POLITECHNIKA ŁÓDZKA KATEDRA INFORMATYKI STOSOWANEJ

Komputerowa analiza urządzeń termicznych

Laboratorium

Obliczanie dwuwymiarowego rozkładu pola temperatury z warunkami brzegowymi I rodzaju

Dr inż. Piotr Urbanek

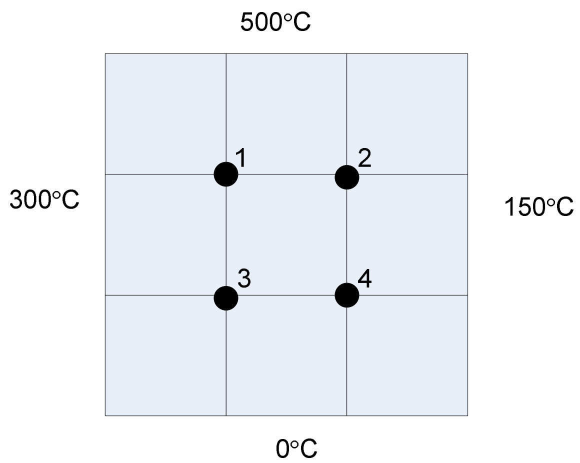
2011-10-27

Cel ćwiczenia.

Celem ćwiczenia jest obliczanie dwuwymiarowego rozkładu pola temperatury przy danych warunkach brzegowych I rodzaju (warunkach Dirichleta) oraz zapoznanie się z metodami rozwiązywania układów *n* równań liniowych z *n* niewiadomymi metodą bezpośrednią oraz przybliżoną (iteracyjną).

Zadanie.

Rozważmy powierzchnię w kształcie kwadratu o długości boku a=1m. Załóżmy, że na każdej krawędzi rozpatrywanej powierzchni dane są pewne wartości temperatury (rys. 1). Zakładamy, że na powierzchni płyty nie ma rozmieszczonych źródeł ciepła.



Rys.1. Badana powierzchnia wraz ze zdefiniowanymi węzłami środkowymi oraz warunkami brzegowymi I rodzaju.

Analiza teoretyczna.

Mamy do czynienia z polem temperatury w środowisku jednorodnym (λ=const) oraz, że w badanym obszarze nie ma źródeł grzejnych. Zatem w każdym punkcie tego obszaru rozkład temperatury spełnia równanie Laplace'a [1]:

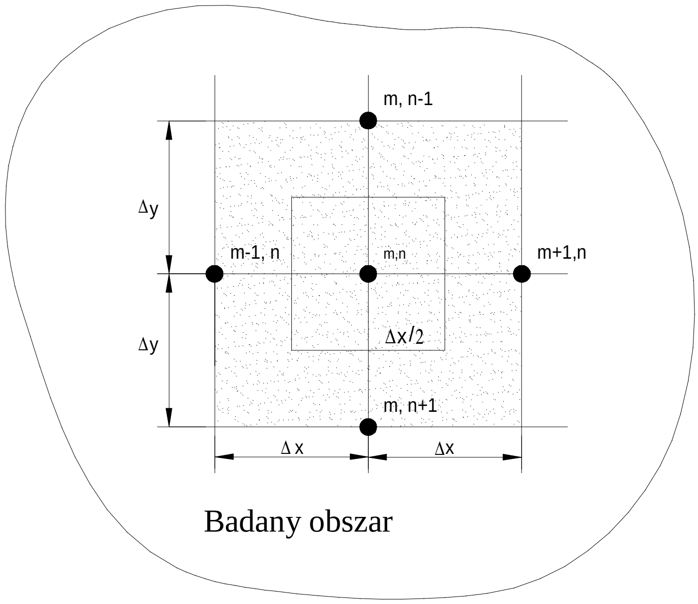
$$\nabla^2 T = 0 \tag{1}$$

które w postaci rozwiniętej przybierze postać:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \tag{2}$$

W analizowanym problemie mamy do czynienia z polem dwuwymiarowym, w którym temperatura **T** nie zmienia się wzdłuż osi z. Zatem równanie (2) upraszcza się do postaci:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0. \tag{3}$$



Rys.2. Przykład utworzonej siatki z węzłami wewnętrznymi

Stosunek boków elementów Δx do Δy w szczególnym przypadku może równać się jedności, co oznacza, że elementy te są kwadratami.
Przecięcia linii tworzą węzły obliczeniowe, w których wyznaczane są wartości szukanej funkcji.
W obliczeniach polowych wyróżnia się trzy rodzaje węzłów:

- środkowe, czyli takie, które leżą w środku badanego obszaru,
- powierzchniowe, czyli takie, które leżą na powierzchni badanego obszaru,
- narożne, czyli takie, które leżą na rogach badanego obszaru.

Po tak przeprowadzonej dyskretyzacji równanie różniczkowe (3) zostanie zapisane w postaci różnicowej. Wartości szukanej funkcji **T** pomiędzy węzłami można wyznaczyć z przybliżonych wzorów:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right]_{m+\frac{1}{2},n} \approx \frac{T_{m+1,n}-T_{m,n}}{\Delta x}\,; \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right]_{m-\frac{1}{2},n} \approx \frac{T_{m,n}-T_{m-1,n}}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right]_{m,n+\frac{1}{2}} \approx \frac{T_{m,n+1}-T_{m,n}}{\Delta y}\,; \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right]_{m,n-\frac{1}{2}} \approx \frac{T_{m,n}-T_{m,n-1}}{\Delta y} \tag{4}$$

Pochodne drugiego rzędu w punkcie (m, n) będą zatem równe:

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right]_{m,n} \approx \frac{\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right]_{m+\frac{1}{2},n} - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right]_{m-\frac{1}{2},n}}{\Delta x} = \frac{T_{m+1,n}+T_{m-1,n}-2T_{m,n}}{\left(\Delta x^2\right)}$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right]_{m,n} \approx \frac{\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right]_{m,n+\frac{1}{2}} - \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right]_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Delta y} = \frac{T_{m,n+1}+T_{m,n-1}-2T_{m,n}}{\left(\Delta y^2\right)} \tag{5}$$

Ze wzorów (5) wynika, że wartością pochodnej funkcji $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ w punkcie (m, n) jest różnica temperatur pomiędzy punktami (m+1,n) i (m,n). Analogicznie wyznacza się wartości pochodnej w pozostałych punktach pomiędzy węzłami.

Podstawiając powyższe równania do wzoru (4) otrzymujemy:

$$\frac{T_{m+1,n}+T_{m-1,n}-2T_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1}+T_{m,n-1}-2T_{m,n}}{(\Delta y)^2} = 0 \tag{6}$$

Zakładając równomierny podział siatki wewnątrz badanego obszaru, czyli Δx=Δy otrzymujemy:

$$T_{m+1,n}+T_{m-1,n}+T_{m,n+1}+T_{m,n-1}-4T_{m,n}=0 \tag{7}$$

Podstawiając równanie (8) do każdego węzła wewnętrznego otrzymujemy n równań z n niewiadomymi, który można przedstawić w postaci:

A*T=C (8)

gdzie: **A** - macierz współczynników przy szukanych wartościach temperatury,

T - wektor szukanych wartości temperatury,

C - wektor wyrazów wolnych wynikający z warunków brzegowych.

Przykładowo, dla węzłów nr 1, 2, 3, 4 obszaru przedstawionego na rys.1 równanie temperatur będzie wyglądało następująco:

węzeł nr 1.	$T_2+300+T_3+500-4T_1=0$
węzeł nr 2.	$150+T_1+T_4+500-4T_2=0$
węzeł nr 3.	$T_4+300+0+T_1-4T_3=0$
węzeł nr 4.	$150+T_3+0+T_2-4T_4=0$

Porządkując powyższe równania otrzymujemy układ równań (10), w którym wektor wyrazów wolnych jest postaci: $C=[-800\ -650\ -300\ -150]^T$.

Przedstawiona metoda nazywa się **<u>bezpośrednią metodą rozwiązywania równań</u>**. Nadaje się ona do rozwiązywania problemów ze stosunkowo niewielką liczbą węzłów obliczeniowych, ponieważ odwracanie macierzy o dużych rozmiarach wymaga dużych zasobów obliczeniowych (pamięci, mocy obliczeniowej procesora) komputera.

Do rozwiązania układów z dużą liczbą węzłów wykorzystywane są metody przybliżone. Jedną z nich jest metoda iteracyjna **Gaussa-Seidla**. Dla rozpatrywanego zagadnienia wzór iteracyjny przyjmie postać:

$$T_{m,n}^{(k)} = \frac{1}{4}\left(T_{m,n-1}^{(k)} + T_{m-1,n}^{(k)} + T_{m+1,n}^{(k-1)} + T_{m,n+1}^{(k-1)}\right) \qquad (9),$$

gdzie: m,n - kolejne numery węzłów,

k - aktualny krok iteracji.

(k-1) – poprzedni krok iteracji

W pierwszym kroku zakłada się w obliczanych węzłach pewną początkową temperaturę, która w kolejnych iteracjach zbliża się do wartości poszukiwanej.
Poniżej dla układu przedstawionego na rys. 1 przedstawiono przykładowe obliczenia dla pierwszych trzech kroków metody Gaussa-Seidla:

Krok1. Nadajemy wartości początkowe szukanym wartościom temperatury T_1,T_2,T_3,T_4.

Temperatury początkowe

$$T=\begin{bmatrix}500 & 500 & 500 & 500\\ 300 & T_1 & T_2 & 150\\ 300 & T_3 & T_4 & 150\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}=\begin{bmatrix}500 & 500 & 500 & 500\\ 300 & 100 & 100 & 150\\ 300 & 100 & 100 & 150\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Krok 2. Liczymy temperatury:

$T_1^{(2)}$=(500+300+$T_2^{(1)}$+$T_3^{(1)}$)/4=(500+300+100+100)/4=250°C

$T_2^{(2)}$=($T_1^{(2)}$+500+150+$T_4^{(1)}$)/4=(250+500+150+100)/4=250°C

$T_3^{(2)}$=($T_1^{(2)}$+300+$T_4^{(1)}$+0)/4=(250+300+100+0)/4=162,5°C

$T_4^{(2)}$=($T_2^{(2)}$+$T_3^{(2)}$+150+0)/4=(250+162,5+150+0)/4=140,63°C

Krok 3.

$T_1^{(3)}$=(500+300+$T_2^{(2)}$+$T_3^{(2)}$)/4=(500+300+250+162,5)/4=303°C

$T_2^{(3)}$=($T_1^{(3)}$+500+150+$T_4^{(2)}$)/4=(303+500+150+140,63)/4=273,41°C

$T_3^{(3)}$=($T_1^{(3)}$+300+$T_4^{(2)}$+0)/4=(303+300+140,63+0)/4=185,91°C

$T_4^{(3)}$=($T_2^{(3)}$+$T_3^{(3)}$+150+0)/4=(273,41+185,91+150+0)/4=152,33°C

i tak dalej aż do spełnienia warunku: Dla każdego węzła | $T_i^{(n)}$-$T_i^{(n-1)}$ | <= eps, gdzie eps jest założoną dokładnością obliczeń, np. eps=0,01.

Program ćwiczenia.

1. Napisać program obliczający metodą iteracji Gaussa-Seidla rozkład temperatur na powierzchni obszaru przedstawionego na rys.1.Podzielić badany obszar na jednakowe elementy, które utworzą w środku: 4, 9, 16 i 25 węzłów. Dla każdego z przypadków przedstawić w postaci wykresu rozkład temperatur na badanej powierzchni.
2. Dla układu z 4 węzłami wewnętrznymi ułożyć ręcznie układ równań, zapisać w postaci macierzowej i rozwiązać go metodą bezpośrednią.
3. Porównać otrzymane wyniki.