

**Katedra Informatyki Stosowanej**

**Automatyzacja Obliczeń Inżynierskich**

*Laboratorium*

**Ćwiczenie 2.**

**Rozwiązywanie problemów inżynierskich w środowisku arkusza kalkulacyjnego**

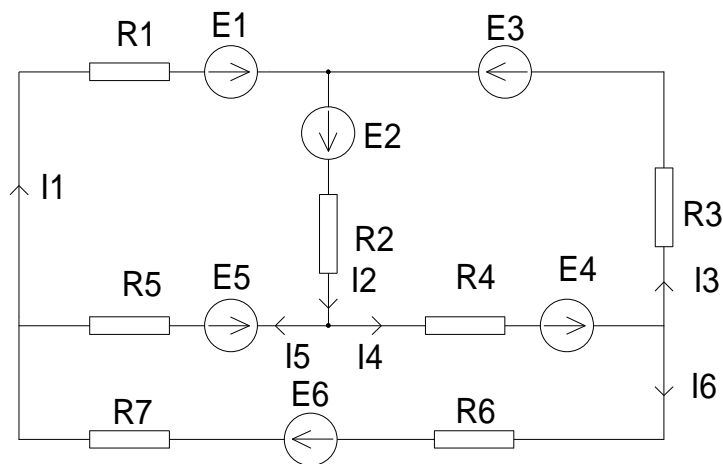
**Opracował: dr hab. inż. Jacek Kucharski**

**dr inż. Piotr Urbanek**

## Analiza i synteza rozgałęzionych obwodów elektrycznych.

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się ze sposobami rozwiązywania rozgałęzionych obwodów elektrycznych za pomocą arkusza kalkulacyjnego. Ćwiczenie obejmuje zagadnienia związane z umiejętnością zapisywania równań macierzowych w arkuszu kalkulacyjnym, ich rozwiązywania oraz wykorzystania narzędzia scenariuszy do szybkiej analizy różnych przypadków pracy obwodu. Podsumowaniem ćwiczenia jest obliczenie prądów gałęziowych w analizowanym obwodzie, wykonanie wykresu zależności  $U_{R4}=f(R_1, R_2)$  oraz synteza obwodu polegająca na takim doborze elementów pasywnych układu (oporników), aby prąd w wybranej gałęzi był równy założonej wcześniej wartości.

Utworzyć arkusz kalkulacyjny obliczający wartości prądów  $I_1$ - $I_6$  oraz spadek napięcia na opornikach  $R_1$  i  $R_4$  w obwodzie prądu stałego przedstawionego na rys.1.



Rys. 1. Schemat obwodu elektrycznego prądu stałego.

Gdzie:

$E1=45V$	$R1=5\Omega$
$E2=10V$	$R2=6\Omega$
$E3=26V$	$R3=8\Omega$
$E4=34V$	$R4=6\Omega$
$E5=5V$	$R5=5\Omega$
$E6=20V$	$R6=15\Omega$
	$R7=5\Omega$

Należy obliczyć prądy  $I_1$ - $I_6$  płynące w gałęziach i spadek napięcia na opornikach  $R_1$  i  $R_4$ .

Wykorzystując narzędzie scenariuszy przeanalizować jak będzie się zmieniało napięcie na

oporniku  $R_4$ , gdy wartości oporników  $R_1$  i  $R_2$  wzrosną 2, 3 i 4 – krotnie. Sporządzić wykres obrazujący tę zależność.

Rozwiązanie zadania:

Spadek napięcia na dowolnym oporze  $R$  opisuje prawo Ohma. Mówi ono, że spadek napięcia  $U$  na idealnym oporniku  $R$  jest wprost proporcjonalny do płynącego przez niego prądu  $I$ .

Współczynnikiem proporcjonalności jest wartość zwana oporem elektrycznym  $R$ . Można je zapisać wzorem:

$$U = R \cdot I \quad (1)$$

Korzystając z drugiego prawa Kirchoffa, dla przedstawionego na rys. 1 obwodu prądu stałego można ułożyć trzy równania dla każdego oczka obwodu, mówiące, że suma spadków napięć w każdym oczku obwodu równa się zeru. Mamy zatem:

$$\begin{aligned} E_1 - I_1 R_1 + E_2 - I_2 R_2 - I_5 R_5 - E_5 &= 0 \\ E_2 - I_2 R_2 + E_4 - I_4 R_4 - I_3 R_3 + E_3 &= 0 \\ E_4 - I_4 R_4 - I_6 R_6 + E_6 - I_6 R_7 + E_5 + I_5 R_5 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Równania (2) można uzupełnić o trzy równania rozptywu prądów w gałęziach obwodu, wynikającymi z pierwszego prawa Kirchoffa:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_5 + I_6 \\ I_2 &= I_4 + I_5 \\ I_3 &= I_4 - I_6 \end{aligned} \quad (3)$$

Podstawiając równania (3) do równań (2) oraz porządkując równania (2) względem prądów  $I_4$ ,  $I_5$ ,  $I_6$  otrzymujemy układ równań:

$$\begin{aligned} I_4 R_2 + I_5 (R_1 + R_2 + R_5) + I_6 R_1 &= E_1 + E_2 - E_5 \\ I_4 (R_2 + R_3 + R_4) + I_5 R_2 - I_6 R_3 &= E_2 + E_3 + E_4 \\ I_4 R_4 - I_5 R_5 + I_6 (R_6 + R_7) &= E_4 + E_5 + E_6 \end{aligned} \quad (4)$$

Równanie (4) daje się zapisać w postaci macierzowej, jako:

$$\mathbf{R} * \mathbf{I} = \mathbf{U} \quad (5)$$

Gdzie:

$\mathbf{R}$  jest macierzą rezystancji o wymiarze (3 x 3),

$\mathbf{I}$  – wektorem prądów gałęziowych o wymiarze (3 x 1),

$\mathbf{U}$  – wektorem źródeł wymuszających o wymiarze (3 x 1).

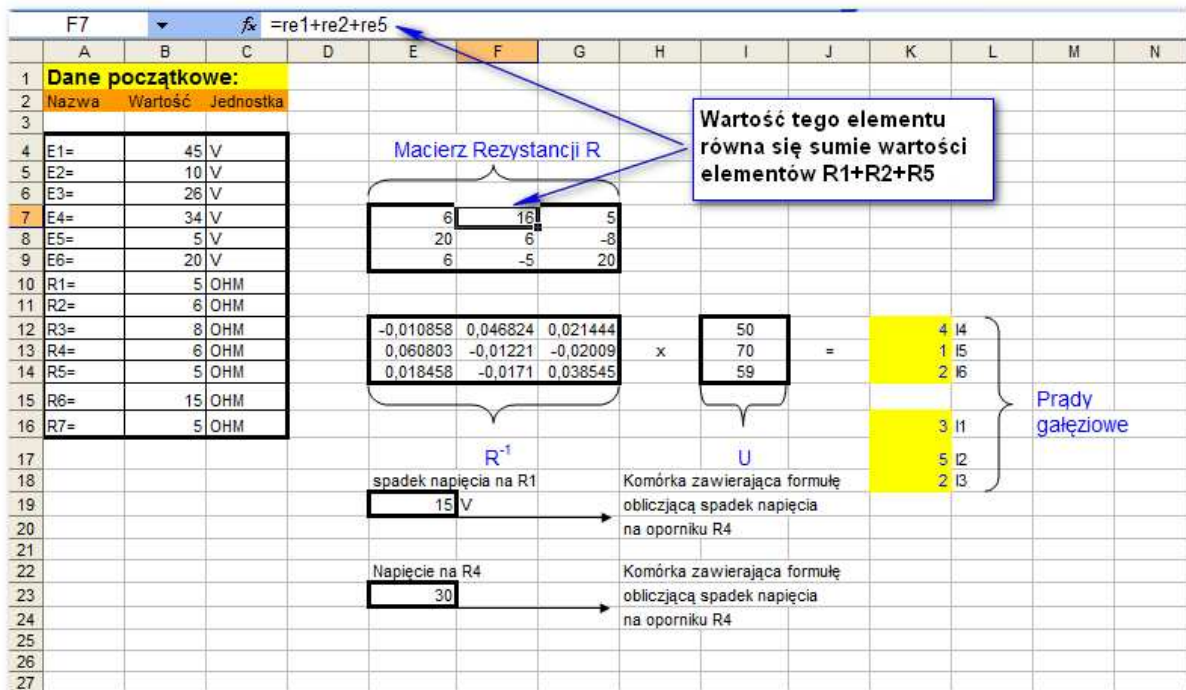
Mnożąc równanie (5) lewostronnie przez macierz odwrotną  $\mathbf{R}^{-1}$  otrzymujemy wartości prądów gałęziowych:

$$\mathbf{I} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{U} \quad (6)$$

Jeżeli macierz  $\mathbf{R}$  jest nieosobliwa, czyli  $\det \mathbf{R} \neq 0$ , to istnieje rozwiązanie układu równań, czyli jest możliwe wyznaczenie wartości prądów w macierzy  $\mathbf{I}$ .

**a) Wykorzystanie arkusza kalkulacyjnego do znalezienia wartości prądów i napięć w układzie przedstawionym na rysunku 1.**

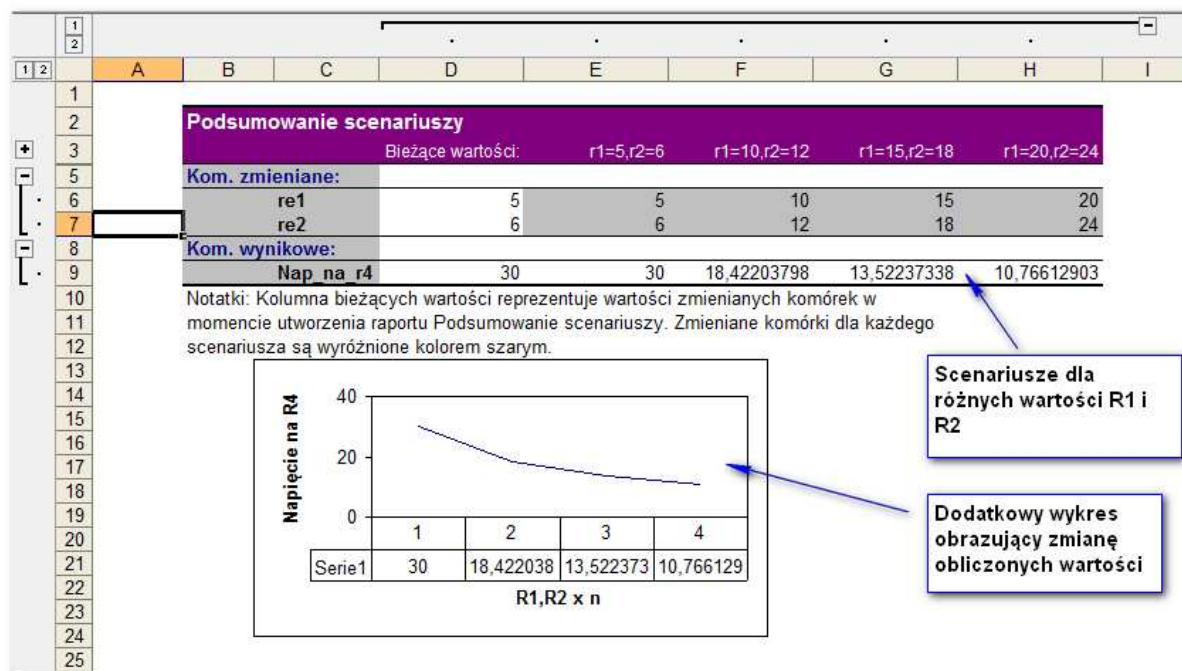
Przykładowy sposób rozwiązania takiego układu równań za pomocą arkusza kalkulacyjnego jest przedstawiony na rys. 2.



Rys. 2. Obliczanie prądów  $I_1 \div I_6$  oraz napięcia na rezystorach  $R_1$  i  $R_4$  z wykorzystaniem rozwiązania równania macierzowego  $\mathbf{I} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{U}$ .

**b) Analiza problemu za pomocą scenariuszy**

Przykładowa analiza przypadku  $U_{R4} = f(R_1, R_2)$  za pomocą scenariusza arkusza kalkulacyjnego została przedstawiona na rys. 3.



Rys. 3. Przykładowy wygląd scenariusza zależności  $U_4=f(R_1, R_2)$ .

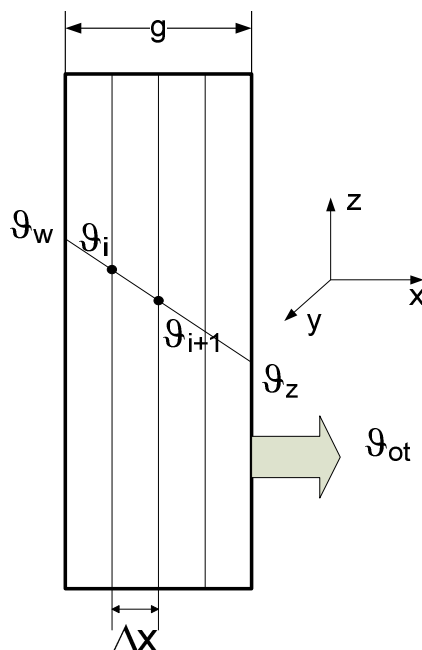
c) **Wykorzystanie dodatku Solver do syntezy obwodu.**

Za pomocą dodatku Solver należy wskazać możliwości osiągnięcia w analizowanym obwodzie napięcia  $U = 20V$  na rezystorze R1. Należy uwzględnić ograniczenia wartości wszystkich rezystorów (0-1M $\Omega$ ) oraz wartości napięć źródeł zasilających (0-100V).

## Wyznaczanie rozkładu temperatury wewnątrz płaskiej płyty

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się ze sposobem zapisu pochodnej pierwszego i drugiego rzędu w postaci równania różnicowego oraz zapis tych równań w środowisku arkusza kalkulacyjnego.

Wyznaczyć rozkład temperatury wewnątrz płyty o grubości  $g=0,4\text{m}$  (rys.1), której jedna powierzchnia posiada temperaturę  $\vartheta_w=850^\circ\text{C}$  a wewnątrz płyty przewodność cieplną  $\lambda=0,3 [\text{W}/\text{m}^2\text{K}]$ . Wartość współczynnika wymiany ciepła z otoczeniem wynosi  $\alpha=25\text{W}/\text{m}^2\text{K}$ , a wartość temperatury otoczenia  $\vartheta_{ot}=20^\circ\text{C}$ .



Rys. 1. Podział płyty na elementarne podobszary obliczeniowe.

Oznaczenia:  $\vartheta_w$  - temperatura wewnętrzna płyty,  $\vartheta_z$  - temperatura zewnętrzna płyty,  $\vartheta_{ot}$  - temperatura otoczenia.  $\vartheta_i$ ,  $\vartheta_{i+1}$  - temperatura warstw  $i$ -tej i  $i+1$ ,  $\Delta x$  - grubość warstwy obliczeniowej.

Rozwiązanie:

Założenia upraszczające i warunki początkowe.

Zakładamy, że wymiary płyty że grubość płyty  $g$  (liczona w kierunku osi  $x$ ) jest dużo mniejsza od wymiarów płyty kierunkach osi  $y$  oraz  $z$ .

Płyta taka może być traktowana jako medium, przez które ciepło przepływa tylko w jednym kierunku – wzdłuż osi  $x$ .

Równanie opisujące przewodzenie ciepła w ciałach stałych sformułował w roku 1807 Fourier. Brzmi ono następująco:

Gęstość strumienia cieplnego jest wprost proporcjonalna do gradientu temperatury.

$$q_n = -\lambda \text{ grad } \vartheta = -\lambda \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) \quad (1)$$

Znak minus we wzorze (1) oznacza, że strumień ciepła płynie w kierunku malejących wartości temperatury (czyli od miejsca cieplejszego, do zimniejszego).

Z uwagi na założenie jednowymiarowości przepływu ciepła, równanie (1) upraszcza się do postaci:

$$q_n = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx} = -\lambda \frac{\Delta\vartheta}{\Delta x} = -\lambda \frac{\vartheta_z - \vartheta_w}{\Delta x} \quad (2)$$

gdzie:

$\Delta x$  – grubość elementów, na które została podzielona ściana,

$\Delta\vartheta$  – różnica temperatur wzdłuż grubości  $\Delta x$ .

Wzór (2) stanowi podstawę do rozwiązywania zagadnień jednowymiarowego przewodnictwa ciepła w ciałach stałych dla stanów cieplnie ustalonych.

Z powierzchni zewnętrznej płyty strumień ciepła oddawany jest do otoczenia o temperaturze  $\vartheta_{ot}$ . Zjawisko to opisuje prawo Newtona, którego postać podana jest wzorem (3):

$$q = \alpha(\vartheta_z - \vartheta_{ot}) \quad (3)$$

Zgodnie z prawem zachowania energii, w stanie cieplnie ustalonym musi zachodzić równość strumieni cieplnych – dopływającego do powierzchni zewnętrznej i oddawanego do otoczenia. Mamy zatem:

$$-\lambda \frac{\vartheta_z - \vartheta_w}{\Delta x} = \alpha(\vartheta_z - \vartheta_{ot}) \quad (4)$$

Ze wzoru (4) można wyznaczyć wartość temperatury na powierzchni płyty  $\vartheta_z$ :

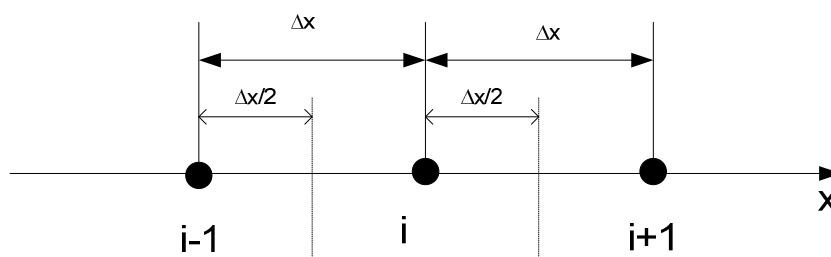
$$\vartheta_z = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha \cdot \Delta x} \vartheta_w + \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\lambda + \alpha \cdot \Delta x} \vartheta_{ot} \quad (5)$$

Wzór (5) wiąże temperaturę na zewnątrz płyty z wartością temperatury otoczenia, do którego powierzchnia ściany oddaje ciepło.

Znając wartości temperatury  $\vartheta_w$  i  $\vartheta_z$  można wyznaczyć rozkład temperatury wzdłuż grubości płyty  $g$ . W tym celu należy rozpatrzyć układ stacjonarny, bezźródłowy, będący w stanie cieplnie ustalonym. Rozkład temperatury w takim układzie opisywany jest przez równanie Laplace'a, którego postać dla układu jednowymiarowego podana jest wzorem (6).

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = 0 \quad (6)$$

Korzystając z rys. 2. równanie (6) można zamienić na postać różnicową wg następujących wzorów:



Rys. 2. Podział płyty na węzły obliczeniowe.

$$\left. \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \right]_{i+\frac{1}{2}\Delta x} \approx \frac{\vartheta_{i+1} - \vartheta_i}{\Delta x} \quad \left. \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \right]_{i-\frac{1}{2}\Delta x} \approx \frac{\vartheta_i - \vartheta_{i-1}}{\Delta x} \quad (7)$$

Pochodne drugiego rzędu w punkcie (i) będą zatem równe:

$$\left. \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} \right]_i \approx \frac{\left. \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \right]_{i+\frac{1}{2}\Delta x} - \left. \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \right]_{i-\frac{1}{2}\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\vartheta_{i+1} + \vartheta_{i-1} - 2\vartheta_i}{(\Delta x^2)} \quad (8)$$

Podstawiając wzór (8) do równania Laplace'a (6) otrzymujemy wzór na wartość temperatury w węźle (i) dla układu jednowymiarowego.

$$\frac{\vartheta_{i+1} + \vartheta_{i-1} - 2\vartheta_i}{(\Delta x^2)} = 0 \Rightarrow \vartheta_i = \frac{\vartheta_{i+1} + \vartheta_{i-1}}{2} \quad (9)$$

Wzór (9) wykorzystujemy na obliczanie temperatury w węzłach wewnętrznych analizowanej płyty.

### Rozwiązanie problemu za pomocą arkusza kalkulacyjnego.

Należy utworzyć arkusz kalkulacyjny pozwalający na obliczenie rozkładu temperatury na powierzchni zewnętrznej oraz wewnątrz płyty. Przyjąć skok podziału płyty równy  $\Delta x=0,05\text{m}$ .

Wygląd przykładowego arkusza kalkulacyjnego jest pokazany na rys. 3.





## ***Analiza sygnału pomiarowego za pomocą rozkładu na szereg Fouriera.***

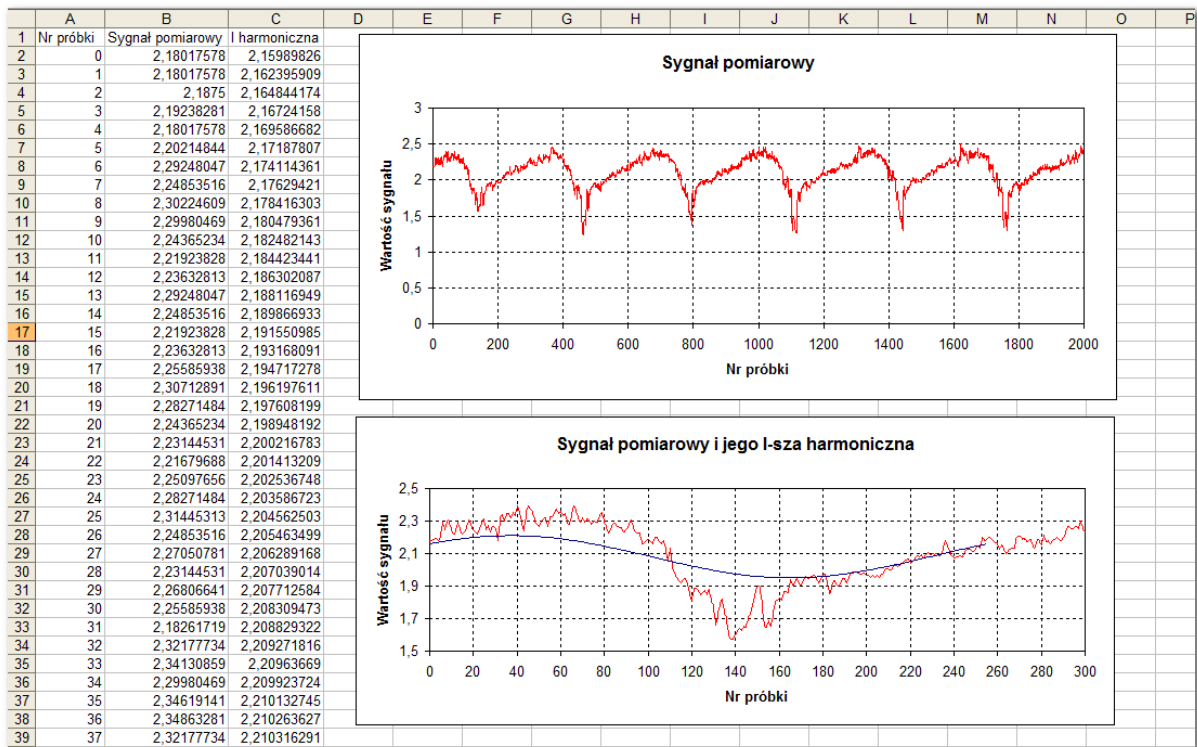
*Celem ćwiczenia jest nabycie umiejętności analizowania widma przykładowego sygnału pomiarowego za pomocą rozkładu na szereg Fouriera.*

Dany jest sygnał pomiarowy zapisany w pliku pomiary.txt.

Należy:

1. Dokonać importu zawartości pliku do środowiska arkusza kalkulacyjnego.
2. Dokonać analizy widmowej sygnału za pomocą rozkładu sygnału na szereg Fouriera. Wybrać taką liczbę próbek do analizy, aby obejmowała ona co najmniej jeden okres sygnału.
3. Obliczyć i przedstawić na wykresie widmo sygnału pomiarowego.
4. Dokonać redukcji widma sygnału oryginalnego do kilku harmoniczných (podanych przez prowadzącego zajęcia).
5. Dla sygnału ze zredukowaną liczbą wyższych harmoniczných dokonać odwrotnej transformaty Fouriera, odtworzyć na tej podstawie sygnał i przedstawić go na wykresie razem z oryginalnym sygnałem pomiarowym.

Przykładowy arkusz kalkulacyjny jest pokazany na rys. 1.



Rys. 1. Przykładowy wygląd arkusza do analizy widmowej sygnału pomiarowego.