zbiór liczb wymiernych

IQ - zbiór liczb niewymiernych

$R = Q \cup IQ$ - zbiór liczb rzeczywistych

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – n-elementowy zbiór A

$|A|$ – liczebność (moc) zbioru A:

$$|A| = n$$

$\emptyset$ – **zbiór pusty**, zbiór nie zawierający żadnego elementu

X – **przestrzeń**, **uniwersum** czyli ustalony zbiór wszystkich rozważanych elementów

Inkluzja zbiorów:

$$A \subset B$$

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

A – **podzbiór** zbioru B

B – **nadzbiór** zbioru A

Mówimy, że zbiór A jest podzbiorem zbioru B jeżeli każdy element zbioru A należy do zbioru B.

Przykład 1.

$Z+ \subset N \subset Z \subset Q \subset R$

Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A nazywamy zbiorem potęgowym zbioru A i oznaczamy symbolem: P(A).

Wszystkich podzbiorów zbioru A jest $2^{|A|}$, gdzie $|A|$ oznacza moc zbioru A.

Przykład 2.

Wyznaczmy wszystkie podzbiory zbioru A={a, b, c, d}.

P(A)= { ø, {a}, {b}, {c}, {d}, {a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d},{a,b,c}, {a,b,d}, {a,c,d}, {b,c,d}, {a,b,c,d} }

Zbiór potęgowy ma

2^4=16 elementów (podzbiorów).

$$(A = B) \Leftrightarrow [\,(A \subset B) \wedge (B \subset A)]$$

Suma zbiorów A i B to zbiór $A \cup B$ składający się ze wszystkich elementów zbioru A i wszystkich elementów zbioru B i nie zawierający żadnych innych elementów.

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B)$$

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. $A \cup \emptyset = A$
4. $A \cup A = A$
5. $A \cup X = X$
6. $A \subset A \cup B$
7. $B \subset A \cup B$

Iloczyn zbiorów A i B to zbiór $A \cap B$ składający się wyłącznie z tych elementów, które należą jednocześnie do zbioru A i do zbioru B.

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B)$$

1. $A \cap B = B \cap A$
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$
4. $A \cap A = A$
5. $A \cap X = A$
6. $A \cap B \subset A$
7. $A \cap B \subset B$

Zbiory A i B są **rozłączne** jeśli:

$$A \cap B = \emptyset$$

Prawa rozdzielności zbiorów:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Różnica zbiorów A i B to zbiór $A\backslash B$ złożony z tych elementów zbioru A, które nie należą do zbioru B.

$$x \in A\backslash B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$$

$$x \notin A\backslash B \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \in B)$$

1. $A \backslash B \subset A$
2. $A \subset B \Leftrightarrow A \backslash B = \emptyset$
3. $(A \backslash B) \cap B = \emptyset$
4. $(A \backslash B) \cup B = A \cup B$

Dopełnienie zbioru A to zbiór $X \setminus A$.

Dopełnienie zbioru A oznaczamy symbolem A'.

$$x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$$

1. $X' = \emptyset$
2. $\emptyset' = X$
3. $A'' = A$
4. $A \cup A' = X$
5. $A \cap A' = \emptyset$
6. $\boldsymbol{A \backslash B = A \cap B'}$

Prawa De Morgana:

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

Różnica symetryczna zbiorów A i B to zbiór $A \triangle B$ składający się z elementów zbioru A i elementów zbioru B z wyłączeniem tych elementów, które należą jednocześnie do zbiorów A i B.

$$A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$