## Schemat Hornera

Załóżmy, że mamy obliczyć wartość wielomianu postaci:

**f(x) = a0xn + a1xn-1 + ... + an-1x + an**       (\*)
dla danych liczb a0, a1,..., an, w danym punkcie x0.
Algorytm polegający na bezpośrednim liczeniu ze wzoru wymaga **n** dodawań i **(n-2)** potęgowań lub **(2n-1)** mnożeń, co w wyniku daje pewne niedokładności (błąd względny i bezwzględny). Dlatego warto poszukać innego rozwiązania.
Jeżeli przedstawimy wielomian w postaci:

**f(x) = (...((a0x + a1)x + a2)x + ... + an-1)x + an**

to otrzymujemy następującą metodę obliczania wartości wielomianu:

**b0 = a0,b1 = b0x0 + a1,b2 = b1x0 + a2,...bn = bn-1x0 + an**

gdzie **bi** oznacza wartość i-tego nawiasu (licząc od środka) dla x równego x0, a **bn** szukaną wartość wielomianu.
Otrzymana metoda to tzw. **Algorytm Hornera** obliczania wartości wielomianu. Algorytm ten jest numerycznie poprawny i jest jedynym algorytmem który minimalizuje liczbę dodawań i mnożeń przy obliczaniu wartości wielomianu w postaci (\*).
Dla wielomianu n-tego stopnia w zwykłej postaci należy wykonać **(n\*(n+1))/2** mnożeń, a dla wielomianu po zastosowaniu schematu Hornera tylko **n** mnożeń. Zatem dla dużych **n** różnica jest spora.
Wobec tego algorytm w pierwotnej postaci ma złożoność **O(n2)**, a po zastosowaniu schematu Hornera złożoność liniową.
Warto jeszcze zaznaczyć, że liczby **b0, b1,..., bn-1** są współczynnikami ilorazu będącego wynikiem dzielenia wielomianu f(x) przez dwumian (x - x0) (resztą z tego dzielenia jest oczywiście wartość wielomianu w x0 czyli bn, a więc spełniona jest równość:

**a0xn + a1xn-1 + ... + an-1x + an = (b0xn-1 + b1xn-2 + ... + bn-1)(x - x0) + bn**

## przykład

Obliczymy wartość wielomianu postaci:

**f(x) = x4 + 5x3 - 6x2 - 7x + 6**

dla x0 = 2 korzystając z algorytmu Hornera.
Przedstawmy nasz wielomian w alternatywnej postaci dokonując odpowiednich przekształceń:

**f(x) = x4 + 5x3 - 6x2 - 7x + 6 = = x (x3 + 5x2 - 6x - 7) + 6 = = x (x (x2 + 5x - 6) - 7) + 6 = = x (x (x (x+5) - 6) - 7) + 6**

Mamy więc :

|  |
| --- |
| x0 = 2  |
| a0 = 1 | b0 = 1 |
| a1 = 5 | b1 =b0 \* x0 + a1 = 1\*2 + 5 = 7 |
| a2 = -6 | b2 =b1 \* x0 + a2 = 7\*2 - 6 = 8 |
| a3 = -7 | b3 =b2 \* x0 + a3 = 8\*2 - 7 = 9 |
| a4 = 6 | **b4** =b3 \* x0 + a4 = 9\*2 + 6 = **24** |

Wartość wielomianu przy powyższych założeniach wynosi **24**. Ponadto otrzymaliśmy następującą równość:

**f(x)= (x4 + 5x3 - 6x2 - 7x + 6 )= = (x3 + 7x2 + 8x + 9)(x-2) + 24**

Czyli **f(2)=24**