Dowody indukcyjne zadania:

Zadanie 1.

Udowodnij z zasady indukcji matematycznej, że dla $n \in N$:
$1 + 5 + 9 + \ldots + (4n - 3) = n(2n - 1)$

Zadanie 2.

Udowodnij z zadady indukcji matematycznej, że dla $n \in N$:
$6 \mid (n^3 - n)$

Zadanie 3.

Udowodnij z zadady indukcji matematycznej, że dla $n > 2$:
$2^n > 2n + 1$

Dowody indukcyjne rozwiązania:

Zadanie 1.

Krok 1

Sprawdzenie twierdzenia dla $n = 1$

$L = 1$
$P = 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1) = 1$
$L = P$

Krok 2

Założenie indukcyjne:
$Z(n) : 1 + 5 + 9 + \ldots + (4n - 3) = n(2n - 1)$

Teza indukcyjna:
$T(n + 1) : 1 + 5 + 9 + \ldots + (4n - 3) + (4(n + 1) - 3)) = (n + 1)(2(n + 1) - 1)$

Dowód

Pokażemy, że jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla n to jest też prawdziwe dla $n + 1$
Należy dowieść:
$1 + 5 + 9 + \ldots + (4n - 3) + (4n + 1) = (n + 1)(2n + 1)$

Na mocy założenia indukcyjnego otrzymujemy:
$n(2n - 1) + (4n + 1) = (n + 1)(2n + 1)$

$L = 2n^2 - n + 4n + 1 = 2n^2 + 3n - 1$
$P = (n + 1)(2n + 1) = 2n^2 + n + 2n + 1 = 2n^2 + 3n - 1$
$L = P$

Na mocy zasady indukcji matematycznej twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych.

Zadanie 2.

Krok 1

Sprawdzenie twierdzenia dla $n = 1$

$1^3 - 1 = 0$
$6 \mid 0$
6 jest podzielne przez 0, twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 1$

Krok 2

Założenie indukcyjne:
$Z(n) : n^3 - n = 6k, k \in Z$

Teza indukcyjna:
$T(n+1) : (n+1)^3 - (n+1) = 6l, l \in Z$

Dowód

Pokażemy, że jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla n to jest też prawdziwe dla $n + 1$
Należy dowieść:
$(n+1)^3 - (n+1) = 6l, l \in Z$

$L = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - n - 1 = n^3 + 3n^2 + 2n$
$L = n^3 - n + 3n^2 + 3n$

Na mocy założenia indukcyjnego otrzymujemy:
$L = 6k + 3n(n+1)$

Wyraźnie $n(n+1)$ jest podzielne przez 2, ponieważ n oraz $(n+1)$ są to dwie kolejne liczby naturalne, co oznacza, że któraś z nich będzie parzysta, czyli podzielna przez 2. Tak więc całe wyrażenie $3n(n+1)$ jest podzielne przez 6, ponieważ wymnożenie liczby podzielnej przez 2 razy 3 daje liczbę podzielną przez 6. Suma dwóch liczb podzielnych przez 6 ($6k$ i $3n(n+1)$) daje liczbę podzielną przez 6.

Na mocy zasady indukcji matematycznej twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych.

Zadanie 3.

Krok 1

Sprawdzenie twierdzenia dla $n = 3$

$L = 2^3 = 8$
$P = 2 \cdot 3 + 1 = 7$
$L > P$

Krok 2

Założenie indukcyjne:
$Z(n) : 2^n > 2n + 1$

Teza indukcyjna:
$T(n+1) : 2^{(n+1)} > 2(n+1) + 1$

Dowód, wersja 1

Pokażemy, że jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla n to jest też prawdziwe dla $n + 1$
Należy dowieść:
$2^n \cdot 2 > 2(n+1) + 1$

Na mocy założenia indukcyjnego otrzymujemy:
$2^n > (2n+1) \Rightarrow 2^n \cdot 2 > (2n+1) \cdot 2 = 4n + 2 = 2n + 2 + 2n = 2(n+1) + 2n$

dla: $n > 2$:
$2n > 4 \Rightarrow 2n > 1 \Rightarrow 2(n+1) + 2n > 2(n+1) + 1$
$2^n \cdot 2 > 2(n+1) + 2n > 2(n+1) + 1$
cnd.

Na mocy zasady indukcji matematycznej twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych.

Dowód, wersja 2

Pokażemy, że jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla n to jest też prawdziwe dla $n + 1$
Należy dowieść:
$2^n \cdot 2 > 2(n+1) + 1$

Wykorzystując założenie indukcyjne spróbujemy dowieść:
$(2n+1) \cdot 2 > 2(n+1) + 1$

Przypuśćmy przeciwnie, że dla $n > 2$:
$(2n+1) \cdot 2 \leqslant 2(n+1) + 1$
$4n + 2 \leqslant 2n + 2 + 1$
$4n \leqslant 2n + 1$
$2n \leqslant 1$
$n \leqslant \frac{1}{2} \leftarrow$ sprzeczne z założeniem bo $n > 2$

Na mocy zasady indukcji matematycznej twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych.