Matematyka Dyskretna

5. Teoria grafów

Grafy, macierze sąsiedztwa, drogi i cykle Eulera

Grafem $\boldsymbol{G}$ nazywamy uporządkowaną trójkę $G = (V(G), E(G), \gamma(G))$, gdzie:

- $V(G)$ jest niepustym **zbiorem <u>wierzchołków</u>** grafu G(ang. Vertices)
- $E(G)$ jest **zbiorem <u>krawędzi</u>** grafu G (ang. Edges)
- $\gamma(G)$ jest **funkcją <u>incydencji</u>** grafu G

Funkcja incydencji w **grafach nieskierowanych**:

$$\gamma(G): E(G) \rightarrow \{\{v_l, v_k\}: v_l, v_k \in V(G)\}$$

Funkcja incydencji w **grafach skierowanych**:

$$\gamma(G): E(G) \to \{(v_l, v_k): v_l, v_k \in V(G)\}$$

Grafy skierowane nazywamy **digrafami** (ang. directed graph).

W dalszej części wykładu pod pojęciem grafu będziemy rozumieć graf nieskierowany.

Krawędź e nazywamy **krawędzią zwykłą** jeżeli łączy dwa różne wierzchołki, w przeciwnym przypadku nazywamy ją **pętlą**.

Krawędzie e_1 i e_2 nazywamy **krawędziami wielokrotnymi** jeśli $\gamma(e_1) = \gamma(e_2)$.

Wierzchołkiem izolowanym nazywamy wierzchołek, który nie jest końcem żadnej krawędzi.

Drogą grafu $\boldsymbol{G}$ nazywamy dowolny ciąg krawędzi $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ spełniający zależność: $\gamma(e_i) = \{v_i, v_{i+1}\}$. Mówimy, że droga ta ma **długość $\boldsymbol{n}$**. Jeśli $v_{n+1} = v_1$, to drogę nazywamy **zamkniętą**.

Drogę nazywamy **drogą prostą**, jeśli wszystkie krawędzie ją tworzące są różne.

Drogę zamkniętą nazywamy **cyklem**.

Zamkniętą drogę prostą nazywamy **cyklem prostym**.

Graf nie zawierający cykli prostych nazywamy **grafem acyklicznym**.

Graf G nazywamy **prostym** jeśli nie posiada pętli i krawędzi wielokrotnych.

Graf, który ma krawędzie wielokrotne lub pętle nazywamy **multigrafem**.

Każdy graf acykliczny jest grafem prostym.

Stopniem wierzchołka $\boldsymbol{v}$ $(\deg(v))$ **grafu $\boldsymbol{G}$** nazywamy liczbę krawędzi z v jako jednym z wierzchołków, przy czym pętle zliczamy podwójnie.

Liczbą $D_x(G)$ oznaczamy liczbę wierzchołków grafu G stopnia x.

Suma stopni wierzchołków grafu G jest dwa razy większa od liczby jego krawędzi, czyli:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|$$

Grafem regularnym stopnia n nazywamy graf, w którym wszystkie wierzchołki są stopnia n.

Grafem pełnym nazywamy graf prosty, w którym każde dwa wierzchołki są połączone krawędzią.

Graf pełny o n wierzchołkach oznaczamy symbolem K_n.

K_1: 

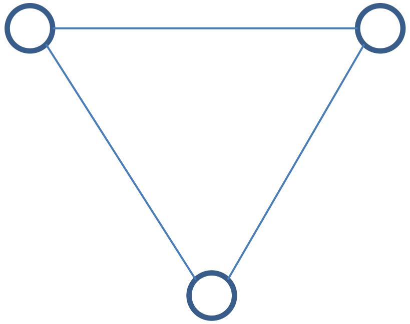
K_1: 

K_2: 

K_1:

K_2:

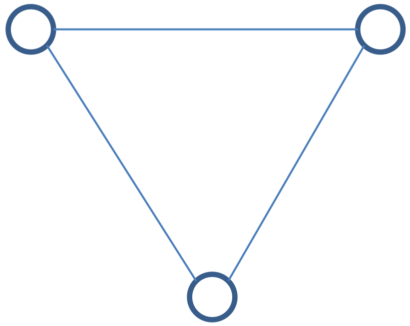
K_3:



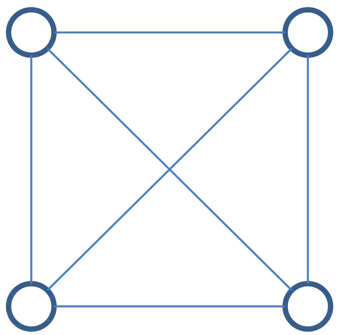
K_1:

K_2:

K_3:



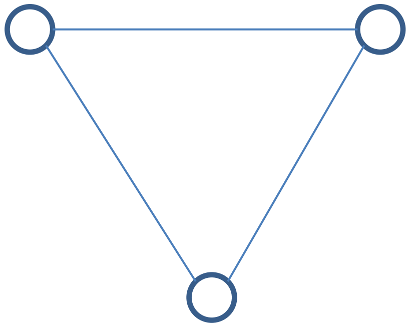
K_4:



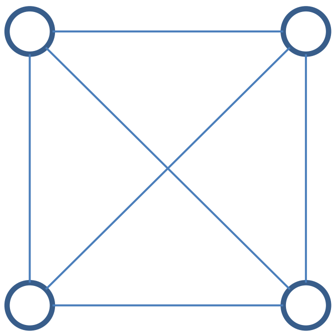
K_1:

K_2:

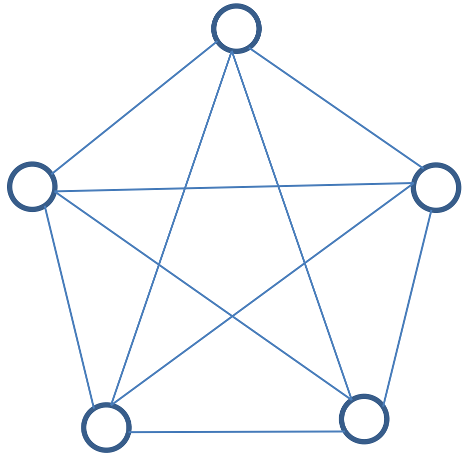
K_3:



K_4:



K_5:



Każdy graf K_n jest grafem regularnym stopnia $n-1$.

Graf K_n ma $\binom{n}{2}$ czyli $\frac{n(n-1)}{2}$ krawędzi.

Jeśli krawędź łączy dwa wierzchołki, to nazywamy je **wierzchołkami sąsiednimi**.

Macierzą sąsiedztwa digrafu G o n wierzchołkach $v_1, v_2, \dots, v_n$ nazwiemy macierz M wymiaru $n \times n$, której każdy wyraz m_{ij} jest liczbą krawędzi od wierzchołka v_i do wierzchołka v_j.

Dla dowolnego digrafu G o n wierzchołkach $v_1, v_2, \ldots, v_n$ liczba dróg o długości $\boldsymbol{p}$ z wierzchołka v_i do wierzchołka v_j jest równa elementowi m_{ij} macierzy $\boldsymbol{M^p}$**,** gdzie M jest macierzą sąsiedztwa digrafu G.

Przykład:

Podaj ile jest dróg długości 4 z wierzchołka v_1 do v_2 oraz z wierzchołka v_3 do v_1 digrafu o macierzy sąsiedztwa:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 14 & 19 & 23 \\ 9 & 18 & 19 \\ 8 & 14 & 19 \end{bmatrix} \text{(drogi długości 2)}$$

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 14 & 19 & 23 \\ 9 & 18 & 19 \\ 8 & 14 & 19 \end{bmatrix} \text{(drogi długości 2)}$$

$$M^4 = \begin{bmatrix} 551 & 930 & 1120 \\ 440 & 761 & 910 \\ 390 & 670 & 811 \end{bmatrix} \text{(drogi długości 4)}$$

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 14 & 19 & 23 \\ 9 & 18 & 19 \\ 8 & 14 & 19 \end{bmatrix} \text{(drogi długości 2)}$$

$$M^4 = \begin{bmatrix} 551 & \color{red}{930} & 1120 \\ 440 & 761 & 910 \\ \color{red}{390} & 670 & 811 \end{bmatrix} \text{(drogi długości 4)}$$

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 14 & 19 & 23 \\ 9 & 18 & 19 \\ 8 & 14 & 19 \end{bmatrix} \text{(drogi długości 2)}$$

$$M^4 = \begin{bmatrix} 551 & 930 & 1120 \\ 440 & 761 & 910 \\ 390 & 670 & 811 \end{bmatrix} \text{(drogi długości 4)}$$

Jest 930 dróg długości 4 z wierzchołka v_1 do v_2 oraz 390 dróg długości 4 z wierzchołka v_3 do v_1.

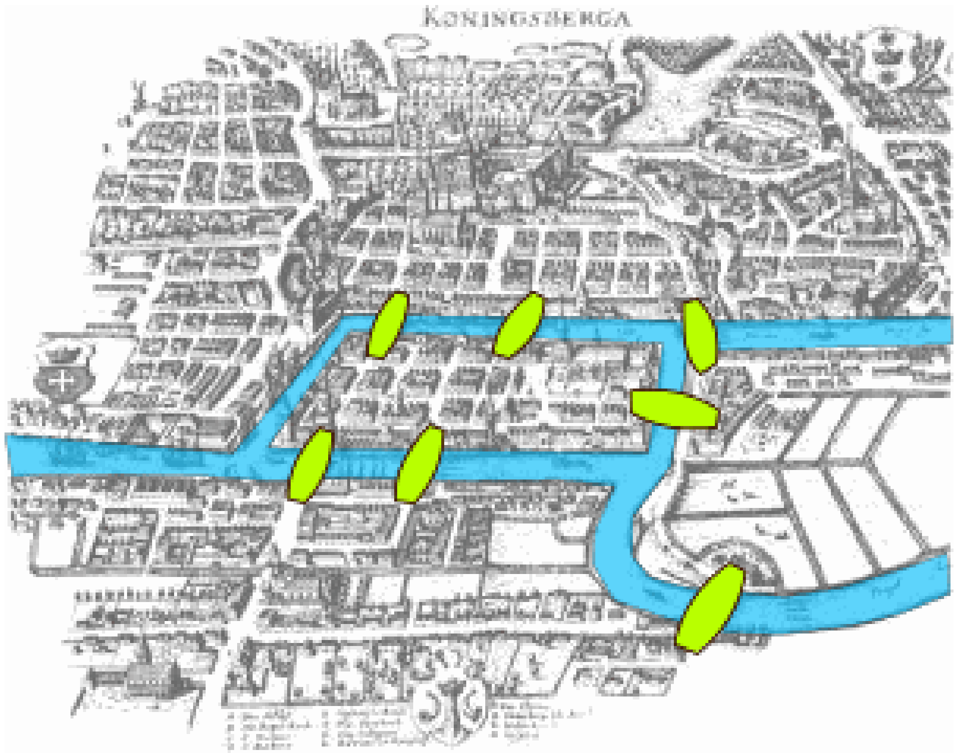
Graf G nazywamy **spójnym**, jeśli każda para różnych wierzchołków jest połączona drogą w tym grafie.

Graf H nazwiemy **podgrafem** grafu G, jeżeli $V(H) \subseteq V(G), E(H) \subseteq E(G)$ oraz $\gamma(G)|_{E(H)} = \gamma(H)$.

Spójny podgraf, który nie jest zawarty w większym spójnym podgrafie grafu G, nazywamy **składową** grafu G.

Zagadnienie mostów królewieckich (XVIII wiek):

Czy można przejść kolejno przez wszystkie 7 mostów tak, żeby każdy przekroczyć tylko raz?



Drogą Eulera w grafie G nazywamy każdą drogę prostą, zawierającą wszystkie krawędzie grafu G.

Cyklem Eulera w grafie G nazywamy każdy cykl prosty, zawierający wszystkie krawędzie grafu G.

Każdy cykl Eulera jest również drogą Eulera.

Twierdzenie Eulera o istnieniu drogi Eulera w grafie:

Graf G ma drogę Eulera $\Leftrightarrow$ graf G jest spójny i ma dokładnie dwa wierzchołki stopnia nieparzystego lub ma wszystkie wierzchołki stopnia parzystego.

Twierdzenie Eulera o istnieniu cyklu Eulera w grafie:

Graf G ma cykl Eulera $\Leftrightarrow$ graf G jest spójny i ma wszystkie wierzchołki stopnia parzystego.