Matematyka Dyskretna

6. Kombinatoryka

Zasada włączeń i wyłączeń (tylko zbiory skończone):

- dla dwóch zbiorów:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

- dla trzech zbiorów:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

- dla n zbiorów:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{\substack{i=1,j=1 \\ i<j}}^{n} \left|A_i \cap A_j\right| +$$

$$\sum_{\substack{i=1,j=1,k=1 \\ i<j<k}}^{n} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Przykład:

Ile jest liczb całkowitych w zbiorze $\{200, 201, 202, \dots, 3000\}$, które są podzielne przez 6 lub 9 lub 12?

A_i – liczby całkowite ze zbioru $\{200, 201, 202, \dots, 3000\}$ podzielne przez i

A_i – liczby całkowite ze zbioru $\{200, 201, 202, \dots, 3000\}$ podzielne przez i

$|A_6 \cup A_9 \cup A_{12}| =$

A_i – liczby całkowite ze zbioru $\{200, 201, 202, \dots, 3000\}$ podzielne przez i

$|A_6 \cup A_9 \cup A_{12}| = |A_6| + |A_9| + |A_{12}| - |A_6 \cap A_9| - |A_9 \cap A_{12}| - |A_6 \cap A_{12}| + |A_6 \cap A_9 \cap A_{12}| =$

A_i – liczby całkowite ze zbioru $\{200, 201, 202, \dots, 3000\}$ podzielne przez i

$$|A_6 \cup A_9 \cup A_{12}| = |A_6| + |A_9| + |A_{12}| - |A_6 \cap A_9| - |A_9 \cap A_{12}| - |A_6 \cap A_{12}| + |A_6 \cap A_9 \cap A_{12}| = |A_6| + |A_9| + |A_{12}| - \left|A_{NWW(6,9)}\right| - \left|A_{NWW(9,12)}\right| - \left|A_{NWW(6,12)}\right| + \left|A_{NWW(6,9,12)}\right| =$$

A_i – liczby całkowite ze zbioru $\{200, 201, 202, \dots, 3000\}$ podzielne przez i

$$|A_6 \cup A_9 \cup A_{12}| = |A_6| + |A_9| + |A_{12}| - |A_6 \cap A_9| - |A_9 \cap A_{12}| - |A_6 \cap A_{12}| + |A_6 \cap A_9 \cap A_{12}| = |A_6| + |A_9| + |A_{12}| - \left|A_{NWW(6,9)}\right| - \left|A_{NWW(9,12)}\right| - \left|A_{NWW(6,12)}\right| + \left|A_{NWW(6,9,12)}\right| = |A_6| + |A_9| + |A_{12}| - |A_{18}| - |A_{36}| - |A_{12}| + |A_{36}| =$$

A_i – liczby całkowite ze zbioru $\{200, 201, 202, \dots, 3000\}$ podzielne przez i

$$|A_6 \cup A_9 \cup A_{12}| = |A_6| + |A_9| + |A_{12}| - |A_6 \cap A_9| - |A_9 \cap A_{12}| - |A_6 \cap A_{12}| + |A_6 \cap A_9 \cap A_{12}| = |A_6| + |A_9| + |A_{12}| - \left|A_{NWW(6,9)}\right| - \left|A_{NWW(9,12)}\right| - \left|A_{NWW(6,12)}\right| + \left|A_{NWW(6,9,12)}\right| = |A_6| + |A_9| + |A_{12}| - |A_{18}| - |A_{36}| - |A_{12}| + |A_{36}| = |A_6| + |A_9| - |A_{18}|$$

$$|A_6 \cup A_9 \cup A_{12}| = |A_6| + |A_9| - |A_{18}|$$

$$|A_6 \cup A_9 \cup A_{12}| = |A_6| + |A_9| - |A_{18}|$$

$$A_6 = \{204, 210, 216, \ldots, 3000\}$$

$$|A_6 \cup A_9 \cup A_{12}| = |A_6| + |A_9| - |A_{18}|$$

$A_6 = \{204, 210, 216, \dots, 3000\}$ – ciąg arytmetyczny

$$|A_6 \cup A_9 \cup A_{12}| = |A_6| + |A_9| - |A_{18}|$$

$A_6 = \{204, 210, 216, \dots, 3000\}$ – ciąg arytmetyczny

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r, r \neq 0$$

$$|A_6 \cup A_9 \cup A_{12}| = |A_6| + |A_9| - |A_{18}|$$

$A_6 = \{204, 210, 216, \dots, 3000\}$ – ciąg arytmetyczny

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r, r \neq 0$$

$$(n-1) \cdot r = a_n - a_1$$

$$n - 1 = \frac{a_n - a_1}{r}$$

$$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$$

$$|A_6 \cup A_9 \cup A_{12}| = |A_6| + |A_9| - |A_{18}|$$

$A_6 = \{204, 210, 216, \ldots, 3000\}$ – ciąg arytmetyczny

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r, r \neq 0$$

$$(n-1) \cdot r = a_n - a_1$$

$$n - 1 = \frac{a_n - a_1}{r}$$

$$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1 \Longrightarrow |A_6| = \frac{3000 - 204}{6} + 1 =$$

$$\frac{2796}{6} + 1 = 466 + 1 = 467$$

$$|A_6 \cup A_9 \cup A_{12}| = |A_6| + |A_9| - |A_{18}|$$

$$|A_6| = 467$$

$A_9 = \{207, 216, 225, \dots, 2997\}$ – ciąg arytmetyczny

$$|A_6 \cup A_9 \cup A_{12}| = |A_6| + |A_9| - |A_{18}|$$

$$|A_6| = 467$$

$A_9 = \{207, 216, 225, \dots, 2997\}$ – ciąg arytmetyczny

$$|A_9| = \frac{2997 - 207}{9} + 1 = \frac{2790}{9} + 1 = 310 + 1 = 311$$

$$|A_6 \cup A_9 \cup A_{12}| = |A_6| + |A_9| - |A_{18}|$$

$$|A_6| = 467$$

$A_9 = \{207, 216, 225, \dots, 2997\}$ – ciąg arytmetyczny

$$|A_9| = \frac{2997 - 207}{9} + 1 = \frac{2790}{9} + 1 = 310 + 1 = 311$$

$A_{18} = \{216, 234, 252, \dots, 2988\}$ – ciąg arytmetyczny

$$|A_6 \cup A_9 \cup A_{12}| = |A_6| + |A_9| - |A_{18}|$$

$$|A_6| = 467$$

$A_9 = \{207, 216, 225, \dots, 2997\}$ – ciąg arytmetyczny

$$|A_9| = \frac{2997 - 207}{9} + 1 = \frac{2790}{9} + 1 = 310 + 1 = 311$$

$A_{18} = \{216, 234, 252, \dots, 2988\}$ – ciąg arytmetyczny

$$|A_{18}| = \frac{2988 - 216}{18} + 1 = \frac{2772}{18} + 1 = 154 + 1 = 155$$

$$|A_6 \cup A_9 \cup A_{12}| = |A_6| + |A_9| - |A_{18}|$$

$$|A_6| = 467$$

$A_9 = \{207, 216, 225, \dots, 2997\}$ – ciąg arytmetyczny

$$|A_9| = \frac{2997 - 207}{9} + 1 = \frac{2790}{9} + 1 = 310 + 1 = 311$$

$A_{18} = \{216, 234, 252, \dots, 2988\}$ – ciąg arytmetyczny

$$|A_{18}| = \frac{2988 - 216}{18} + 1 = \frac{2772}{18} + 1 = 154 + 1 = 155$$

$$|A_6 \cup A_9 \cup A_{12}| = 467 + 311 - 155 = 623$$

Dla zbiorów rozłącznych:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Prawo mnożenia (tylko zbiory skończone):

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$$

Przykład:

Niech $\Sigma = \{a, b, c, d, e, f\}$. Ile słów co najwyżej 5-literowych można zbudować z tego alfabetu?

Σ^i – słowa i-literowe z alfabetu Σ

Σ^i – słowa i-literowe z alfabetu Σ

$\Sigma^2 = \Sigma \times \Sigma$ – słowa 2-literowe z alfabetu Σ

Σ^i – słowa i-literowe z alfabetu Σ

$\Sigma^2 = \Sigma \times \Sigma$ – słowa 2-literowe z alfabetu Σ

$\Sigma^3 = \Sigma \times \Sigma \times \Sigma$ – słowa 3-literowe z alfabetu Σ

itd.

Σ^i – słowa i-literowe z alfabetu Σ

$\Sigma^2 = \Sigma \times \Sigma$ – słowa 2-literowe z alfabetu Σ

$\Sigma^3 = \Sigma \times \Sigma \times \Sigma$ – słowa 3-literowe z alfabetu Σ

itd.

$|\Sigma^2| = |\Sigma \times \Sigma| = |\Sigma| \cdot |\Sigma| = |\Sigma|^2$

Σ^i – słowa i-literowe z alfabetu Σ

$\Sigma^2 = \Sigma \times \Sigma$ – słowa 2-literowe z alfabetu Σ

$\Sigma^3 = \Sigma \times \Sigma \times \Sigma$ – słowa 3-literowe z alfabetu Σ

itd.

$|\Sigma^2| = |\Sigma \times \Sigma| = |\Sigma| \cdot |\Sigma| = |\Sigma|^2$

$|\Sigma^3| = |\Sigma \times \Sigma \times \Sigma| = |\Sigma| \cdot |\Sigma| \cdot |\Sigma| = |\Sigma|^3$

Σ^i – słowa i-literowe z alfabetu Σ

$\Sigma^2 = \Sigma \times \Sigma$ – słowa 2-literowe z alfabetu Σ

$\Sigma^3 = \Sigma \times \Sigma \times \Sigma$ – słowa 3-literowe z alfabetu Σ

itd.

$|\Sigma^2| = |\Sigma \times \Sigma| = |\Sigma| \cdot |\Sigma| = |\Sigma|^2$

$|\Sigma^3| = |\Sigma \times \Sigma \times \Sigma| = |\Sigma| \cdot |\Sigma| \cdot |\Sigma| = |\Sigma|^3$

$\left|\Sigma^i\right| = |\Sigma \times \Sigma \times \ldots \times \Sigma| = |\Sigma| \cdot |\Sigma| \cdot \ldots \cdot |\Sigma| = |\Sigma|^i$

$$\Sigma = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$\Sigma = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Słowa co najwyżej 5-literowe:

$$\Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \Sigma^4 \cup \Sigma^5$$

$$\Sigma = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Słowa co najwyżej 5-literowe:

$$\Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \Sigma^4 \cup \Sigma^5$$

$$|\Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \Sigma^4 \cup \Sigma^5| =$$

$$\Sigma = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Słowa co najwyżej 5-literowe:

$$\Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \Sigma^4 \cup \Sigma^5$$

$$|\Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \Sigma^4 \cup \Sigma^5| =$$

$$|\Sigma| + |\Sigma^2| + |\Sigma^3| + |\Sigma^4| + |\Sigma^5| =$$

$\Sigma = \{a, b, c, d, e, f\}$

Słowa co najwyżej 5-literowe:

$\Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \Sigma^4 \cup \Sigma^5$

$|\Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \Sigma^4 \cup \Sigma^5| =$

$|\Sigma| + |\Sigma^2| + |\Sigma^3| + |\Sigma^4| + |\Sigma^5|$=

$|\Sigma| + |\Sigma|^2 + |\Sigma|^3 + |\Sigma|^4 + |\Sigma|^5 =$

$$\Sigma = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Słowa co najwyżej 5-literowe:

$$\Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \Sigma^4 \cup \Sigma^5$$

$$|\Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \Sigma^4 \cup \Sigma^5| =$$

$$|\Sigma| + |\Sigma^2| + |\Sigma^3| + |\Sigma^4| + |\Sigma^5| =$$

$$|\Sigma| + |\Sigma|^2 + |\Sigma|^3 + |\Sigma|^4 + |\Sigma|^5 =$$

$$6 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + 6^5 =$$

$$\Sigma = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Słowa co najwyżej 5-literowe:

$$\Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \Sigma^4 \cup \Sigma^5$$

$$|\Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \Sigma^4 \cup \Sigma^5| =$$

$$|\Sigma| + |\Sigma^2| + |\Sigma^3| + |\Sigma^4| + |\Sigma^5| =$$

$$|\Sigma| + |\Sigma|^2 + |\Sigma|^3 + |\Sigma|^4 + |\Sigma|^5 =$$

$$6 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + 6^5 =$$

$$6 + 36 + 216 + 1296 + 7776 = 9330$$

Przykład:

Ile jest liczb trzycyfrowych większych od 123, mających różne cyfry?

trzycyfrowe o różnych cyfrach > 123:

trzycyfrowe o różnych cyfrach > 123:

$$1\ 2\ \_$$

cyfra jedności > 3:

trzycyfrowe o różnych cyfrach > 123:

$$1\ 2\ \_$$

cyfra jedności > 3: 6 możliwości

czyli 6 liczb

trzycyfrowe o różnych cyfrach > 123:

$$1\,2\,\_$$

cyfra jedności > 3: 6 możliwości

czyli 6 liczb

$$1\,\_\,\_$$

cyfra dziesiątek > 2:

trzycyfrowe o różnych cyfrach > 123:

$$1\,2\,\_$$

cyfra jedności > 3: 6 możliwości

czyli 6 liczb

$$1\,\_\,\_$$

cyfra dziesiątek > 2: 7 możliwości

cyfra jedności:

trzycyfrowe o różnych cyfrach > 123:

$$1\ 2\ \_$$

cyfra jedności > 3: 6 możliwości

czyli 6 liczb

$$1\ \_\ \_$$

cyfra dziesiątek > 2: 7 możliwości

cyfra jedności: 8 możliwości

czyli

trzycyfrowe o różnych cyfrach > 123:

$$1\,2\,\_$$

cyfra jedności > 3: 6 możliwości

czyli 6 liczb

$$1\,\_\,\_$$

cyfra dziesiątek > 2: 7 możliwości

cyfra jedności: 8 możliwości

czyli $7 \cdot 8 = 56$ liczb

trzycyfrowe o różnych cyfrach > 123:

$$\_\ \_\ \_$$

cyfra setek > 1:

trzycyfrowe o różnych cyfrach > 123:

$$\_\ \_\ \_$$

cyfra setek > 1: 8 możliwości

cyfra dziesiątek:

trzycyfrowe o różnych cyfrach > 123:

$$\_\,\_\,\_$$

cyfra setek > 1: 8 możliwości

cyfra dziesiątek: 9 możliwości

cyfra jedności:

trzycyfrowe o różnych cyfrach > 123:

$$\_\ \_\ \_$$

cyfra setek > 1: 8 możliwości

cyfra dziesiątek: 9 możliwości

cyfra jedności: 8 możliwości

czyli

trzycyfrowe o różnych cyfrach > 123:

$$\_\ \_\ \_$$

cyfra setek > 1: 8 możliwości

cyfra dziesiątek: 9 możliwości

cyfra jedności: 8 możliwości

czyli $8 \cdot 9 \cdot 8 = 576$ liczb

trzycyfrowe o różnych cyfrach > 123:

$$\_\,\_\,\_$$

cyfra setek > 1: 8 możliwości

cyfra dziesiątek: 9 możliwości

cyfra jedności: 8 możliwości

czyli $8 \cdot 9 \cdot 8 = 576$ liczb

W sumie: $6 + 56 + 576 = 638$ liczb

Niech dany będzie zbiór Z_n złożony z n elementów.

k-elementową ($k \leq n$) **wariacją bez powtórzeń** V_n^k ze zbioru Z_n nazywamy każdy k-elementowy **ciąg** utworzony z elementów zbioru Z_n taki, że elementy w tym ciągu **nie mogą się powtarzać**.

Niech $Z_4 = \{a, b, c, d\}$.

$V_4^2 = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d),$
$(c, a), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c)\}$

Liczba wszystkich k-elementowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru Z_n wyraża się wzorem:

$$\left|V_n^k\right| = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Niech $Z_4 = \{a, b, c, d\}$.

$$V_4^2 = \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,c), (b,d), (c,a), (c,b), (c,d), (d,a), (d,b), (d,c)\}$$

$$|V_4^2| = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 12$$

Wariację bez powtórzeń V_n^n nazywamy **permutacją** P_n zbioru Z_n.

Czyli:

$$P_n = V_n^n$$

Niech $Z_3 = \{a, b, c\}$.

$P_3 = V_3^3 = \{(a, b, c), (b, a, c), (a, c, b), (c, a, b),$
$(b, c, a), (c, b, a)\}$

Liczba wszystkich permutacji zbioru Z_n wyraża się wzorem:

$$|P_n| = |V_n^n| = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Niech $Z_3 = \{a, b, c\}$.

$P_3 = V_3^3 = \{(a, b, c), (b, a, c), (a, c, b), (c, a, b),$
$(b, c, a), (c, b, a)\}$

$|P_3| = 3! = 6$

k-elementową **wariacją z powtórzeniami** W_n^k ze zbioru Z_n nazywamy każdy k-elementowy **ciąg** utworzony z elementów zbioru Z_n taki, że elementy w tym ciągu **mogą się powtarzać**.

Niech $Z_4 = \{a, b, c, d\}$.

$W_4^2 = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d),$
$(c, a), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c), (a, a)$
$(b, b), (c, c), (d, d)\}$

Liczba wszystkich k-elementowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru Z_n wyraża się wzorem:

$$\left|W_n^k\right| = n^k$$

Niech $Z_4 = \{a, b, c, d\}$.

$W_4^2 = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, c), (b, d),$
$(c, a), (c, b), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c), (a, a)$
$(b, b), (c, c), (d, d)\}$

$|W_4^2| = 4^2 = 16$

k-elementową ($k \leq n$) **kombinacją bez powtórzeń** C_n^k ze zbioru Z_n nazywamy każdy k-elementowy **podzbiór** utworzony z elementów zbioru Z_n. Skoro podzbiór, to elementy **nie mogą się powtarzać**.

Niech $Z_4 = \{a, b, c, d\}$.

$C_4^2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$

Liczba wszystkich k-elementowych kombinacji bez powtórzeń ze zbioru Z_n wyraża się wzorem:

$$\left|C_n^k\right| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Niech $Z_4 = \{a, b, c, d\}$.

$$C_4^2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$$

$$|C_4^2| = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 6$$

Własności liczebności kombinacji:

- $\left|C_n^k\right| = \left|C_n^{n-k}\right|$ (bo $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$)
- $|C_n^0| = 1$ (zbiór pusty) (bo $\binom{n}{0} = 1$)
- $|C_n^n| = 1$ (cały zbiór) (bo $\binom{n}{n} = 1$)
- $|C_n^1| = |C_n^{n-1}| = n$ (bo $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$)

Związek między wariacją a kombinacją:

$$\left|V_n^k\right| = \left|C_n^k\right| \cdot |P_k|$$

Wybór elementów do wariacji to inaczej wybranie elementów bez kolejności (kombinacja) i ułożenie w pewnej kolejności (permutacja).

$$\left|V_n^k\right| = \left|C_n^k\right| \cdot |P_k|$$

Dowód:

$$P = \left|C_n^k\right| \cdot |P_k| = \binom{n}{k} \cdot k! =$$

$$\left|V_n^k\right| = \left|C_n^k\right| \cdot |P_k|$$

Dowód:

$$P = \left|C_n^k\right| \cdot |P_k| = \binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot k! =$$

$$\left|V_n^k\right| = \left|C_n^k\right| \cdot |P_k|$$

Dowód:

$$P = \left|C_n^k\right| \cdot |P_k| = \binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot k! =$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} =$$

$$\left|V_n^k\right| = \left|C_n^k\right| \cdot |P_k|$$

Dowód:

$$P = \left|C_n^k\right| \cdot |P_k| = \binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot k! =$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \left|V_n^k\right| = L$$

Niech $Z_4 = \{a, b, c, d\}$.

$C_4^2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$

Niech $Z_4 = \{a, b, c, d\}$.

$C_4^2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$

$\{a, b\} \longrightarrow \{(a, b), (b, a)\}$

Niech $Z_4 = \{a, b, c, d\}$.

$C_4^2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$

$\{a, b\} \longrightarrow \{(a, b), (b, a)\}$

$\{a, c\} \longrightarrow \{(a, c), (c, a)\}$

Niech $Z_4 = \{a, b, c, d\}$.

$C_4^2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$

$\{a, b\} \longrightarrow \{(a, b), (b, a)\}$

$\{a, c\} \longrightarrow \{(a, c), (c, a)\}$

…

Niech $Z_4 = \{a, b, c, d\}$.

$C_4^2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$

$\{a, b\} \longrightarrow \{(a, b), (b, a)\}$

$\{a, c\} \longrightarrow \{(a, c), (c, a)\}$

…

$\{c, d\} \longrightarrow \{(c, d), (d, c)\}$

Niech $Z_4 = \{a, b, c, d\}$.

$C_4^2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$

$\{a, b\} \longrightarrow \{(a, b), (b, a)\}$

$\{a, c\} \longrightarrow \{(a, c), (c, a)\}$

…

$\{c, d\} \longrightarrow \{(c, d), (d, c)\}$

$V_4^2 = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (a, d), (d, a),$
$(b, c), (c, b), (b, d), (d, b), (c, d), (d, c)\}$

Niech $Z_4 = \{a, b, c, d\}$.

$$C_4^2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$$

$$V_4^2 = \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (a, d), (d, a),$$
$$(b, c), (c, b), (b, d), (d, b), (c, d), (d, c)\}$$

$$|C_4^2| \cdot |P_2| = 6 \cdot 2 = |V_4^2|$$

Liczba wszystkich podzbiorów zbioru n-elementowego jest równa 2^n.

Dowód:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

k-elementową **kombinacją z powtórzeniami** K_n^k ze zbioru Z_n nazywamy każdy k-elementowy **wielozbiór** utworzony z elementów zbioru Z_n. Skoro wielozbiór, to elementy **mogą się powtarzać**.

Niech $Z_4 = \{a, b, c, d\}$.

$K_4^2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\},$
$\{a, a\}, \{b, b\}, \{c, c\}, \{d, d\}\}$

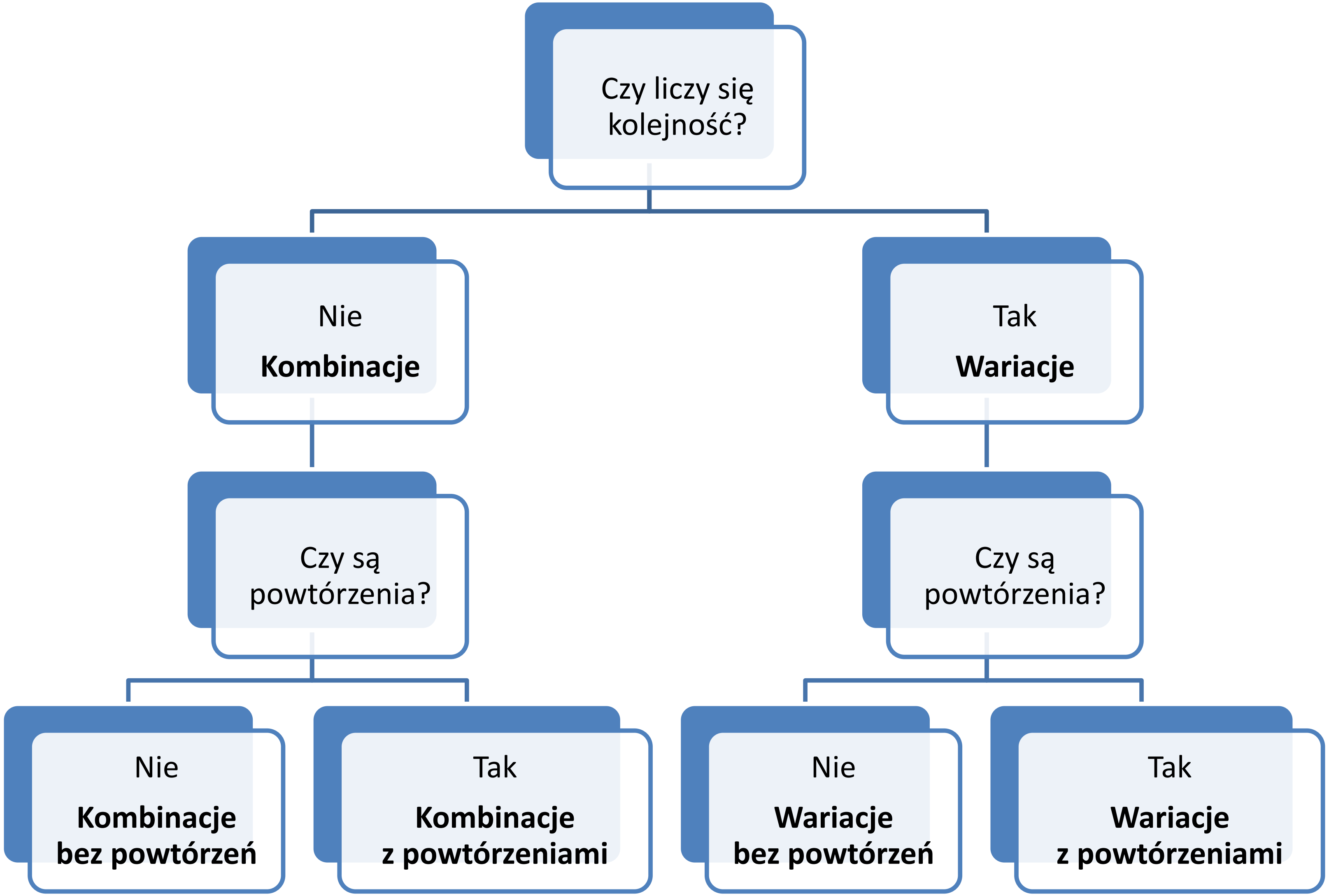
Liczba wszystkich k-elementowych kombinacji z powtórzeniami ze zbioru Z_n wyraża się wzorem:

$$|K_n^k| = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

Niech $Z_4 = \{a, b, c, d\}$.

$K_4^2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\},$
$\{a, a\}, \{b, b\}, \{c, c\}, \{d, d\}\}$

$$|K_4^2| = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} =$$
$$\frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} = 10$$


Czy liczy się kolejność?
Nie
Kombinacje
Tak
Wariacje
Czy są powtórzenia?
Czy są powtórzenia?
Nie
Kombinacje bez powtórzeń
Tak
Kombinacje z powtórzeniami
Nie
Wariacje bez powtórzeń
Tak
Wariacje z powtórzeniami

UWAGA!

Jeśli w zadaniu nie ma informacji, że obiekty są identyczne (nierozróżnialne), to **przyjmujemy, że są rozróżnialne**.

Przykład:

Na parking, na którym jest 13 wolnych miejsc, wjechało 5 samochodów. Na ile sposobów mogą zaparkować?

Przyporządkowanie:

- samochodom miejsca parkingowe?
- miejscom parkingowym samochody?

Przyporządkowanie:

- samochodom miejsca parkingowe? TAK
- miejscom parkingowym samochody? NIE

Na przykład: $(12, 2, 4, 8, 11)$

Przyporządkowanie:

- samochodom miejsca parkingowe? TAK
- miejscom parkingowym samochody? NIE

Na przykład: $(12, 2, 4, 8, 11)$

Czy liczy się kolejność?

Przyporządkowanie:

- samochodom miejsca parkingowe? TAK
- miejscom parkingowym samochody? NIE

Na przykład: $(12, 2, 4, 8, 11)$

Czy liczy się kolejność? TAK

Przyporządkowanie:

- samochodom miejsca parkingowe? TAK
- miejscom parkingowym samochody? NIE

Na przykład: $(12, 2, 4, 8, 11)$

Czy liczy się kolejność? TAK

Czy są powtórzenia?

Przyporządkowanie:

- samochodom miejsca parkingowe? TAK
- miejscom parkingowym samochody? NIE

Na przykład: $(12, 2, 4, 8, 11)$

Czy liczy się kolejność? TAK

Czy są powtórzenia? NIE

Przyporządkowanie:

- samochodom miejsca parkingowe? TAK
- miejscom parkingowym samochody? NIE

Na przykład: $(12, 2, 4, 8, 11)$

Czy liczy się kolejność? TAK

Czy są powtórzenia? NIE

Wariacje bez powtórzeń:

Przyporządkowanie:

- samochodom miejsca parkingowe? TAK
- miejscom parkingowym samochody? NIE

Na przykład: $(12, 2, 4, 8, 11)$

Czy liczy się kolejność? TAK

Czy są powtórzenia? NIE

Wariacje bez powtórzeń: $\left|V_{13}^{5}\right| = \frac{13!}{(13-5)!} = \frac{13!}{8!} = \frac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8!}{8!} = 154440$

Przykład:

Na parking, na którym jest 13 wolnych miejsc, wjechało 5 identycznych (nierozróżnialnych) samochodów. Na ile sposobów mogą zaparkować?

Przyporządkowanie:

- samochodom miejsca parkingowe? TAK
- miejscom parkingowym samochody? NIE

Na przykład: $\{12, 2, 4, 8, 11\}$

Przyporządkowanie:

- samochodom miejsca parkingowe? TAK
- miejscom parkingowym samochody? NIE

Na przykład: $\{12, 2, 4, 8, 11\}$

Czy liczy się kolejność?

Przyporządkowanie:

- samochodom miejsca parkingowe? TAK
- miejscom parkingowym samochody? NIE

Na przykład: $\{12, 2, 4, 8, 11\}$

Czy liczy się kolejność? NIE (przedmioty nierozróżnialne)

Przyporządkowanie:

- samochodom miejsca parkingowe? TAK
- miejscom parkingowym samochody? NIE

Na przykład: $\{12, 2, 4, 8, 11\}$

Czy liczy się kolejność? NIE (przedmioty nierozróżnialne)

Czy są powtórzenia?

Przyporządkowanie:

- samochodom miejsca parkingowe? TAK
- miejscom parkingowym samochody? NIE

Na przykład: $\{12, 2, 4, 8, 11\}$

Czy liczy się kolejność? NIE (przedmioty nierozróżnialne)

Czy są powtórzenia? NIE

Przyporządkowanie:

- samochodom miejsca parkingowe? TAK
- miejscom parkingowym samochody? NIE

Na przykład: $\{12, 2, 4, 8, 11\}$

Czy liczy się kolejność? NIE (przedmioty nierozróżnialne)

Czy są powtórzenia? NIE

Kombinacje bez powtórzeń:

Przyporządkowanie:

- samochodom miejsca parkingowe? TAK
- miejscom parkingowym samochody? NIE

Na przykład: $\{12, 2, 4, 8, 11\}$

Czy liczy się kolejność? NIE (przedmioty nierozróżnialne)

Czy są powtórzenia? NIE

Kombinacje bez powtórzeń: $\left|C_{13}^{5}\right| = \binom{13}{5} = \frac{13!}{5!8!} =$
$\frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8!} = 13 \cdot 11 \cdot 9 = 1287$

Przykład:

Na ile sposobów można wyciągnąć bez zwracania 8 kart z talii 52 kart, wśród których będą dokładnie 4 piki, 1 trefl i 2 kiery?

O talii kart:

- 13 wartości: 2, 3, ..., 9, 10, J, Q, K, A
- 4 kolory: ♥ (kier), ♦ (karo), ♣ (trefl), ♠ (pik)

8 kart bez zwracania, dokładnie 4 piki, 1 trefl, 2 kiery

8 kart bez zwracania, dokładnie 4 piki, 1 trefl, 2 kiery i 1 karo

Na przykład: {3♠,Q♠,5♠,10♠,8♣,A♥,4♥,3♦}

8 kart bez zwracania, dokładnie 4 piki, 1 trefl, 2 kiery i 1 karo

Na przykład: {3♠,Q♠,5♠,10♠,8♣,A♥,4♥,3♦}

Czy liczy się kolejność?

8 kart bez zwracania, dokładnie 4 piki, 1 trefl, 2 kiery i 1 karo

Na przykład: {3♠,Q♠,5♠,10♠,8♣,A♥,4♥,3♦}

Czy liczy się kolejność? NIE (karty w ręku)

8 kart bez zwracania, dokładnie 4 piki, 1 trefl, 2 kiery i 1 karo

Na przykład: {3♠,Q♠,5♠,10♠,8♣,A♥,4♥,3♦}

Czy liczy się kolejność? NIE (karty w ręku)

Czy są powtórzenia?

8 kart bez zwracania, dokładnie 4 piki, 1 trefl, 2 kiery i 1 karo

Na przykład: {3♠,Q♠,5♠,10♠,8♣,A♥,4♥,3♦}

Czy liczy się kolejność? NIE (karty w ręku)

Czy są powtórzenia? NIE (bez zwracania)

8 kart bez zwracania, dokładnie 4 piki, 1 trefl, 2 kiery i 1 karo

Kombinacje bez powtórzeń:

8 kart bez zwracania, dokładnie 4 piki, 1 trefl, 2 kiery i 1 karo

Kombinacje bez powtórzeń:

- wybór pików:

8 kart bez zwracania, dokładnie 4 piki, 1 trefl, 2 kiery i 1 karo

Kombinacje bez powtórzeń:

- wybór pików: $|C_{13}^{4}| = \binom{13}{4} = \frac{13!}{4!9!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9!} =$
  $13 \cdot 11 \cdot 5 = 715$
- wybór trefla:

8 kart bez zwracania, dokładnie 4 piki, 1 trefl, 2 kiery i 1 karo

Kombinacje bez powtórzeń:

- wybór pików: $|C_{13}^{4}| = \binom{13}{4} = \frac{13!}{4!9!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9!} =$
  $13 \cdot 11 \cdot 5 = 715$
- wybór trefla: $|C_{13}^{1}| = \binom{13}{1} = 13$
- wybór kierów:

8 kart bez zwracania, dokładnie 4 piki, 1 trefl, 2 kiery i 1 karo

Kombinacje bez powtórzeń:

- wybór pików: $|C_{13}^{4}| = \binom{13}{4} = \frac{13!}{4!9!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9!} =$
  $13 \cdot 11 \cdot 5 = 715$
- wybór trefla: $|C_{13}^{1}| = \binom{13}{1} = 13$
- wybór kierów: $|C_{13}^{2}| = \binom{13}{2} = \frac{13!}{2!11!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11!}{2 \cdot 11!} = 13 \cdot 6 = 78$
- wybór karo:

8 kart bez zwracania, dokładnie 4 piki, 1 trefl, 2 kiery i 1 karo

Kombinacje bez powtórzeń:

- wybór pików: $|C_{13}^{4}| = \binom{13}{4} = \frac{13!}{4!9!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9!} =$
  $13 \cdot 11 \cdot 5 = 715$
- wybór trefla: $|C_{13}^{1}| = \binom{13}{1} = 13$
- wybór kierów: $|C_{13}^{2}| = \binom{13}{2} = \frac{13!}{2!11!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11!}{2 \cdot 11!} = 13 \cdot 6 = 78$
- wybór karo: $|C_{13}^{1}| = \binom{13}{1} = 13$

8 kart bez zwracania, dokładnie 4 piki, 1 trefl, 2 kiery i 1 karo

Kombinacje bez powtórzeń:

- wybór pików: $|C_{13}^4| = \binom{13}{4} = \frac{13!}{4!9!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9!} =$ $13 \cdot 11 \cdot 5 = 715$
- wybór trefla: $|C_{13}^1| = \binom{13}{1} = 13$
- wybór kierów: $|C_{13}^2| = \binom{13}{2} = \frac{13!}{2!11!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11!}{2 \cdot 11!} = 13 \cdot 6 = 78$
- wybór karo: $|C_{13}^1| = \binom{13}{1} = 13$

$$|C_{13}^4| \cdot |C_{13}^1| \cdot |C_{13}^2| \cdot |C_{13}^1| = 715 \cdot 13 \cdot 78 \cdot 13 = 9425130$$

Przykład:

Na ile sposobów można wyciągnąć ze zwracaniem 8 kart z talii 52 kart, wśród których będą dokładnie 4 piki, 1 trefl i 2 kiery?

8 kart ze zwracaniem, dokładnie 4 piki, 1 trefl, 2 kiery i 1 karo

Na przykład: {3♠,Q♠,5♠,3♠,8♣,A♥,4♥,3♦}

Czy liczy się kolejność?

8 kart ze zwracaniem, dokładnie 4 piki, 1 trefl, 2 kiery i 1 karo

Na przykład: {3♠,Q♠,5♠,3♠,8♣,A♥,4♥,3♦}

Czy liczy się kolejność? NIE (karty w ręku)

8 kart ze zwracaniem, dokładnie 4 piki, 1 trefl, 2 kiery i 1 karo

Na przykład: {3♠,Q♠,5♠,3♠,8♣,A♥,4♥,3♦}

Czy liczy się kolejność? NIE (karty w ręku)

Czy są powtórzenia?

8 kart ze zwracaniem, dokładnie 4 piki, 1 trefl, 2 kiery i 1 karo

Na przykład: {3♠,Q♠,5♠,3♠,8♣,A♥,4♥,3♦}

Czy liczy się kolejność? NIE (karty w ręku)

Czy są powtórzenia? TAK (ze zwracaniem)

8 kart ze zwracaniem, dokładnie 4 piki, 1 trefl, 2 kiery i 1 karo

Kombinacje z powtórzeniami:

- wybór pików:

8 kart ze zwracaniem, dokładnie 4 piki, 1 trefl, 2 kiery i 1 karo

Kombinacje z powtórzeniami:

- wybór pików: $\left|K_{13}^{4}\right| = \binom{13+4-1}{4} = \binom{16}{4} = \frac{16!}{4!12!} = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12!}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 12!} = 2\cdot 5\cdot 14\cdot 13 = 1820$

8 kart ze zwracaniem, dokładnie 4 piki, 1 trefl, 2 kiery i 1 karo

Kombinacje z powtórzeniami:

- wybór pików: $\left|K_{13}^{4}\right| = \binom{13+4-1}{4} = \binom{16}{4} = \frac{16!}{4!12!} = \frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12!}{2\cdot3\cdot4\cdot12!} = 2\cdot5\cdot14\cdot13 = 1820$
- wybór trefla: $\left|K_{13}^{1}\right| = \binom{13+1-1}{1} = \binom{13}{1} = 13$

8 kart ze zwracaniem, dokładnie 4 piki, 1 trefl, 2 kiery i 1 karo

Kombinacje z powtórzeniami:

- wybór pików: $\left|K_{13}^{4}\right| = \binom{13+4-1}{4} = \binom{16}{4} = \frac{16!}{4!12!} = \frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12!}{2\cdot3\cdot4\cdot12!} = 2\cdot5\cdot14\cdot13 = 1820$
- wybór trefla: $\left|K_{13}^{1}\right| = \binom{13+1-1}{1} = \binom{13}{1} = 13$
- wybór kierów: $\left|K_{13}^{2}\right| = \binom{13+2-1}{2} = \binom{14}{2} = \frac{14!}{2!12!} = \frac{14\cdot13\cdot12!}{2\cdot12!} = 7\cdot13 = 91$

8 kart ze zwracaniem, dokładnie 4 piki, 1 trefl, 2 kiery i 1 karo

Kombinacje z powtórzeniami:

- wybór pików: $\left|K_{13}^{4}\right| = \binom{13+4-1}{4} = \binom{16}{4} = \frac{16!}{4!12!} = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12!}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 12!} = 2\cdot 5\cdot 14\cdot 13 = 1820$
- wybór trefla: $\left|K_{13}^{1}\right| = \binom{13+1-1}{1} = \binom{13}{1} = 13$
- wybór kierów: $\left|K_{13}^{2}\right| = \binom{13+2-1}{2} = \binom{14}{2} = \frac{14!}{2!12!} = \frac{14\cdot 13\cdot 12!}{2\cdot 12!} = 7\cdot 13 = 91$
- wybór karo: $\left|K_{13}^{1}\right| = \binom{13+1-1}{1} = \binom{13}{1} = 13$

8 kart ze zwracaniem, dokładnie 4 piki, 1 trefl, 2 kiery i 1 karo

Kombinacje z powtórzeniami:

- wybór pików: $\left|K_{13}^{4}\right| = \binom{13+4-1}{4} = \binom{16}{4} = \frac{16!}{4!12!} = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12!}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 12!} = 2\cdot 5\cdot 14\cdot 13 = 1820$
- wybór trefla: $\left|K_{13}^{1}\right| = \binom{13+1-1}{1} = \binom{13}{1} = 13$
- wybór kierów: $\left|K_{13}^{2}\right| = \binom{13+2-1}{2} = \binom{14}{2} = \frac{14!}{2!12!} = \frac{14\cdot 13\cdot 12!}{2\cdot 12!} = 7\cdot 13 = 91$
- wybór karo: $\left|K_{13}^{1}\right| = \binom{13+1-1}{1} = \binom{13}{1} = 13$

$$\left|K_{13}^{4}\right|\cdot\left|K_{13}^{1}\right|\cdot\left|K_{13}^{2}\right|\cdot\left|K_{13}^{1}\right| = 1820\cdot 13\cdot 91\cdot 13 = 27989780$$

Przykład:

Na ile sposobów można ułożyć
6 ponumerowanych kul w 9 pojemnikach?

Przyporządkowanie:

- kulom pojemniki?
- pojemnikom kule?

Przyporządkowanie:

- kulom pojemniki? TAK
- pojemnikom kule? NIE

Na przykład: $(2, 9, 2, 8, 5, 8)$

Przyporządkowanie:

- kulom pojemniki? TAK
- pojemnikom kule? NIE

Na przykład: $(2, 9, 2, 8, 5, 8)$

Czy liczy się kolejność?

Przyporządkowanie:

- kulom pojemniki? TAK
- pojemnikom kule? NIE

Na przykład: $(2, 9, 2, 8, 5, 8)$

Czy liczy się kolejność? TAK

Przyporządkowanie:

- kulom pojemniki? TAK
- pojemnikom kule? NIE

Na przykład: $(2, 9, 2, 8, 5, 8)$

Czy liczy się kolejność? TAK

Czy są powtórzenia?

Przyporządkowanie:

- kulom pojemniki? TAK
- pojemnikom kule? NIE

Na przykład: $(2, 9, 2, 8, 5, 8)$

Czy liczy się kolejność? TAK

Czy są powtórzenia? TAK

Przyporządkowanie:

- kulom pojemniki? TAK
- pojemnikom kule? NIE

Na przykład: $(2, 9, 2, 8, 5, 8)$

Czy liczy się kolejność? TAK

Czy są powtórzenia? TAK

Wariacje z powtórzeniami:

Przyporządkowanie:

- kulom pojemniki? TAK
- pojemnikom kule? NIE

Na przykład: $(2, 9, 2, 8, 5, 8)$

Czy liczy się kolejność? TAK

Czy są powtórzenia? TAK

Wariacje z powtórzeniami: $|W_9^6| = 9^6 = 531441$

Przykład:

Na ile sposobów można utworzyć 7-cyfrową liczbę, tak aby miała dokładnie 3 cyfry parzyste?

UWAGA!

Liczby (z wyjątkiem liczby 0) **nie mogą** zaczynać się cyfrą 0.

Numery **mogą** zaczynać się cyfrą 0.

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

I sposób:

1. Liczba zaczyna się cyfrą parzystą:

$P\_\,\_\,\_\,\_\,\_\,\_$

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

I sposób:

1. Liczba zaczyna się cyfrą parzystą:

$P\_\_\_\_\_\_$

Pierwsza cyfra: 4 możliwości: $\{2, 4, 6, 8\}$

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

I sposób:

1. Liczba zaczyna się cyfrą parzystą:

$P\_\_\_\_\_\_$

Pierwsza cyfra: 4 możliwości: $\{2, 4, 6, 8\}$

Wybór miejsc dla 2 cyfr parzystych:

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

I sposób:

1. Liczba zaczyna się cyfrą parzystą:

$P\_\_\_\_\_\_$

Pierwsza cyfra: 4 możliwości: $\{2, 4, 6, 8\}$

Wybór miejsc dla 2 cyfr parzystych: $|C_6^2| = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{2\cdot 4!} = 15$, na przykład: $PNNPNPN$

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

I sposób:

1. Liczba zaczyna się cyfrą parzystą:

$P\_\_\_\_\_\_$

Pierwsza cyfra: 4 możliwości: $\{2, 4, 6, 8\}$

Wybór miejsc dla 2 cyfr parzystych: $|C_6^2| = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} = 15$, na przykład: $PNNPNPN$

Ustalenie cyfr parzystych i nieparzystych:

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

I sposób:

1. Liczba zaczyna się cyfrą parzystą:

$P\_\_\_\_\_\_$

Pierwsza cyfra: 4 możliwości: $\{2, 4, 6, 8\}$

Wybór miejsc dla 2 cyfr parzystych: $|C_6^2| = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{2\cdot 4!} = 15$, na przykład: $PNNPNPN$

Ustalenie cyfr parzystych i nieparzystych: 5^6

Podsumowując mamy takich liczb:

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

I sposób:

1. Liczba zaczyna się cyfrą parzystą:

$P\_\_\_\_\_\_$

Pierwsza cyfra: 4 możliwości: $\{2,4,6,8\}$

Wybór miejsc dla 2 cyfr parzystych: $|C_6^2| = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{2\cdot 4!} = 15$, na przykład: $PNNPNPN$

Ustalenie cyfr parzystych i nieparzystych: 5^6

Podsumowując mamy takich liczb: $4\cdot 15\cdot 5^6 = 12\cdot 5^7$

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

I sposób:

2. Liczba zaczyna się cyfrą nieparzystą:

N_ _ _ _ _ _

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

I sposób:

2. Liczba zaczyna się cyfrą nieparzystą:

N_ _ _ _ _ _

Pierwsza cyfra: 5 możliwości: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

I sposób:

2. Liczba zaczyna się cyfrą nieparzystą:

$N\_\_\_\_\_\_\_$

Pierwsza cyfra: 5 możliwości: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

Wybór miejsc dla 3 cyfr parzystych:

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

I sposób:

2. Liczba zaczyna się cyfrą nieparzystą:

N_ _ _ _ _ _ _

Pierwsza cyfra: 5 możliwości: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

Wybór miejsc dla 3 cyfr parzystych: $|C_6^3| = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3 \cdot 3!} = 20$, na przykład: $NNNPNPP$

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

I sposób:

2. Liczba zaczyna się cyfrą nieparzystą:

$N\_\_\_\_\_\_$

Pierwsza cyfra: 5 możliwości: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

Wybór miejsc dla 3 cyfr parzystych: $|C_6^3| = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3 \cdot 3!} = 20$, na przykład: $NNNPNPP$

Ustalenie cyfr parzystych i nieparzystych:

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

I sposób:

2. Liczba zaczyna się cyfrą nieparzystą:

$N\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$

Pierwsza cyfra: 5 możliwości: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

Wybór miejsc dla 3 cyfr parzystych: $|C_6^3| = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3 \cdot 3!} = 20$, na przykład: $NNNPNPP$

Ustalenie cyfr parzystych i nieparzystych: 5^6

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

I sposób:

2. Liczba zaczyna się cyfrą nieparzystą:

$N\_\_\_\_\_\_$

Pierwsza cyfra: 5 możliwości: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

Wybór miejsc dla 3 cyfr parzystych: $|C_6^3| = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{2\cdot 3\cdot 3!} = 20$, na przykład: $NNNPNPP$

Ustalenie cyfr parzystych i nieparzystych: 5^6

Podsumowując mamy takich liczb:

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

I sposób:

2. Liczba zaczyna się cyfrą nieparzystą:

$N\_\_\_\_\_\_\_$

Pierwsza cyfra: 5 możliwości: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

Wybór miejsc dla 3 cyfr parzystych: $|C_6^3| = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3 \cdot 3!} = 20$, na przykład: $NNNPNPP$

Ustalenie cyfr parzystych i nieparzystych: 5^6

Podsumowując mamy takich liczb: $5 \cdot 20 \cdot 5^6 = 20 \cdot 5^7$

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

I sposób:

Ostatecznie sumując obydwa przypadki otrzymujemy:

$$12 \cdot 5^7 + 20 \cdot 5^7 = 32 \cdot 5^7$$

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

II sposób:

Wszystkie numery spełniające warunki zadania:

_ _ _ _ _ _ _

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

II sposób:

Wszystkie numery spełniające warunki zadania:

_ _ _ _ _ _ _

Wybór miejsc dla 3 cyfr parzystych:

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

II sposób:

Wszystkie numery spełniające warunki zadania:

_ _ _ _ _ _ _ _

Wybór miejsc dla 3 cyfr parzystych: $|C_7^3| = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{2\cdot 3\cdot 4!} = 35$, na przykład: $NPNPNNP$

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

II sposób:

Wszystkie numery spełniające warunki zadania:

_ _ _ _ _ _ _

Wybór miejsc dla 3 cyfr parzystych: $|C_7^3| = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{2\cdot 3\cdot 4!} = 35$, na przykład: $N\color{red}{P}N\color{red}{P}NN\color{red}{P}$

Ustalenie cyfr parzystych i nieparzystych:

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

II sposób:

Wszystkie numery spełniające warunki zadania:

_ _ _ _ _ _ _

Wybór miejsc dla 3 cyfr parzystych: $|C_7^3| = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{2\cdot 3\cdot 4!} = 35$, na przykład: $NPNPNNP$

Ustalenie cyfr parzystych i nieparzystych: 5^7

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

II sposób:

Wszystkie numery spełniające warunki zadania:

_ _ _ _ _ _ _

Wybór miejsc dla 3 cyfr parzystych: $|C_7^3| = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{2\cdot 3\cdot 4!} = 35$, na przykład: $NPNPNNP$

Ustalenie cyfr parzystych i nieparzystych: 5^7

Podsumowując mamy takich numerów: $35 \cdot 5^7$

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

II sposób:

Wszystkie numery spełniające warunki zadania, zaczynające się od 0:

0 _ _ _ _ _ _

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

II sposób:

Wszystkie numery spełniające warunki zadania, zaczynające się od 0:

0 _ _ _ _ _ _

Wybór miejsc dla 2 cyfr parzystych:

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

II sposób:

Wszystkie numery spełniające warunki zadania, zaczynające się od 0:

0 _ _ _ _ _ _

Wybór miejsc dla 2 cyfr parzystych: $|C_6^2| = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{2\cdot 4!} = 15$, na przykład: $0PNPNNN$

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

II sposób:

Wszystkie numery spełniające warunki zadania, zaczynające się od 0:

0 _ _ _ _ _ _

Wybór miejsc dla 2 cyfr parzystych: $|C_6^2| = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{2\cdot 4!} = 15$, na przykład: $0PNPNNN$

Ustalenie cyfr parzystych i nieparzystych:

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

II sposób:

Wszystkie numery spełniające warunki zadania, zaczynające się od 0:

0 _ _ _ _ _ _

Wybór miejsc dla 2 cyfr parzystych: $|C_6^2| = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{2\cdot 4!} = 15$, na przykład: $0PNPNNN$

Ustalenie cyfr parzystych i nieparzystych: 5^6

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

II sposób:

Wszystkie numery spełniające warunki zadania, zaczynające się od 0:

0 _ _ _ _ _ _

Wybór miejsc dla 2 cyfr parzystych: $|C_6^2| = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{2\cdot 4!} = 15$, na przykład: $0PNPNNN$

Ustalenie cyfr parzystych i nieparzystych: 5^6

Podsumowując mamy takich numerów:

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

II sposób:

Wszystkie numery spełniające warunki zadania, zaczynające się od 0:

0 _ _ _ _ _ _

Wybór miejsc dla 2 cyfr parzystych: $|C_6^2| = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{2\cdot 4!} = 15$, na przykład: $0PNPNNN$

Ustalenie cyfr parzystych i nieparzystych: 5^6

Podsumowując mamy takich numerów: $15 \cdot 5^6 = 3 \cdot 5^7$

7-cyfrowa liczba (dokładnie 3 cyfry parzyste)

II sposób:

Ostatecznie od wszystkich numerów należy odjąć te zaczynające się od 0:

$$35 \cdot 5^7 - 3 \cdot 5^7 = 32 \cdot 5^7$$

Przykład:

Na ile sposobów można rozmieścić 7 osób przy okrągłym stole?

7 osób na ławce (ławka ma początek i koniec):

7 osób na ławce (ławka ma początek i koniec): $|P_7| = 7!$

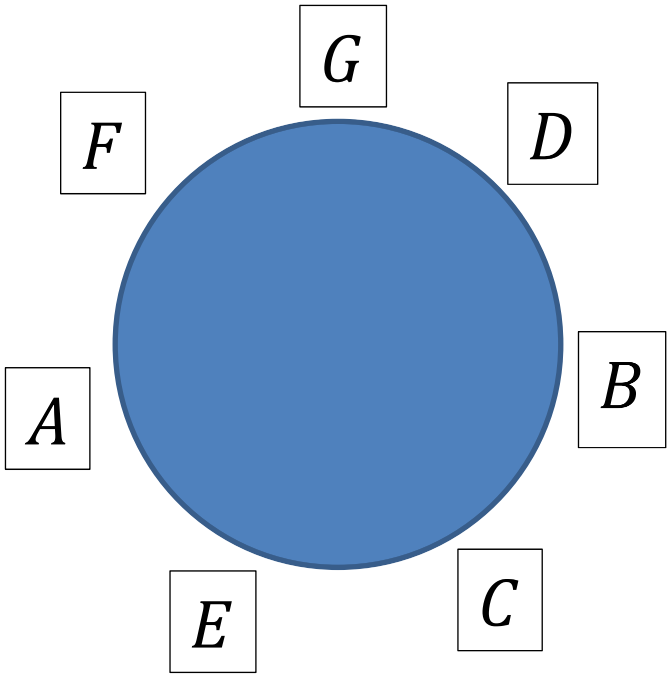
7 osób na ławce (ławka ma początek i koniec): $|P_7| = 7!$

Okrągły stół **nie ma początku i nie ma końca**.

7 osób na ławce (ławka ma początek i koniec): $|P_7| = 7!$

Okrągły stół **nie ma początku i nie ma końca**.

Jeden z układów:



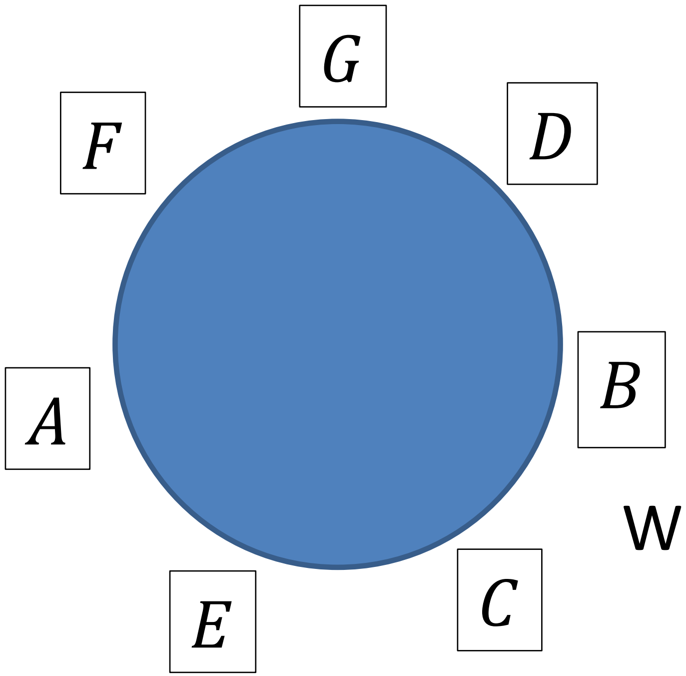
ma w sobie 7 układów osób na ławce:

$$(D,B,C,E,A,F,G),(B,C,E,A,F,G,D),$$
$$(C,E,A,F,G,D,B),(E,A,F,G,D,B,C),$$
$$(A,F,G,D,B,C,E),(F,G,D,B,C,E,A),$$
$$(G,D,B,C,E,A,F)$$

7 osób na ławce (ławka ma początek i koniec): $|P_7| = 7!$

Okrągły stół **nie ma początku i nie ma końca**.

Jeden z układów:



ma w sobie 7 układów osób na ławce:

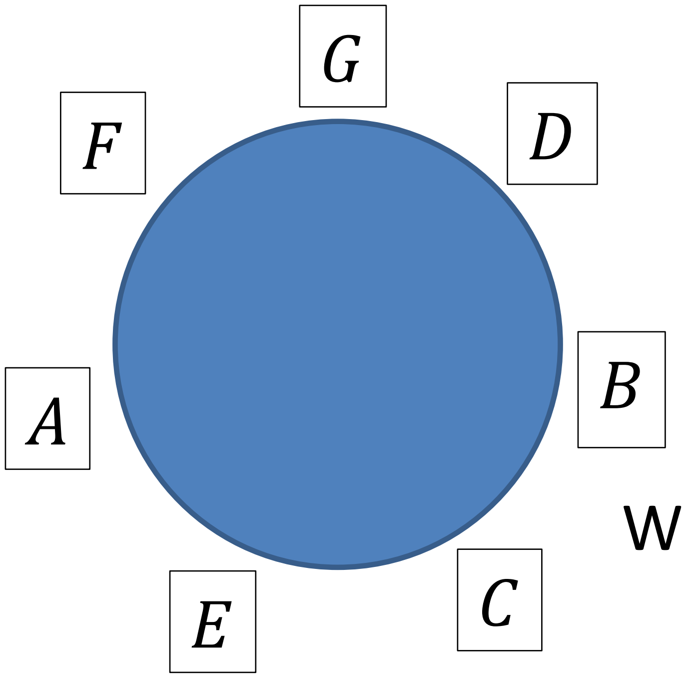
$$(D,B,C,E,A,F,G),(B,C,E,A,F,G,D),$$
$$(C,E,A,F,G,D,B),(E,A,F,G,D,B,C),$$
$$(A,F,G,D,B,C,E),(F,G,D,B,C,E,A),$$
$$(G,D,B,C,E,A,F)$$

Wszystkich układów przy okrągłym stole jest:

7 osób na ławce (ławka ma początek i koniec): $|P_7| = 7!$

Okrągły stół **nie ma początku i nie ma końca**.

Jeden z układów:



ma w sobie 7 układów osób na ławce:

$$(D,B,C,E,A,F,G),(B,C,E,A,F,G,D),$$
$$(C,E,A,F,G,D,B),(E,A,F,G,D,B,C),$$
$$(A,F,G,D,B,C,E),(F,G,D,B,C,E,A),$$
$$(G,D,B,C,E,A,F)$$

Wszystkich układów przy okrągłym stole jest:

$$\frac{|P_7|}{7} = \frac{7!}{7} = 6!$$