Katedra Informatyki Stosowanej

Automatyzacja Obliczeń Inżynierskich

Laboratorium

Ćwiczenie 4.

Wykorzystanie środowiska MATLAB do analizy numerycznych problemów inżynierskich.

Opracował: dr hab. inż. Jacek Kucharski

dr inż. Piotr Urbanek

Program ćwiczenia

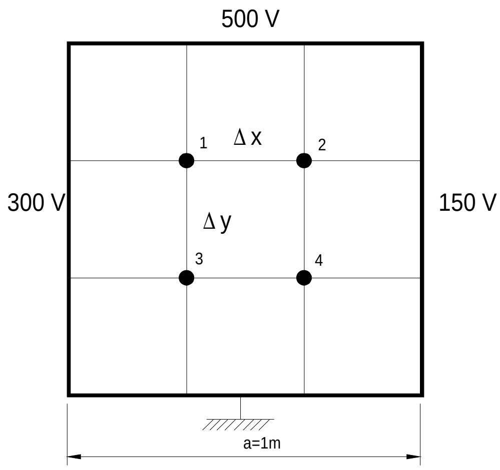
<u>Dwuwymiarowa analiza rozkładu pola elektrycznego.</u>

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest rozwiązywanie w środowisku MATLAB układów równań n równań liniowych z n niewiadomymi metodą bezpośrednią oraz iteracyjną.

Wprowadzenie

Rozważmy powierzchnię w kształcie kwadratu o długości boku a=1m. Załóżmy, że na każdej krawędzi rozpatrywanej powierzchni istnieje pewien potencjał, którego wartość pokazana jest na rys. 2. Zakładamy, że na powierzchni płyty nie ma rozmieszczonego elektrycznego ładunku powierzchniowego.



Rys.2. Podział badanej powierzchni na elementy oraz warunki początkowe przyjęte do obliczeń.

Należy obliczyć rozkład potencjału na powierzchni płyty i przedstawić go w formie graficznej.
Zakładamy, następujące właściwości materiałowe rozpatrywanej powierzchni:

- materiał jest jednorodny i izotropowy,
- współczynnik przenikalności elektrycznej ε jest stały,

Opisany wyżej problem jest przypadkiem, w którym występuje statyczne pole elektryczne. Równanie

opisujące takie pole są następujące:

$$rot\vec{E} = 0,$$
$$div\vec{D} = \rho, \tag{1}$$
$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}.$$

gdzie:

$\vec{\mathbf{E}}$ - wektor natężenia pole elektrycznego,

$\vec{\mathbf{D}}$ - wektor indukcji elektrycznej,

ρ - ładunek elektryczny,

ε - przenikalność elektryczna środowiska.

Ze wzoru $rot\vec{E} = 0$ wynika, że pole elektrostatyczne jest polem bezwirowym, które można jednoznacznie określić funkcją skalarną zwaną potencjałem **V**.

Zakładając, że rozpatrujemy pole elektrostatyczne w środowisku jednorodnym (ε=const) oraz, że w badanym obszarze nie ma ładunku (ρ=0), to w każdym punkcie tego obszaru potencjał spełnia równanie Laplace’a [1]:

$$\nabla^2 V = 0 \tag{2}$$

które w postaci rozwiniętej przybierze postać:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{3}$$

W analizowanym problemie mamy do czynienia z polem dwuwymiarowym, w którym potencjał **V** nie zmienia się wzdłuż osi z. Zatem równanie (3) upraszcza się do postaci:

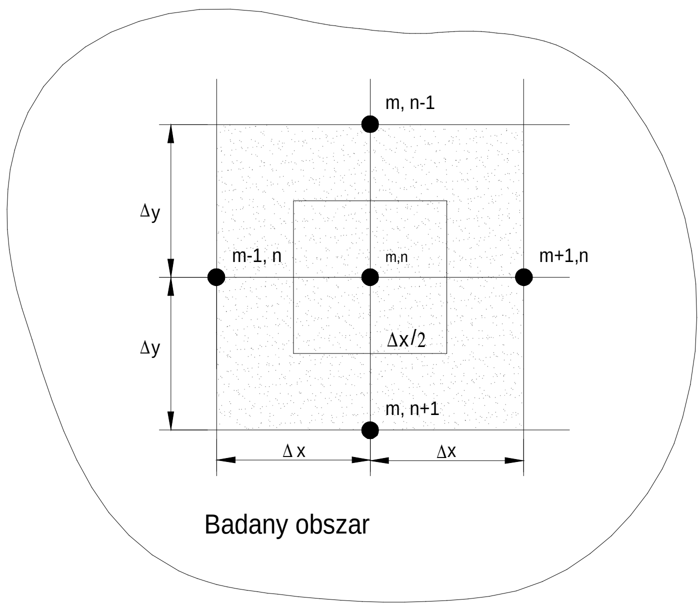
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \tag{4}$$

W przedstawionym przypadku równanie (4) może być rozwiązane analitycznie poprzez znalezienie całki szczególnej lub też w sposób numeryczny.

Zakładając, że celem ćwiczenia jest numeryczne rozwiązanie równania (4) z wykorzystaniem do obliczeń Metody Różnic Skończonych (MRS) dzielimy badany obszar na szereg elementów, tworząc w ten sposób siatkę obliczeniową.

W ogólnym przypadku liczba elementów na jakie musimy podzielić obszar zależy od rodzaju pola fizycznego i problemu, jaki chcemy rozwiązać.

Przykład utworzonej siatki jest przedstawiony na rys.2.



Rys.2. Przykład utworzonej siatki z węzłami wewnętrznymi

Stosunek boków elementów Δx do Δy w szczególnym przypadku może równać się jedności, co oznacza, że elementy te są kwadratami.

Przecięcia linii tworzą węzły obliczeniowe, w których wyznaczane są wartości szukanej funkcji.

W obliczeniach polowych wyróżnia się trzy rodzaje węzłów:

- środkowe, czyli takie, które leżą w środku badanego obszaru,
- powierzchniowe, czyli takie, które leżą na powierzchni badanego obszaru,
- narożne, czyli takie, które leżą na rogach badanego obszaru.

Po tak przeprowadzonej dyskretyzacji równanie różniczkowe (4) zostanie zapisane w postaci różnicowej. Wartości szukanej funkcji **V** pomiędzy węzłami można wyznaczyć z przybliżonych wzorów:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right]_{m+\frac{1}{2},n} \approx \frac{V_{m+1,n} - V_{m,n}}{\Delta x}; \qquad \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right]_{m-\frac{1}{2},n} \approx \frac{V_{m,n} - V_{m-1,n}}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right]_{m,n+\frac{1}{2}} \approx \frac{V_{m,n+1} - V_{m,n}}{\Delta y}; \qquad \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right]_{m,n-\frac{1}{2}} \approx \frac{V_{m,n} - V_{m,n-1}}{\Delta y} \tag{5}$$

Pochodne drugiego rzędu w punkcie (m, n) będą zatem równe:

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right]_{m,n} \approx \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right]_{m+\frac{1}{2},n} - \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right]_{m-\frac{1}{2},n}}{\Delta x} = \frac{V_{m+1,n} + V_{m-1,n} - 2V_{m,n}}{\left(\Delta x^2\right)}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right]_{m,n} \approx \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right]_{m,n+\frac{1}{2}} - \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right]_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Delta y} = \frac{V_{m,n+1} + V_{m,n-1} - 2V_{m,n}}{\left(\Delta y^2\right)} \tag{6}$$

Ze wzorów (6) wynika, że wartością pochodnej funkcji $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ w punkcie (m, n) jest różnica potencjałów pomiędzy punktami (m+1,n) i (m,n). Analogicznie wyznacza się wartości pochodnej w pozostałych punktach pomiędzy węzłami.

Podstawiając powyższe równania do wzoru (4) otrzymujemy:

$$\frac{V_{m+1,n} + V_{m-1,n} - 2V_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{V_{m,n+1} + V_{m,n-1} - 2V_{m,n}}{(\Delta y)^2} = 0 \tag{7}$$

Zakładając równomierny podział siatki wewnątrz badanego obszaru, czyli $\Delta x = \Delta y$ otrzymujemy:

$$V_{m+1,n} + V_{m-1,n} + V_{m,n+1} + V_{m,n-1} - 4V_{m,n} = 0 \tag{8}$$

Podstawiając równanie (8) do każdego węzła wewnętrznego otzrymujemy n równań z n niewiadomymi, który można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{C} \tag{9},$$

gdzie: **A** - macierz współczynników przy potencjałach,

V - wektor szukanych wartości potencjałów,

C - wektor wyrazów wolnych.

Przekształcając równanie (13) otrzymujemy:

$$\mathbf{V}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{C} \qquad (10).$$

Przykładowo, dla węzłów nr 1, 2, 3, 4 obszaru przedstawionego na rys.1 równanie potencjałów będzie wyglądało następująco:

węzeł nr 1. $V_2+300+V_3+500-4V_1=0$

węzeł nr 2. $150+V_1+V_4+500-4V_2=0$

węzeł nr 3. $V_4+300+0+V_1-4V_3=0$

węzeł nr 4. $150+V_3+0+V_2-4V_4=0$

Porządkując powyższe równania otrzymujemy układ równań (10), w którym wektor wyrazów wolnych jest postaci: $C=[-800\ -650\ -300\ -150]^T$.

Przedstawiona metoda nazywa się metodą bezpośrednią rozwiązywania równań. Nadaje się ona do rozwiązywania problemów ze stosunkowo niewielką liczbą węzłów obliczeniowych, ponieważ odwracanie macierzy o dużych rozmiarach zajmuje duże ilości pamięci komputera.

Do rozwiązania układów z dużą liczbą węzłów można użyć np. metody iteracyjnej **Gaussa-Seidla**. Dla rozpatrywanego przypadku wzór iteracyjny przyjmie postać:

$$V_{i,j}^{(n)}=\frac{1}{4}\left(V_{i,j-1}^{(n)}+V_{i-1,j}^{(n)}+V_{i+1,j}^{(n-1)}+V_{i,j+1}^{(n-1)}\right) \qquad (11),$$

gdzie: i,j - kolejne numery węzłów,
n - krok aktualny iteracji.
(n-1) – poprzedni krok iteracji

W pierwszym kroku zakłada się w obliczanych węzłach pewien potencjał ,który w kolejnych iteracjach zbliża się do wartości poszukiwanej.

Poniżej dla układu przedstawionego na rys. 1 przedstawiono przykładowe obliczenia dla pierwszych trzech kroków:

Krok1. Nadajemy wartości początkowe szukanym potencjałom V_1,V_2,V_3,V_4.

$$V=\begin{matrix}100 & 100\\ 100 & 100\end{matrix}$$

Krok 2. Liczymy potencjały:

$V_1^{(2)}=(500+300+V_2^{(1)}+V_3^{(1)})/4=(500+300+100+100)/4=250$

$V_2^{(2)}=(V_1^{(2)}+500+150+V_4^{(1)})/4=(250+500+150+100)/4=250$

$V_3^{(2)}=(V_1^{(2)}+300+V_4^{(1)}+0)/4=(250+300+100+0)/4=162{,}5$

$V_4^{(2)}=(V_2^{(2)}+V_3^{(2)}+150+0)/4=(250+162{,}5+150+0)/4=140{,}63$

Krok 3.

$V_1^{(3)}=(500+300+V_2^{(2)}+V_3^{(2)})/4=(500+300+250+162{,}5)/4=303$

$V_2^{(3)}=(V_1^{(3)}+500+150+V_4^{(2)})/4=(303+500+150+140{,}63)/4=273{,}41$

$V_3^{(3)}=(V_1^{(3)}+300+V_4^{(2)}+0)/4=(303+300+140{,}63+0)/4=185{,}91$

$V_4^{(3)}=(V_2^{(3)}+V_3^{(3)}+150+0)/4=(273{,}41+185{,}91+150+0)/4=152{,}33$

i tak dalej aż do spełnienia warunku: Dla każdego węzła $| V_i^{(n)}-V_i^{(n-1)} | <= eps$, gdzie eps jest założoną dokładnością obliczeń, np. eps=0,01.

Program ćwiczenia.

1. Napisać program obliczający metodą iteracji Gaussa-Seidla rozkład potencjałów na powierzchni obszaru przedstawionego na rys.1.Podzielić badany obszar na jednakowe elementy, które utworzą w środku: 4, 9, 16 i 25 węzłów. Dla każdego z przypadków przedstawić w postaci wykresu rozkład potencjału na badanej powierzchni.
2. Dla układu z 9 węzłami ułożyć ręcznie układ równań, zapisać w postaci macierzowej i rozwiązać go metodą bezpośrednią.
3. Porównać otrzymane wyniki.