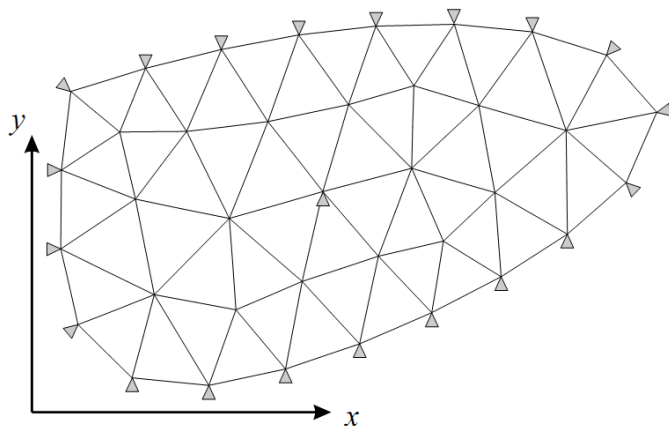


Metody komputerowe w zagadnieniach cieplnych.

Dr inż. Piotr Urbanek.

Metoda Różnic Skończonych



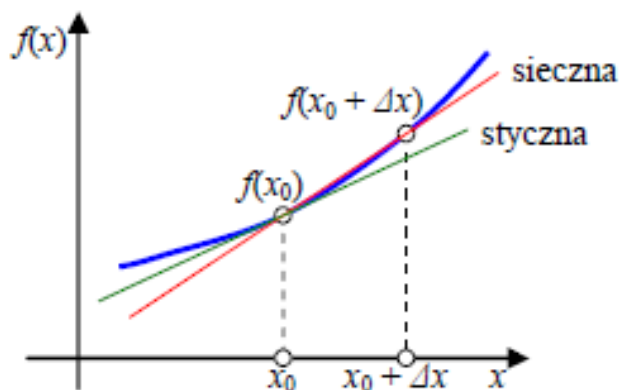
Metoda różnic skończonych (MRS) jest jedną z najprostszych metod numerycznego rozwiązywania zagadnień opisanych przez układy równań różniczkowych. Idea tej metody polega na zastąpieniu pochodnych występujących w tych równaniach przez odpowiednie ilorazy różnicowe. Pewne trudności w zastosowaniu tej metody wiążą się z warunkami brzegowymi oraz z nieregularnym kształtem brzegu.

Ilorazy różnicowe jako przybliżenia pochodnych

Ilorazy dla pierwszej pochodnej

Pochodna funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 jest zdefiniowana jako

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$



Geometrycznie, jest to tangens kąta nachylenia stycznej do krzywej $y = f(x)$ w punkcie x_0 . Stąd dla „małych” h mamy w przybliżeniu:

$$\frac{df(x_0)}{dx} \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

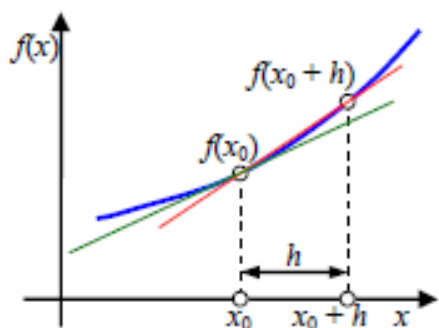
Geometryczna interpretacja pochodnej: dla $x \rightarrow 0$ sieczna (czerwona linia) dąży do stycznej (zielona linia)

- obliczamy wartość funkcji w punkcie x_0 ,
- obieramy pewien bliski punkt $x_0 + h$ i obliczamy w nim wartość funkcji,
- odejmujemy od niej wartość funkcji w punkcie x_0 ,
- dzielimy przez przyrost h zmiennej x .

Rodzaje ilorazów różnicowych

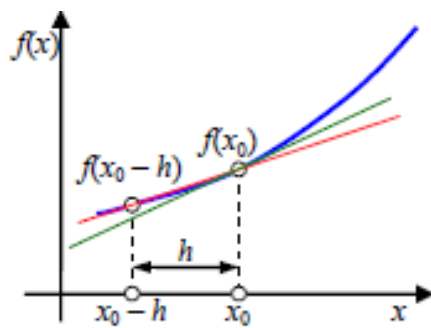
iloraz różnicowy wprzód

$$\frac{df(x_0)}{dx} \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$



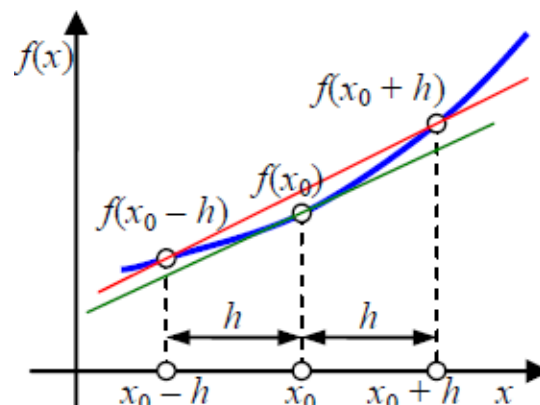
ilorazem różnicowym wstecz

$$\frac{df(x_0)}{dx} \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h},$$



Symetrycznego ilorazu różnicowego

$$\frac{df(x_0)}{dx} \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h},$$



Przykład obliczeniowy

Obliczyć przybliżoną wartość pochodnej funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie $x_0 = 2$, przyjmując $h = 0,1$.

$$\left. \frac{dx^3}{dx} \right|_{x=2} = 3x^2 \Big|_{x=2} = 3 \cdot 2^2 = 12. \quad \text{Dokładna wartość pochodnej}$$

$$\left. \frac{dx^3}{dx} \right|_{x=2} \approx \frac{(2 + 0,1)^3 - 2^3}{0,1} = 12,61. \quad \text{Wartość obliczona ilorazem różnicowym wprzód}$$

$$\left. \frac{dx^3}{dx} \right|_{x=2} \approx \frac{2^3 - (2 - 0,1)^3}{0,1} = 11,41, \quad \text{Iloraz różnicowy wstecz}$$

$$\left. \frac{dx^3}{dx} \right|_{x=2} \approx \frac{(2 + 0,1)^3 - (2 - 0,1)^3}{2 \cdot 0,1} = 12,01. \quad \text{iloraz symetryczny}$$

Iloraz różnicowy dla drugiej pochodnej

W przypadku drugiej pochodnej najwygodniej jest rozpocząć od rozwinięcia funkcji $f(x)$ w szereg Taylora w otoczeniu punktu $x = x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

Przyjmując w nim $x = x_0 + h$, gdzie $h > 0$, dostajemy

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0)h^3 + O(h^4),$$

a dla $x = x_0 - h$ mamy

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - \frac{1}{1!} f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(x_0)h^2 - \frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0)h^3 + O(h^4).$$

Po dodaniu stronami powyższych równań i przekształceniu dostajemy:

$$f''(x_0) = \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} \approx \frac{f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h)}{h^2}.$$

Przykład obliczeniowy

Obliczyć przybliżoną wartość drugiej pochodnej funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie $x_0 = 2$ przyjmując $h = 0,1$.

Dokładna wartość drugiej pochodnej wynosi

$$\left. \frac{d^2 x^3}{dx^2} \right|_{x=2} = 6x \Big|_{x=2} = 6 \cdot 2 = 12,$$

natomiast wzór różnicowy daje

$$\left. \frac{d^2 x^3}{dx^2} \right|_{x=2} \approx \frac{(2 - 0,1)^3 - 2 \cdot 2^3 + (2 + 0,1)^3}{0,1^2} = 12.$$

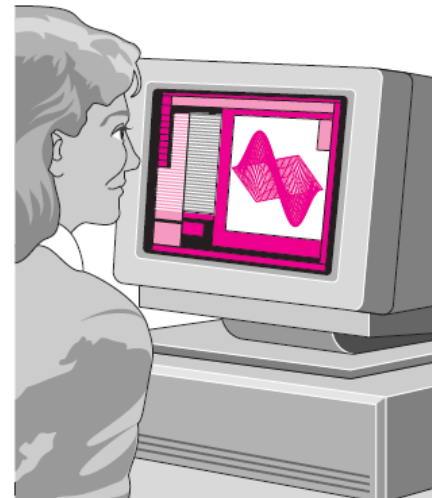
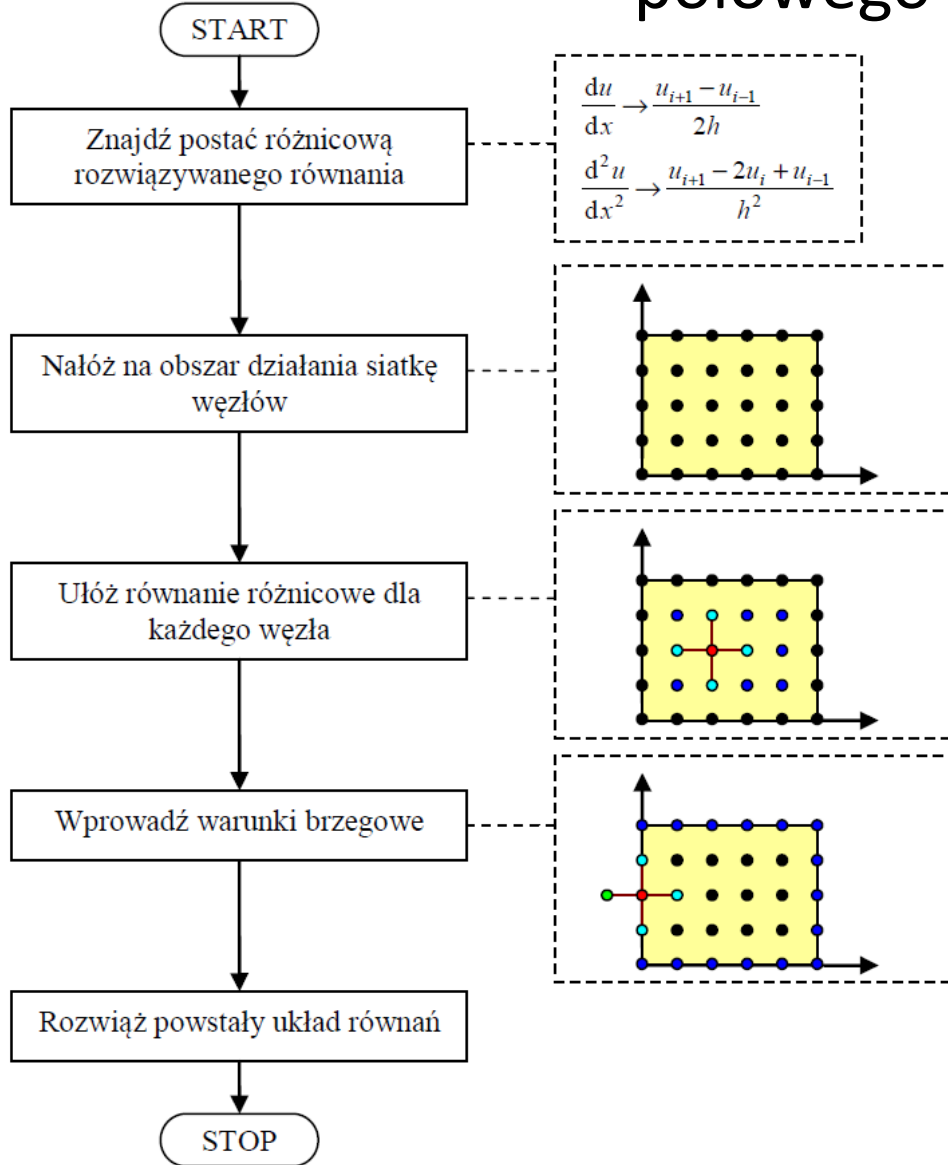
Wynik jest dokładny, gdyż czwarta i wyższe pochodne $f(x)$ równe są zeru.

Ogólna idea metody różnic skończonych

Rozwiązywanie równania różniczkowego metodą różnic skończonych można podzielić na cztery etapy:

1. Zapisanie równania różniczkowego w postaci różnicowej, tj. na zastąpienie pochodnych odpowiednimi ilorazami różnicowymi.
2. Nałożenie na obszar działania siatki węzłów, w których poszukiwane będą wartości funkcji pola.
3. Ułożenie równania różnicowego dla każdego węzła, z uwzględnieniem warunków brzegowych.
4. Rozwiązanie powstałego układu liniowych równań algebraicznych ze względu na nieznane wartości węzłowe funkcji pola.

Schemat rozwiązywania zagadnienia polowego za pomocą MRS



Uwzględnianie warunków brzegowych

Zakładamy, że ograniczamy rozważania do równań różniczkowych I i II rzędu

Operatory różnicowe zawierają wartości funkcji tylko w węzłach bezpośrednio sąsiadujących z węzłem, dla którego zapisujemy operator.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta_x}$$

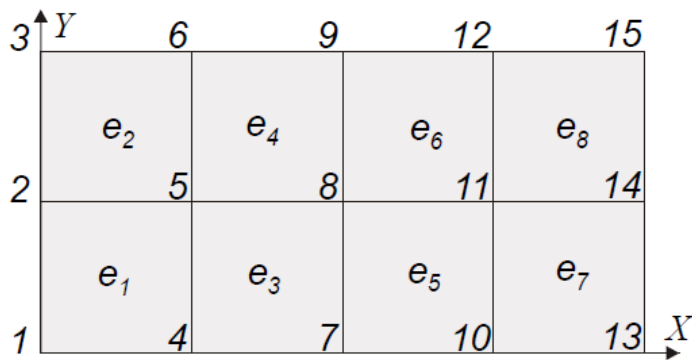
$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta_x^2}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta_y}$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta_y^2}$$

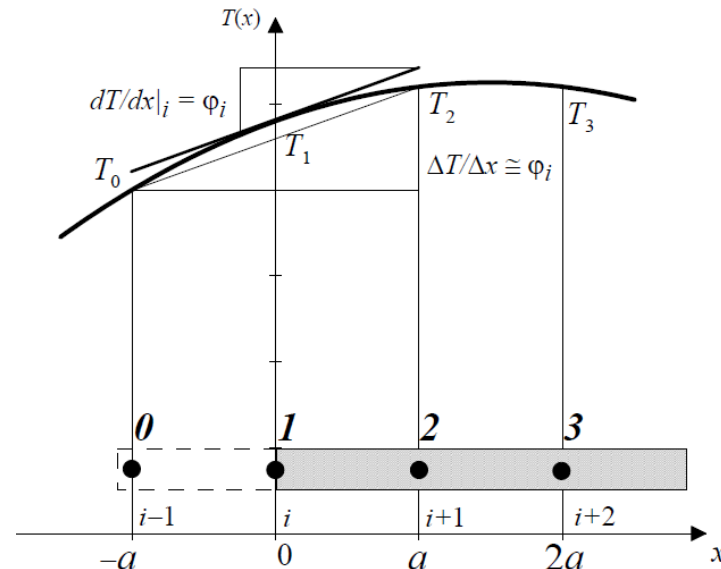
Warunki Dirichleta (I rodzaju)

Warunki brzegowe III rodzaju (warunki Neumana)

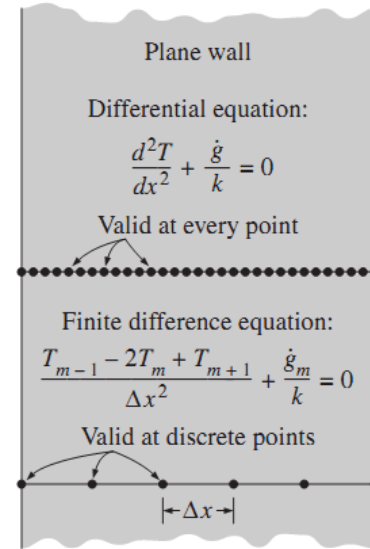
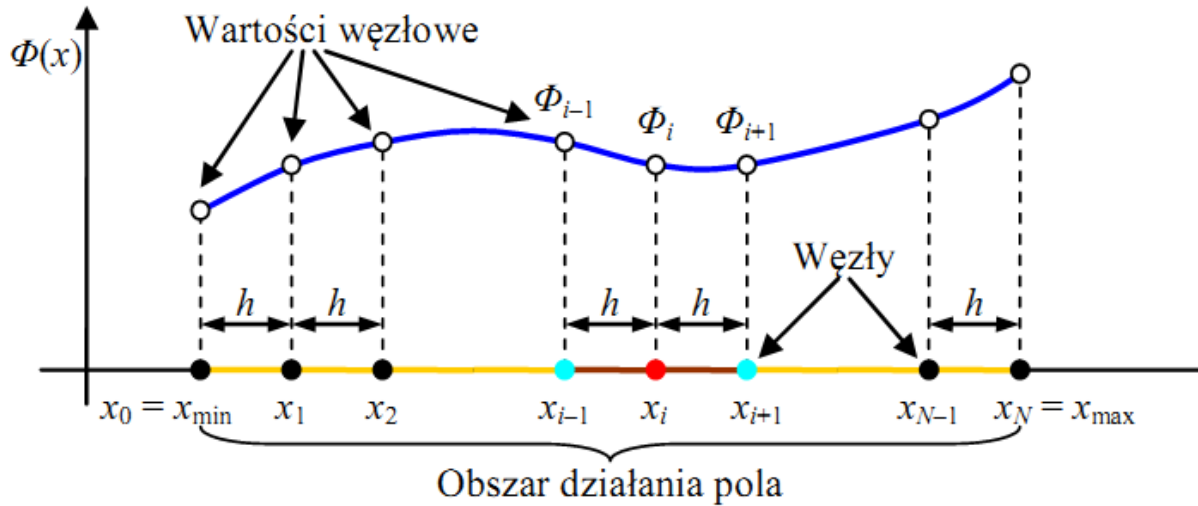


$$u_1, u_2, u_3, u_6, u_9, u_{12} = 0$$

$$u_4, u_7, u_{10}, u_{13}, u_{14}, u_{15} = 0$$



PRZYKŁAD: układ jednowymiarowy – przepływ ciepł przez płaską dużą ścianę

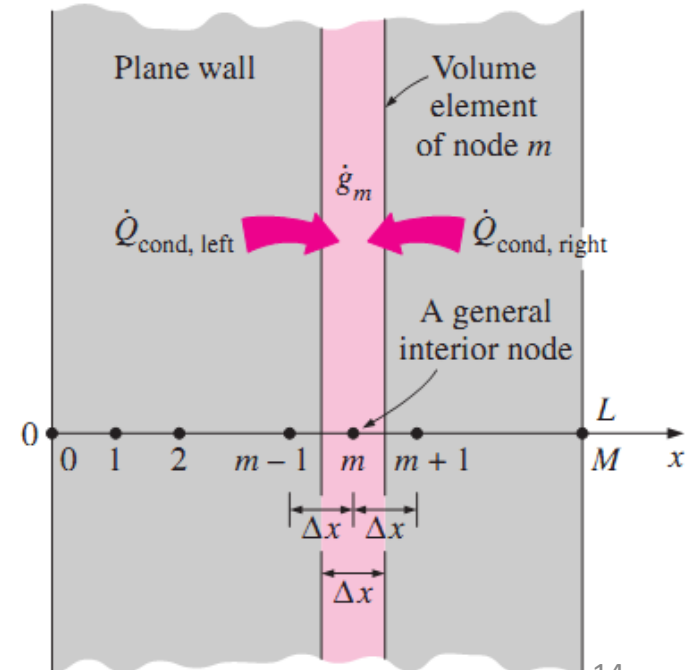


Gdy wewnątrz rozpatrywanego układu występują źródła ciepła \dot{g} , to po obowiązuje równanie:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0$$

$$\frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta x} + \frac{\dot{g}}{k} = 0$$

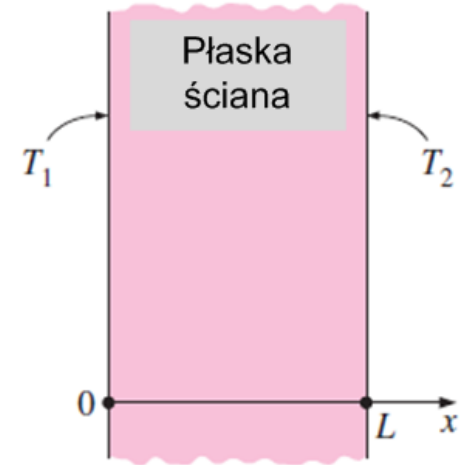
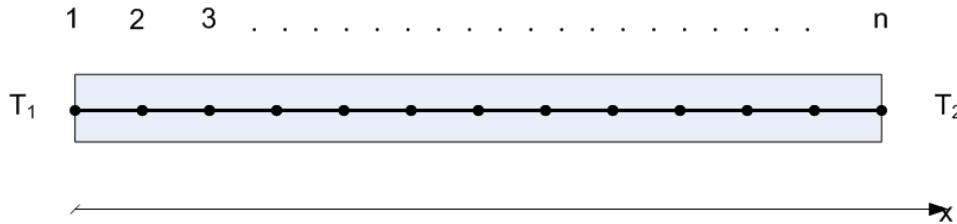
$$\dot{Q}_{\text{kondukcji lewa}} + \dot{Q}_{\text{kondukcji prawa}} + \dot{G}_{\text{elementu}} = \frac{\Delta E_{\text{elementu}}}{\Delta t} = 0$$



PRZYKŁAD: układ jednowymiarowy – przepływ ciepł przez płaską dużą ścianę

Jednowymiarowy, ustalony przepływ ciepła bez źródeł ciepła.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

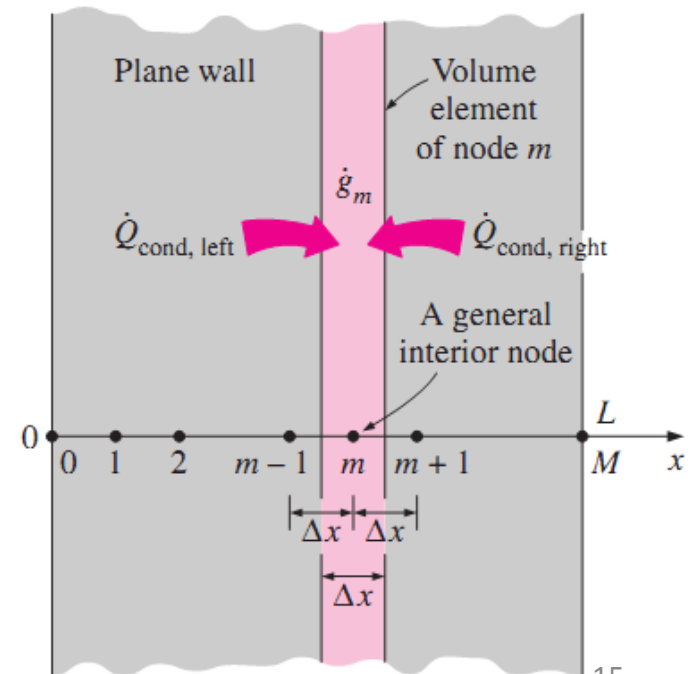


$$\frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta x^2} = 0 \quad T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1} = 0$$

Gdy wewnątrz rozpatrywanego układu występują źródła ciepła \dot{g} , to po obowiązuje równanie:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0$$

$$\dot{Q}_{\text{kondukcji,lewa}} + \dot{Q}_{\text{kondukcji,prawa}} + \dot{G}_{\text{elementu}} = \frac{\Delta E_{\text{elementu}}}{\Delta t} = 0$$



PRZYKŁAD: układ jednowymiarowy – przepływ ciepł przez płaską dużą ścianę

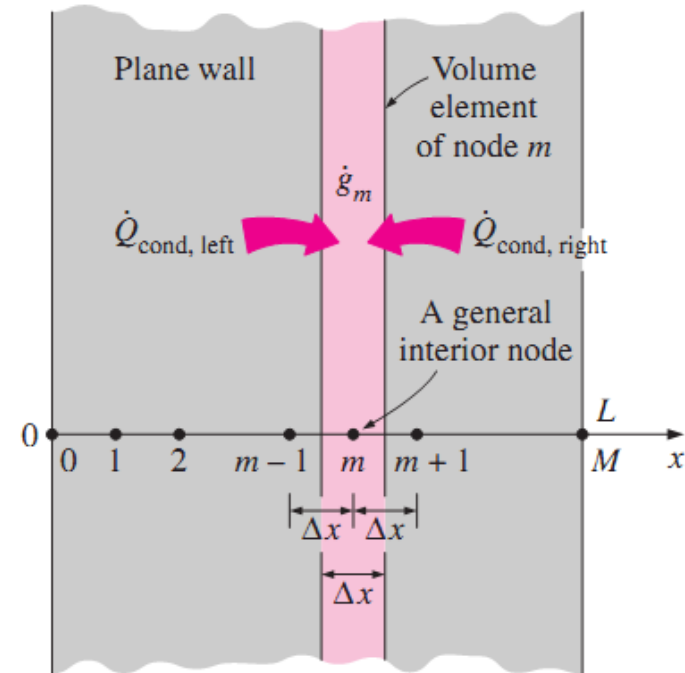
$$\dot{Q}_{\text{kondukcji,lewa}} + \dot{Q}_{\text{kondukcji,prawa}} + \dot{G}_{\text{elementu}} = \frac{\Delta E_{\text{elementu}}}{\Delta t} = 0$$

$$\dot{Q}_{\text{kond,lewa}} = k \cdot A \frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x}$$

$$\dot{Q}_{\text{kond,prawa}} = k \cdot A \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x}$$

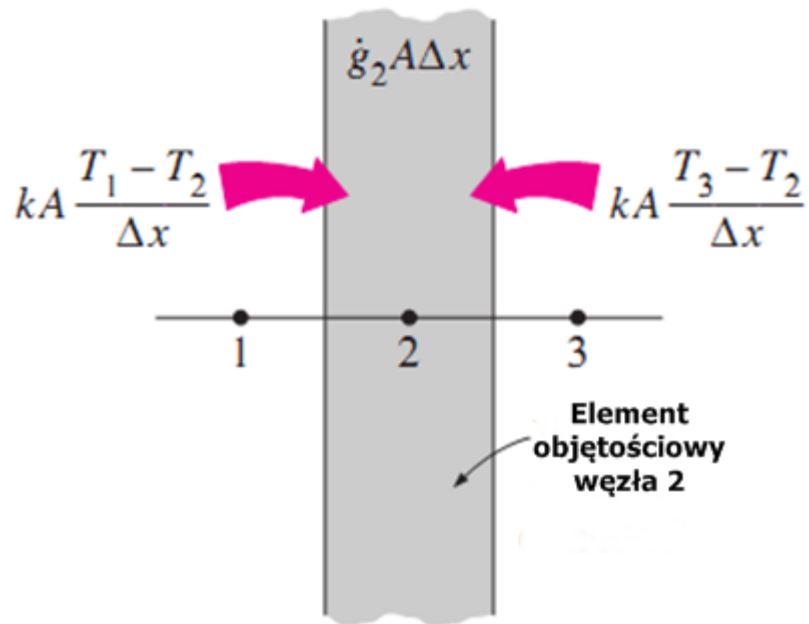
$$\dot{G}_{\text{elementu}} = \dot{g}_m \cdot V_{\text{elementu}} = \dot{g} \cdot A \cdot \Delta x$$

$$k \cdot A \frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x} + k \cdot A \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} + \dot{g}_m A \cdot \Delta x = 0$$



$$\frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta x} + \frac{\dot{g}}{k} = 0$$

Zadanie. Obliczyć rozkład temperatury



$$kA \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} + kA \frac{T_3 - T_2}{\Delta x} + \dot{g}_2 A \Delta x = 0$$

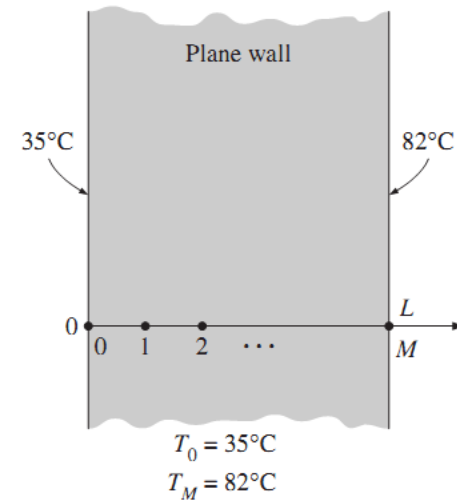
Warunki brzegowe w obliczeniach cieplnych

1. Warunek Dirichleta

$$T(0) = T_0 = \text{Wartości ustalonej}$$

$$T(L) = T_M = \text{Wartości ustalonej}$$

Dodatkowo, jeśli w węzłach wewnętrznych występują źródła ciepła:



$$\dot{Q}_{\text{kondukcji,lewa}} + \dot{Q}_{\text{kondukcji,prawa}} + \dot{G}_{\text{elementu}} = \frac{\Delta E_{\text{elementu}}}{\Delta t} = 0$$

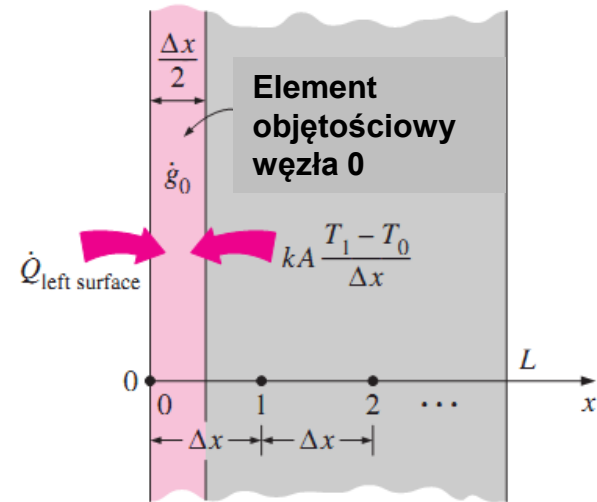


$$\frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta x} + \frac{\dot{g}}{k} = 0$$

Gdy lewa krawędź jest izolowana termicznie:

$$\frac{T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1}}{\Delta x} + \frac{\dot{g}}{k} = 0$$

Jeśli na brzegach obszaru występują źródła ciepła w postaci strumienia ciepła :



$$\dot{Q}_{\text{lewej kraw}} + kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{g}_0 A \frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\dot{q}_0 A + kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{g}_0 A \frac{\Delta x}{2} = 0$$

Warunki brzegowe wymiany ciepła z brzegów obszaru.

ε – emisyjność powierzchni układu

σ – stała promieniowania

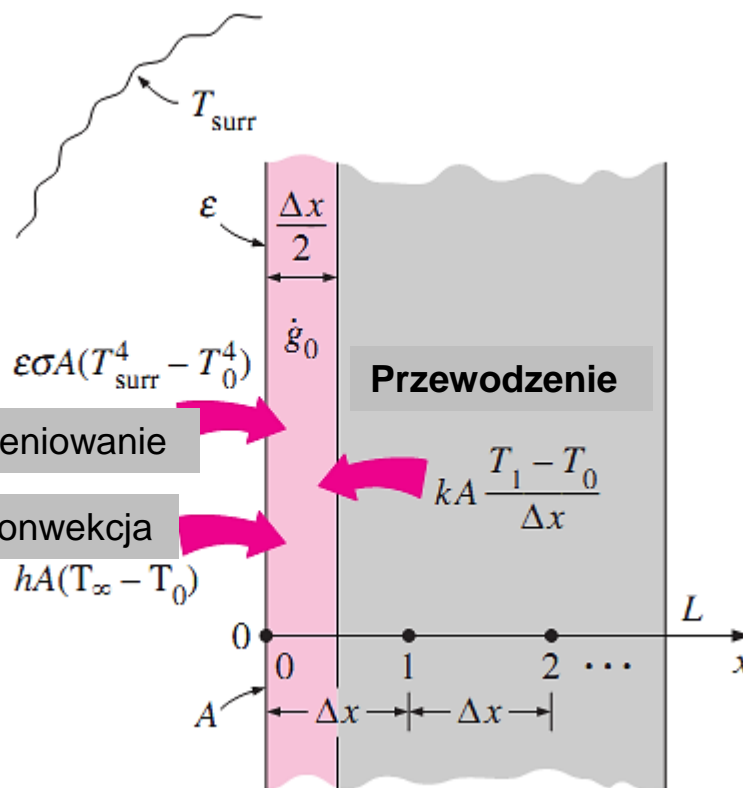
$$5,670373(21) \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

$$\varepsilon \sigma A (T_{\text{surr}}^4 - T_0^4) + kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{g}_0 (A \Delta x / 2) = 0$$

Promieniowanie

Konwekcja

$$hA(T_{\infty} - T_0) + kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{g}_0 (A \Delta x / 2) = 0$$



h – współczynnik konwekcji [W/(m²K)]

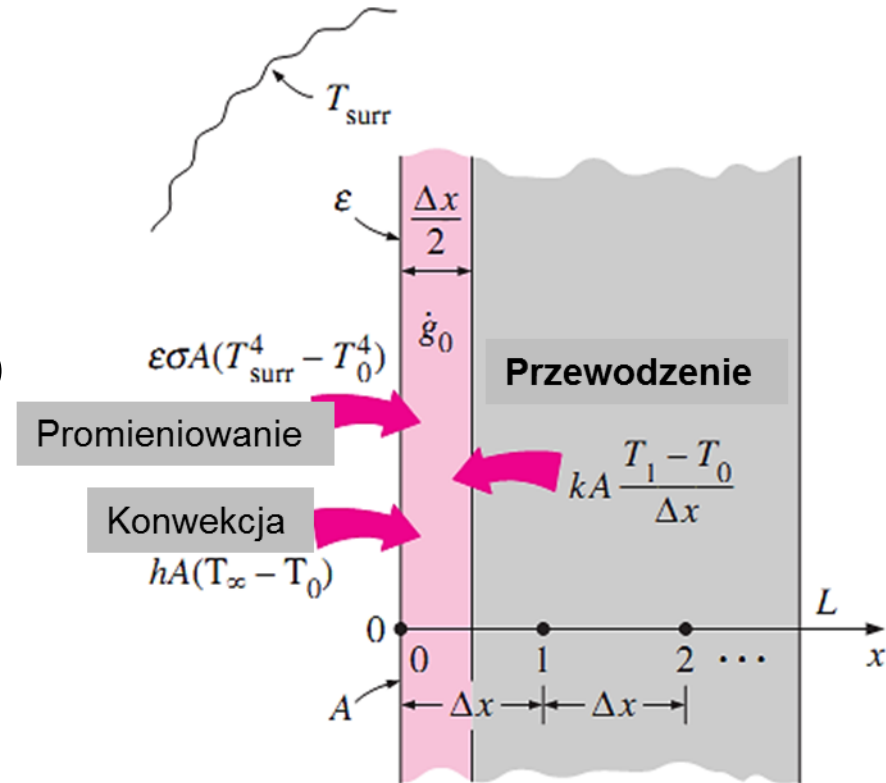
Połączone warunki brzegowe – konwekcja i promieniowanie

$$\dot{q}_0 A + hA(T_\infty - T_0) + \varepsilon \sigma A(T_{\text{surr}}^4 - T_0^4) + kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{g}_0(A\Delta x/2) = 0$$

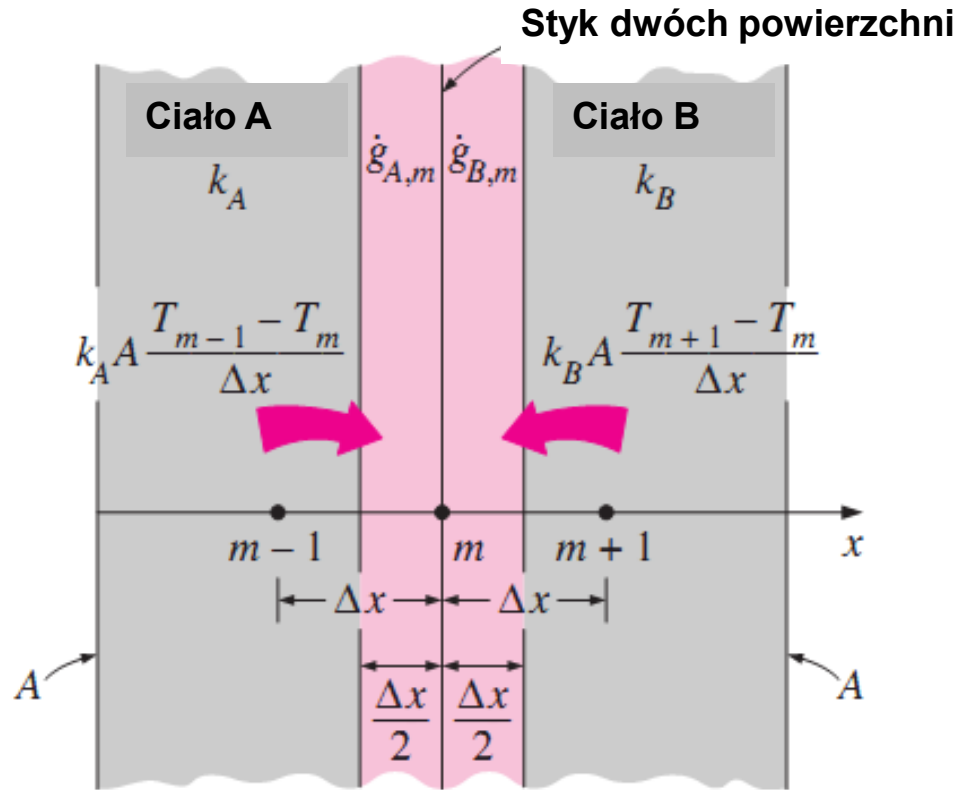
h – konwekcja (unoszenie cząsteczek)

$$h_{\text{całkowite}} = h + \varepsilon$$

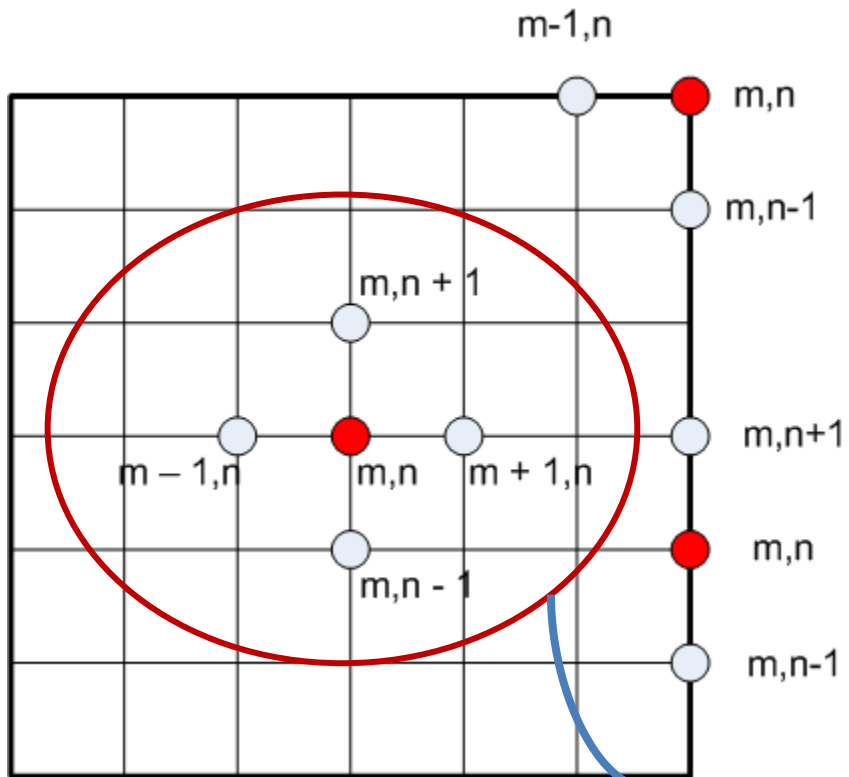
$$h_{\text{całkowite}} A(T_\infty - T_0) + kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{g}_0(A\Delta x/2)$$



Wymiana ciepła na styku dwóch powierzchni.

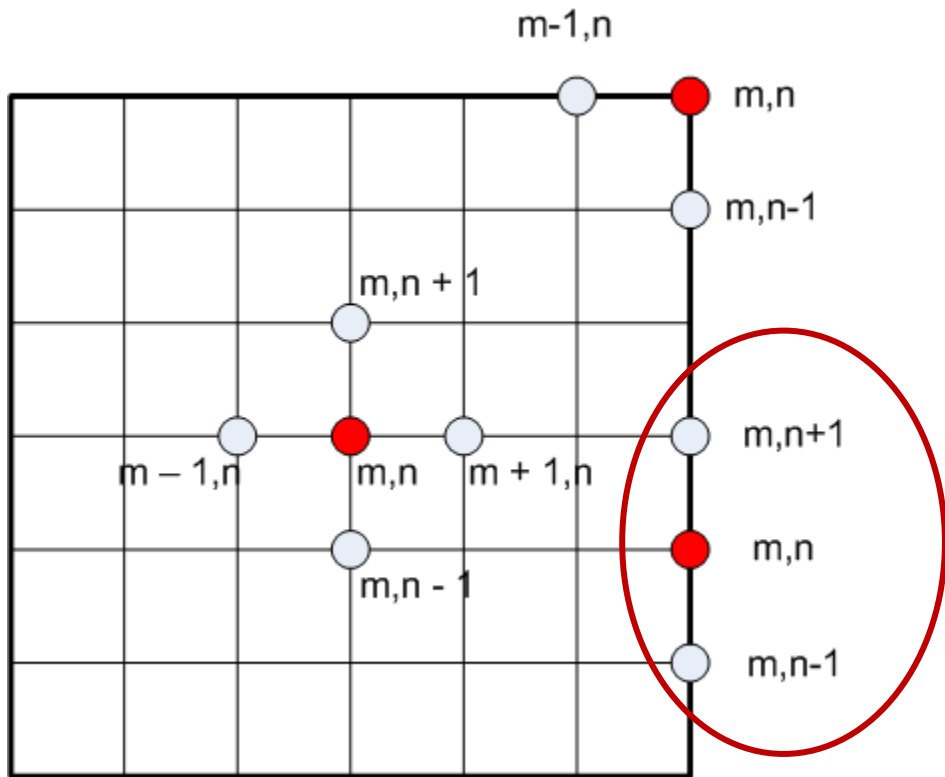


$$k_A A \frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x} + k_B A \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} + \dot{q}_{A,m}(A\Delta x/2) + \dot{q}_{B,m}(A\Delta x/2) = 0$$



$$T_{m+1,n} + T_{m,n+1} + T_{m-1,n} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0$$

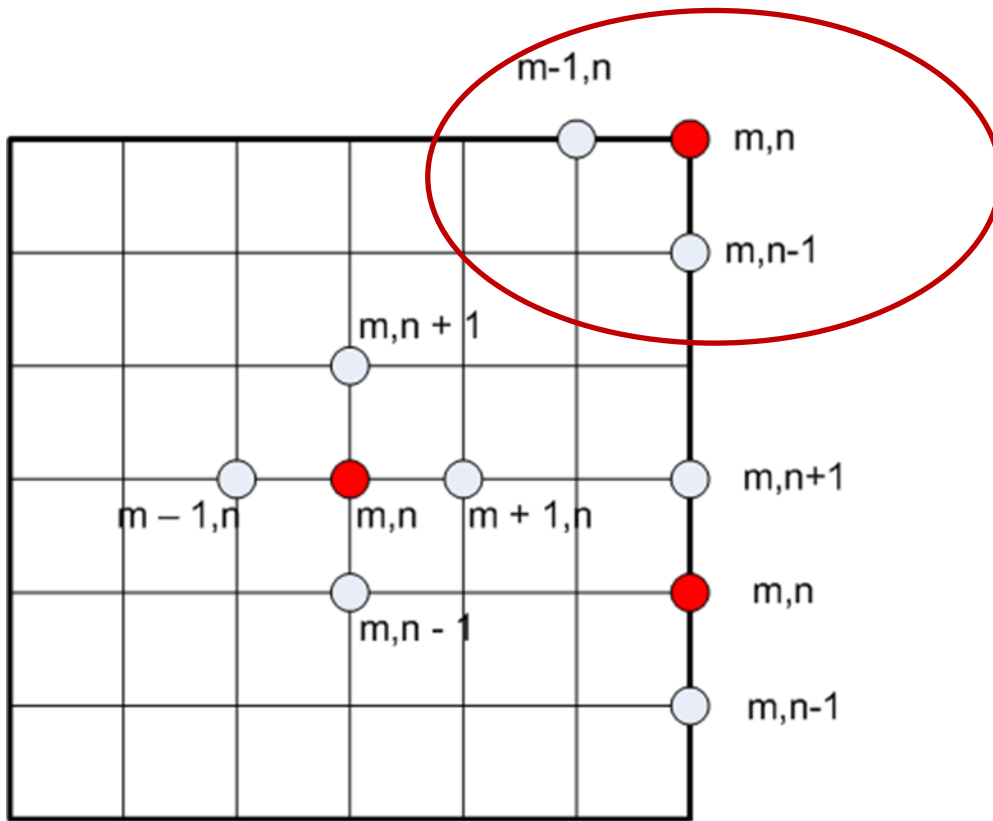
$$T_{m,n} = \left(T_{m+1,n} + T_{m,n+1} + T_{m-1,n} + T_{m,n-1} \right) / 4$$



$$0 = \frac{h \Delta x}{k} T_x + \frac{1}{2} (2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) - \left(\frac{h \Delta x}{k} + 2 \right) T_{m,n}$$

$$T_{m,n} = \frac{T_{m-1,n} + (T_{m,n+1} + T_{m,n-1})/2 + \text{Bi}T_x}{2 + \text{Bi}}$$

$$\text{Bi} = \frac{h \Delta x}{k}$$



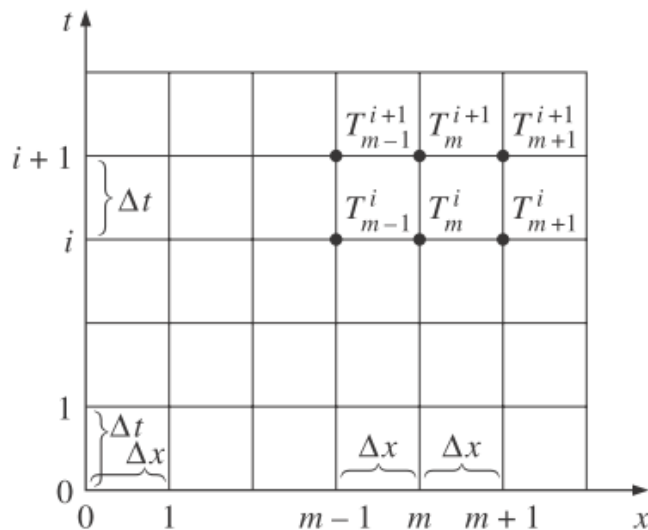
$$0 = 2 \frac{h \Delta x}{k} T_{\infty} + (T_{m-1,n} + T_{m,n-1}) - 2 \left(\frac{h \Delta x}{k} + 1 \right) T_{m,n}$$

$$T_{m,n} = \frac{(T_{m-1,n} + T_{m,n-1})/2 + \text{Bi}T_{\infty}}{1 + \text{Bi}}$$

$$\text{Bi} = \frac{h \Delta x}{k}$$

Nieustalony przepływ ciepła

W przypadku nieustalonego przepływu ciepła dyskretyzacji podlega zarówno przestrzeń ($\Delta x, \Delta y, \Delta z$), w której liczymy rozkład temperatury, jak i czas (Δt), w którym liczymy osiągnięcie w danym układzie quasi-ustalonego rozkładu temperatury.



T_m^i ← Dyskretyzacja czasu

T_m^{i+1} ← Kolejny krok czasowy

← Dyskretyzacja przestrzeni

$$t_i = i\Delta t$$

Przykład.

Analiza rozkładu temperatury wstępnie nagrzanego do temperatury T_0 bloku metalowego, który wyjęty z pieca w chwili t_0 stygnie przez czas $t = 3$ godz. do temperatury $T_{końcowa}$.

Bilans energii przy analizie stanów cieplnie nieustalonych

$$\left(\begin{array}{l} \text{ciepło dopływające do} \\ \text{elementu z każdej jego} \\ \text{powierzchni w czasie } \Delta t \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{Ciepło generowane} \\ \text{w objętości elementu} \\ \text{w czasie } \Delta t \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Zmiana energii} \\ \text{w objętości elementu} \\ \text{w czasie } \Delta t \end{array} \right)$$

$$\Delta t \times \sum_{\substack{\text{pow} \\ \text{elem}}} \dot{Q} + \Delta t \times \dot{G}_{elem} = \Delta E_{elem}$$

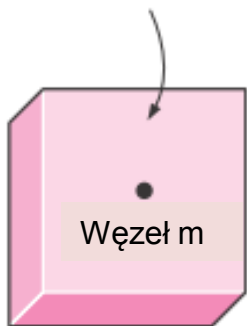
$$\Delta E_{elem} = mC\Delta T = \rho V_{elem}C\Delta T$$

$$\sum_{\substack{\text{pow} \\ \text{elem}}} \dot{Q} + \dot{G}_{elem} = \frac{\Delta E_{elem}}{\Delta t} = \rho V_{elem}C \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

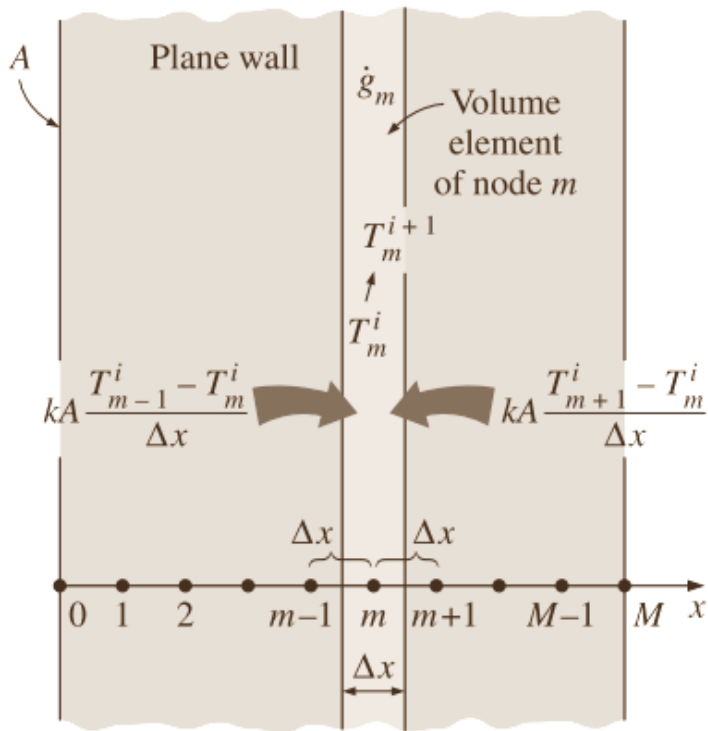
$$\sum_{\substack{\text{pow} \\ \text{elem}}} \dot{Q} + \dot{G}_{elem} = \rho V_{elem}C \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t}$$

$$T_m^i = i\Delta t$$

$$T_m^{i+1} = (i+1)\Delta t$$



Nieustalony przepływ ciepła przez płaską ścianę



$$\tau = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \quad \text{Bezwymiarowy współczynnik Fouriera}$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho C} \Rightarrow \text{dyfuzja cieplna}$$

$$T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1} + \frac{\dot{g}_m \Delta x^2}{k} = \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\tau}$$

$$T_{m-1} - 2T_m + T_{m+1} + \frac{\dot{g}_m \Delta x^2}{k} = \frac{\Delta x^2}{\alpha \Delta t} (T_m^{i+1} - T_m^i)$$

$$kA \frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x} + kA \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} + \dot{g}_m A \Delta x = \rho A \Delta x C \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t}$$

Nieustalony przepływ ciepła przez płaską ścianę

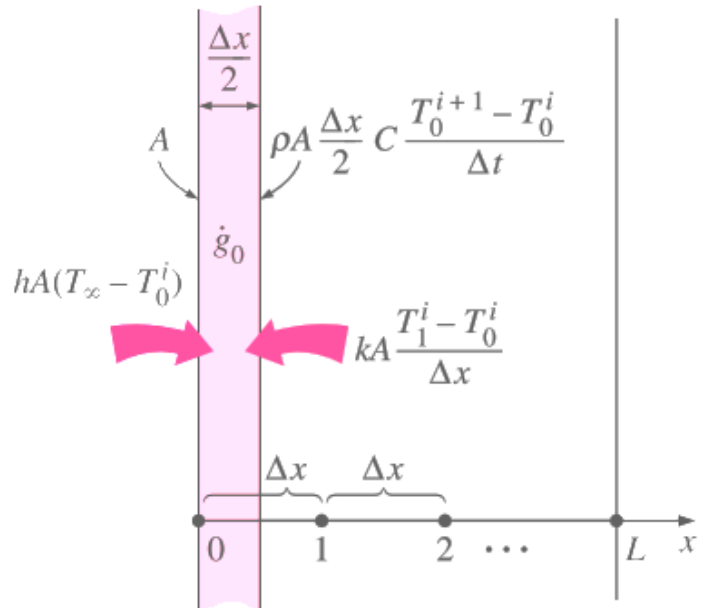
$$T_{m-1}^i - 2T_m^i + T_{m+1}^i + \frac{\dot{g}_m^i \Delta x^2}{k} = \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\tau} \quad (\text{explicit})$$

$$T_{m-1}^{i+1} - 2T_m^{i+1} + T_{m+1}^{i+1} + \frac{\dot{g}_m^{i+1} \Delta x^2}{k} = \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\tau} \quad (\text{implicit})$$

Równanie przepływu ciepła wewnątrz płaskiej ściany

$$T_m^{i+1} = \tau(T_{m-1}^i + T_{m+1}^i) + (1 - 2\tau) T_m^i + \tau \frac{\dot{g}_m^i \Delta x^2}{k} \quad \tau = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$$

Nieustalony przepływ ciepła w płaskiej ścianie z warunkiem brzegowym III rodzaju



$$hA(T_{\infty} - T_0^i) + kA \frac{T_1^i - T_0^i}{\Delta x} + \dot{g}_0^i A \frac{\Delta x}{2} = \rho A \frac{\Delta x}{2} C \frac{T_0^{i+1} - T_0^i}{\Delta t}$$

$$T_0^{i+1} = \left(1 - 2\tau - 2\tau \frac{h\Delta x}{k} \right) T_0^i + 2\tau T_1^i + 2\tau \frac{h\Delta x}{k} T_{\infty} + \tau \frac{\dot{g}_0^i \Delta x^2}{k}$$

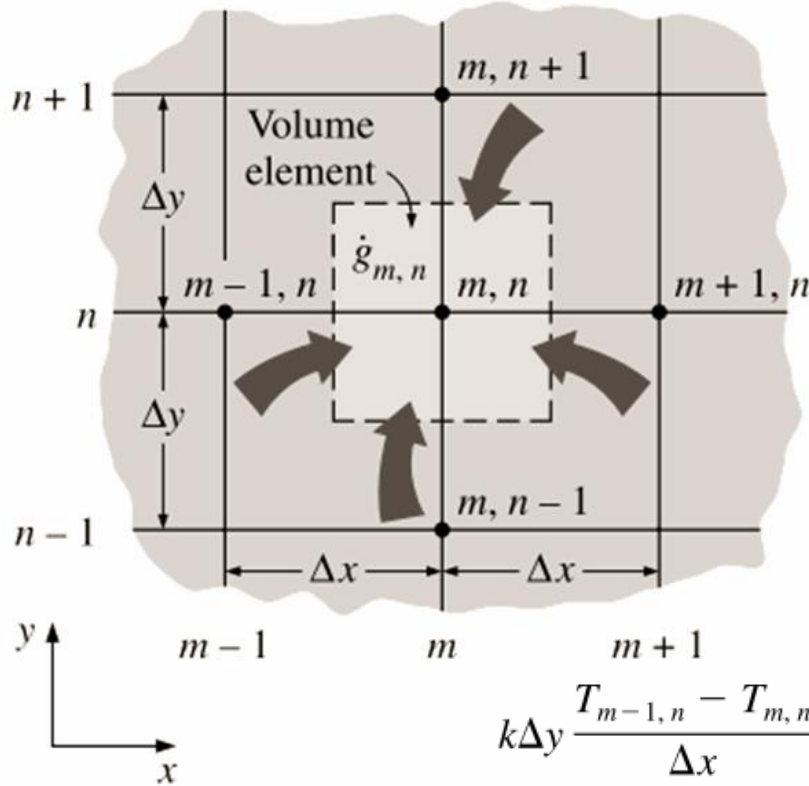
Kryterium stabilności

Stabilność obliczeń zostanie zachowana, jeśli współczynniki przy wszystkich formułach obliczających temperatury T_m^i oraz T_m^{i+1} będą większe lub równe zero.

$$1 - 2\tau - 2\tau \frac{h\Delta x}{k} \geq 0 \longrightarrow \tau \leq \frac{1}{2(1 + h\Delta x/k)}$$

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\alpha(1 + h\Delta x/k)}$$

Dwuwymiarowy, nieustalony przepływ ciepła.



Węzeł środkowy.

$$k\Delta y \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} + k\Delta x \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} + k\Delta y \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} + k\Delta x \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y} + \dot{g}_{m,n} \Delta x \Delta y = \rho \Delta x \Delta y C \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t}$$

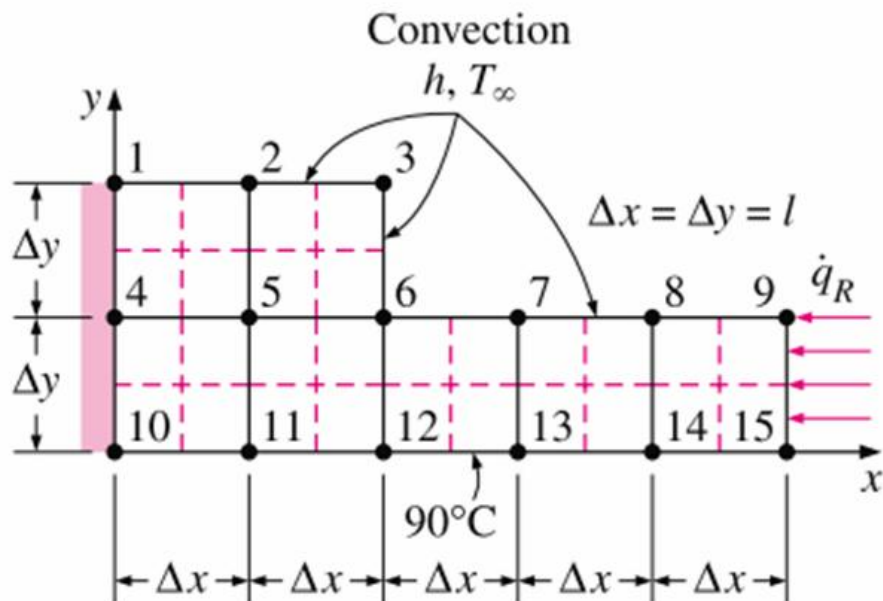
$$T_{m-1,n} + T_{m+1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} + \frac{\dot{g}_{m,n} l^2}{k} = \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\tau}$$

$$T_{\text{left}} + T_{\text{top}} + T_{\text{right}} + T_{\text{bottom}} - 4T_{\text{node}} + \frac{\dot{g}_{\text{node}} l^2}{k} = \frac{T_{\text{node}}^{i+1} - T_{\text{node}}^i}{\tau}$$

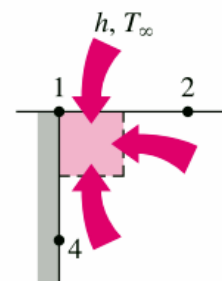
$$T_{\text{node}}^{i+1} = \tau(T_{\text{left}}^i + T_{\text{top}}^i + T_{\text{right}}^i + T_{\text{bottom}}^i) + (1 - 4\tau) T_{\text{node}}^i + \tau \frac{\dot{g}_{\text{node}}^i l^2}{k}$$

Kryterium stabilności:

$$\tau = \frac{\alpha \Delta t}{l^2} \leq \frac{1}{4}$$



$$\sum_{\text{All sides}} \dot{Q}^i + \dot{G}_{\text{element}}^i = \rho V_{\text{element}} C \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t}$$

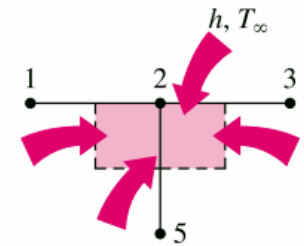
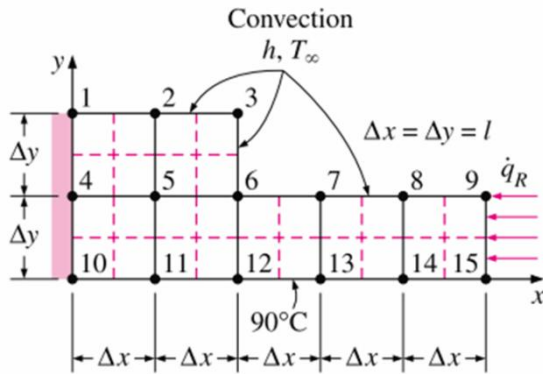


Węzeł nr 1.

$$h \frac{\Delta x}{2} (T_\infty - T_1^i) + k \frac{\Delta y}{2} \frac{T_2^i - T_1^i}{\Delta x} + k \frac{\Delta x}{2} \frac{T_4^i - T_1^i}{\Delta y} + \dot{g}_1 \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} = \rho \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} C \frac{T_1^{i+1} - T_1^i}{\Delta t}$$

$$T_1^{i+1} = \left(1 - 4\tau - 2\tau \frac{hl}{k} \right) T_1^i + 2\tau \left(T_2^i + T_4^i + \frac{hl}{k} T_\infty + \frac{\dot{g}_1 l^2}{2k} \right)$$

Węzeł nr 2.

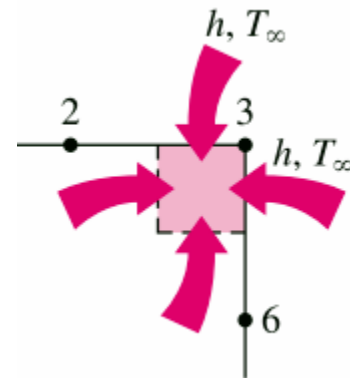


$$h\Delta x(T_\infty - T_2^i) + k \frac{\Delta y}{2} \frac{T_3^i - T_2^i}{\Delta x} + k\Delta x \frac{T_5^i - T_2^i}{\Delta y} + k \frac{\Delta y}{2} \frac{T_1^i - T_2^i}{\Delta x} + \dot{g}_2 \Delta x \frac{\Delta y}{2} = \rho \Delta x \frac{\Delta y}{2} C \frac{T_2^{i+1} - T_2^i}{\Delta t}$$

$$T_2^{i+1} = \left(1 - 4\tau - 2\tau \frac{hl}{k}\right) T_2^i + \tau \left(T_1^i + T_3^i + 2T_5^i + \frac{2hl}{k} T_\infty + \frac{\dot{g}_2 l^2}{k}\right)$$

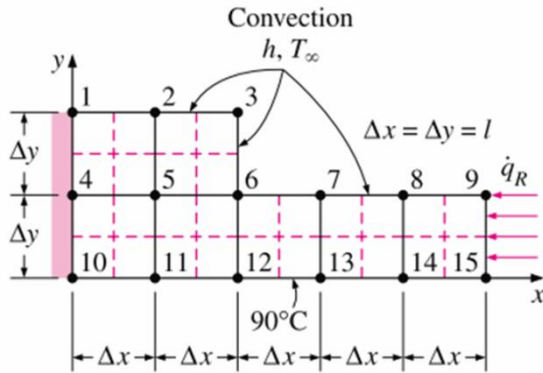
Węzeł nr 3.

$$h\left(\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta y}{2}\right)(T_\infty - T_3^i) + k \frac{\Delta x}{2} \frac{T_6^i - T_3^i}{\Delta y} + k \frac{\Delta y}{2} \frac{T_2^i - T_3^i}{\Delta x} + \dot{g}_3 \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} = \rho \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} C \frac{T_3^{i+1} - T_3^i}{\Delta t}$$



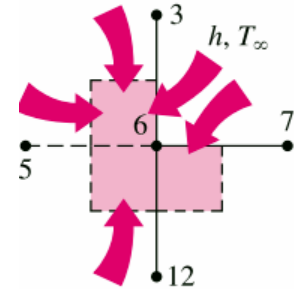
$$T_3^{i+1} = \left(1 - 4\tau - 4\tau \frac{hl}{k}\right) T_3^i + 2\tau \left(T_2^i + T_6^i + 2 \frac{hl}{k} T_\infty + \frac{\dot{g}_3 l^2}{2k}\right)$$

Węzeł nr 6.

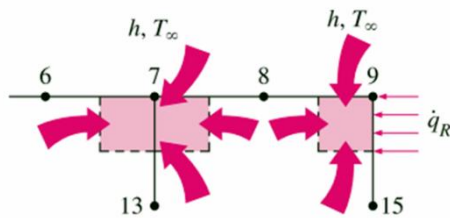


$$h\left(\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta y}{2}\right)(T_\infty - T_6^i) + k\frac{\Delta y}{2}\frac{T_7^i - T_6^i}{\Delta x} + k\Delta x\frac{T_{12}^i - T_6^i}{\Delta y} + k\Delta y\frac{T_5^i - T_6^i}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2}\frac{T_3^i - T_6^i}{\Delta y} + \dot{q}_6\frac{3\Delta x\Delta y}{4} = \rho\frac{3\Delta x\Delta y}{4}C\frac{T_6^{i+1} - T_6^i}{\Delta t}$$

$$T_6^{i+1} = \left(1 - 4\tau - 4\tau\frac{hl}{3k}\right)T_3^i + \frac{\tau}{3}\left[2T_3^i + 4T_5^i + 2T_7^i + 4 \times 90 + 4\frac{hl}{k}T_\infty + 3\frac{\dot{q}_6 l^2}{k}\right]$$



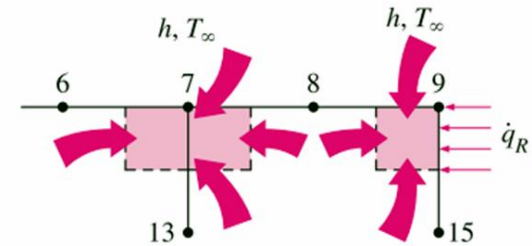
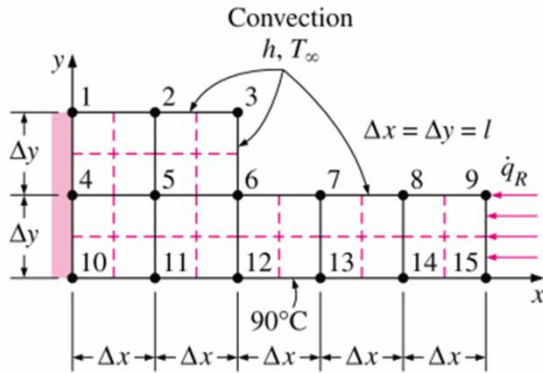
Węzeł nr 7.



$$h\Delta x(T_\infty - T_7^i) + k\frac{\Delta y}{2}\frac{T_8^i - T_7^i}{\Delta x} + k\Delta x\frac{T_{13}^i - T_7^i}{\Delta y} + k\frac{\Delta y}{2}\frac{T_6^i - T_7^i}{\Delta x} + \dot{q}_7\Delta x\frac{\Delta y}{2} = \rho\Delta x\frac{\Delta y}{2}C\frac{T_7^{i+1} - T_7^i}{\Delta t}$$

$$T_7^{i+1} = \left(1 - 4\tau - 2\tau\frac{hl}{k}\right)T_7^i + \tau\left[T_6^i + T_8^i + 2 \times 90 + \frac{2hl}{k}T_\infty + \frac{\dot{q}_7 l^2}{k}\right]$$

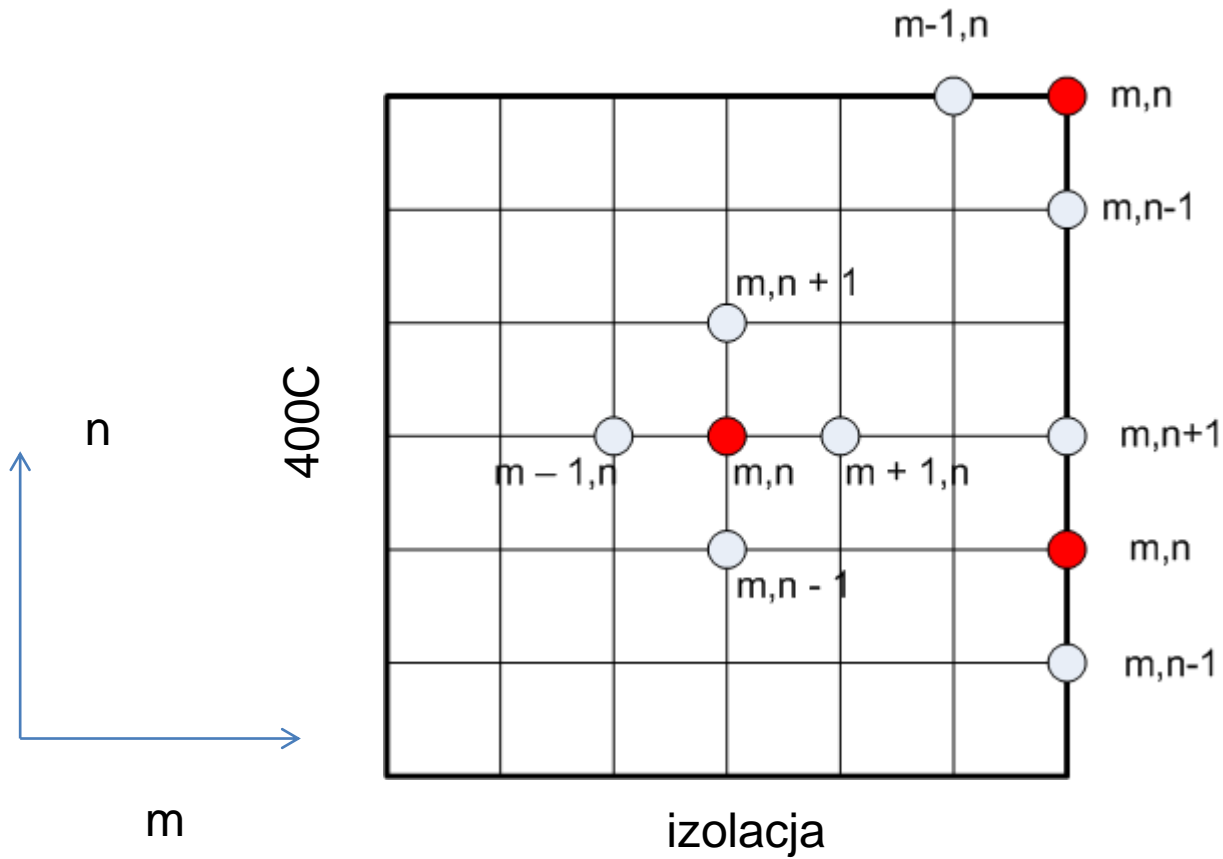
Węzeł nr 9



$$h \frac{\Delta x}{2} (T_\infty - T_9^i) + \dot{q}_R \frac{\Delta y}{2} k \frac{\Delta x}{2} \frac{T_{15}^i - T_9^i}{\Delta y} + \frac{k \Delta y}{2} \frac{T_8^i - T_9^i}{\Delta x} + \dot{g}_9 \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} = \rho \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} C \frac{T_9^{i+1} - T_9^i}{\Delta t}$$

$$T_9^{i+1} = \left(1 - 4\tau - 2\tau \frac{hl}{k} \right) T_9^i + 2\tau \left(T_8^i + 90 + \frac{\dot{q}_R l}{k} + \frac{hl}{k} T_\infty + \frac{\dot{g}_9 l^2}{2k} \right)$$

$$1 - 4\tau - 4\tau \frac{hl}{k} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \tau \leq \frac{1}{4(1 + hl/k)} \quad \rightarrow \quad \Delta t \leq \frac{l^2}{4\alpha(1 + hl/k)}$$



Węzeł powierzchniowy izolowany

$$T_{m,n}^{p+1} = \text{Fo} [2T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p] + [1 - 4(\text{Fo})]T_{m,n}^p \quad \text{Fo} \leq \frac{1}{4}$$

Węzeł powierzchniowy

$$T_{m,n}^{p+1} = \text{Fo} [2T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p + 2(\text{Bi})T_{\infty}^p] + [1 - 4(\text{Fo}) - 2(\text{Fo})(\text{Bi})]T_{m,n}^p \quad \text{Fo}(2 + \text{Bi}) \leq \frac{1}{2}$$

Węzeł powierzchniowy narożny

$$T_{m,n}^{p+1} = 2(\text{Fo}) [T_{m-1,n}^p + T_{m,n-1}^p + 2(\text{Bi})T_{\infty}^p] + [1 - 4(\text{Fo}) - 4(\text{Fo})(\text{Bi})]T_{m,n}^p \quad \text{Fo}(1 + \text{Bi}) \leq \frac{1}{4}$$

Węzeł środkowy

$$T_{m,n}^{p+1} = \text{Fo} (T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m+1,n}^p + T_{m,n-1}^p) + [1 - 4(\text{Fo})] T_{m,n}^p \quad \text{Fo} \leq \frac{1}{4}$$

MODELING OF CHAMBER RESISTANCE PLANTS

$$\frac{d\vartheta(t, x)}{dt} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 \vartheta(t, x)}{\partial x^2}$$

$$G(s) = \frac{\vartheta(s)}{P(s)} = \frac{K}{1 + sN} e^{-sL}$$

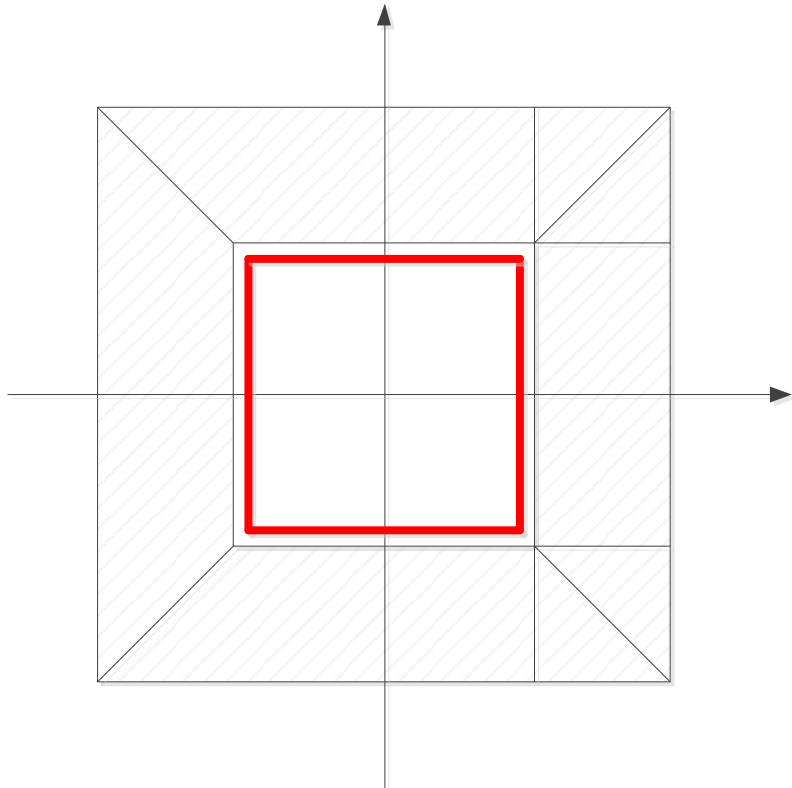
P

$\vartheta(t, x)$

ϑ_0

$?$

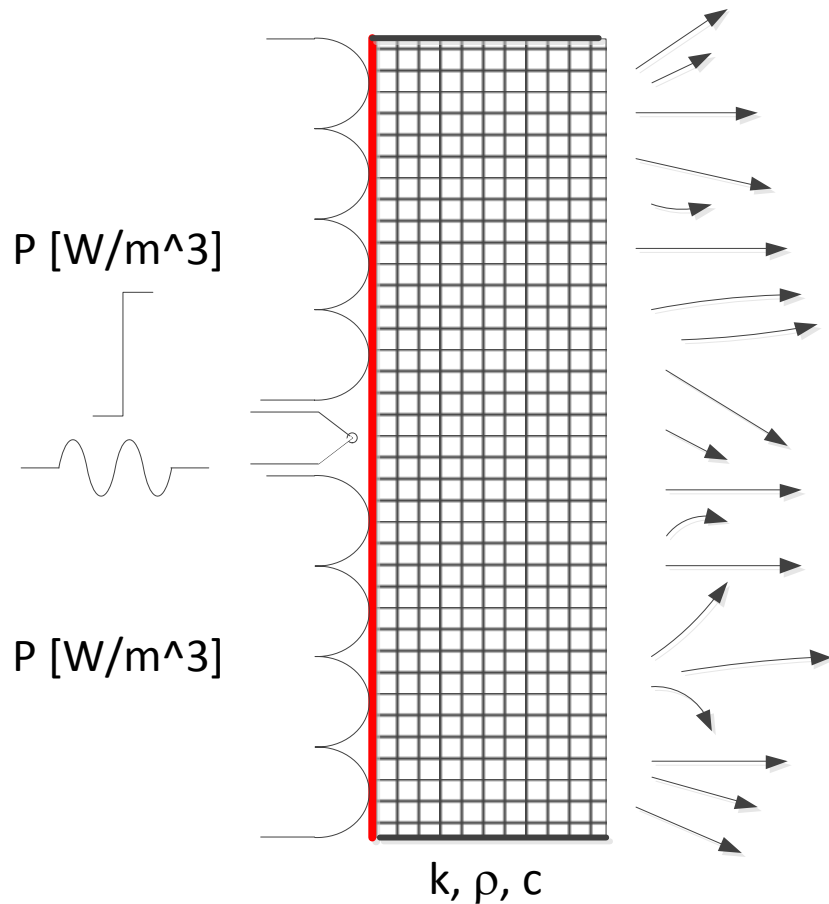
Model pieca komorowego



Określić symetrię układu
Określić warunki brzegowe związane z wybraną symetrią układu.

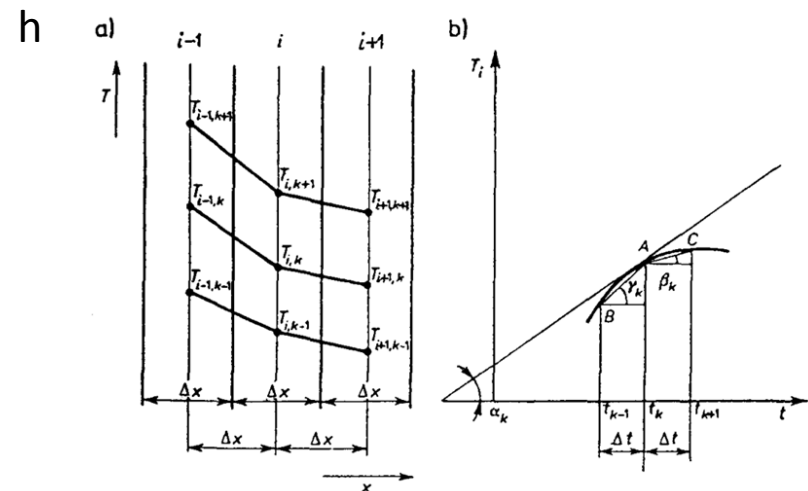
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

Własności pieca komorowego można odwzorować za pomocą analizy rozptyłu ciepła w płaskiej ścianie.



k - ?
 ρ - ?
 c - ?
 h - ?

Konwekcja

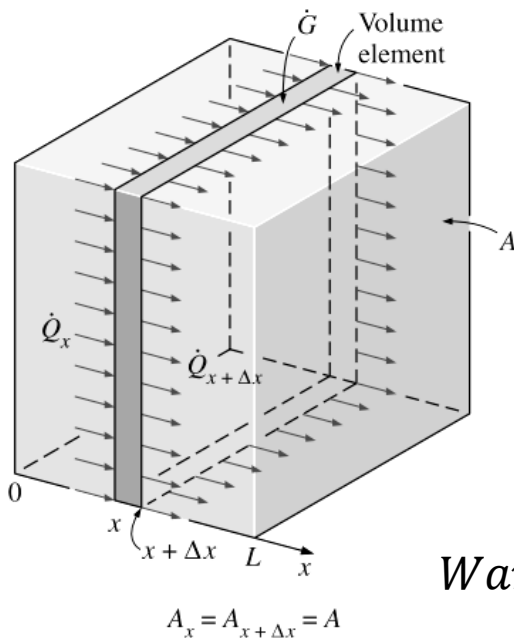


Nazwa cegły	Skład chemiczny w %	Temperatura		Gęstość	Współczynnik przewodzenia ciepła	
		t	T		λ	
		°C	°K	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\frac{\text{kcal}}{\text{h m deg}}$	$\frac{\text{W}}{\text{m deg}}$
Szamot	50...75 SiO ₂ 20...50 Al ₂ O ₃	0	273,15	800	0,18	0,209
		200	473,15		0,21	0,244
		400	673,15		0,24	0,279
		600	873,15		0,27	0,314
		800	1073,15		0,30	0,349
		1000	1273,15		0,33	0,384
		1200	1473,15		0,36	0,419
		0	273,15	1000	0,25	0,291
		200	473,15		0,28	0,326
		400	673,15		0,31	0,361
		600	873,15		0,35	0,407
		800	1073,15		0,38	0,442
		1000	1273,15		0,42	0,488
		1200	1473,15		0,45	0,523
		0	273,15	1200	0,33	0,384
		200	473,15		0,35	0,407
		400	673,15		0,38	0,442
		600	873,15		0,41	0,477
		800	1073,15		0,45	0,523
		1000	1273,15		0,48	0,558
		1200	1473,15		0,52	0,605
		0	273,15	2000	0,92	1,070
		200	473,15		0,97	1,128
		400	673,15		1,03	1,198
		600	873,15		1,08	1,256
		800	1073,15		1,15	1,337
		1000	1273,15		1,21	1,401
		1200	1473,15		1,28	1,489
		0	273,15	2200	1,34	1,558
		200	473,15		1,42	1,651
		400	673,15		1,50	1,745
		600	873,15		1,58	1,838
		800	1073,15		1,67	1,942
		1000	1273,15		1,76	2,047
		1200	1473,15		1,85	2,152

Szamot	Temperatura		Średnie ciepło właściwe c	
	t	T	$\frac{\text{kcal}}{\text{kg deg}}$	$\frac{\text{kJ}}{\text{kg deg}}$
	°C	°K		
	20	293,15	0,20	0,837
	500	773,15	0,27	1,130
	1000	1273,15	0,27	1,130

1 kcal/h — 1,163 W

Analiza przepływu ciepła w ośrodkach o różnych geometriach



(Wartość przepływu ciepła w x)

-

(Wartość przepływu ciepła w $x + \Delta x$)

+

(Wartość ciepła wytworzonego w x)

=

Wartość zmiany energii w elemencie x

\dot{Q}_x

$\dot{Q}_{x+\Delta x}$

\dot{G}

$\frac{\Delta E_{elementu}}{\Delta t}$

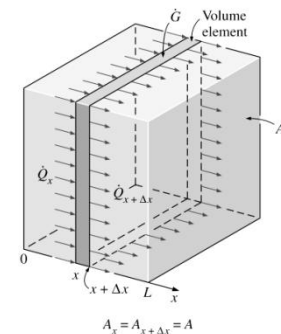
$$\Delta E_{element} = E_{t+\Delta t} - E_t = mC(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho CA\Delta x(T_{t+\Delta t} - T_t)$$

$$\dot{G}_{element} = \dot{g}V_{element} = \dot{g}A\Delta x$$

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x} + \dot{g}A\Delta x = \rho CA\Delta x \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

$A\Delta x$

$$-\frac{1}{A} \frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} + \dot{g} = \rho C \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$



$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \Delta t \rightarrow 0$$

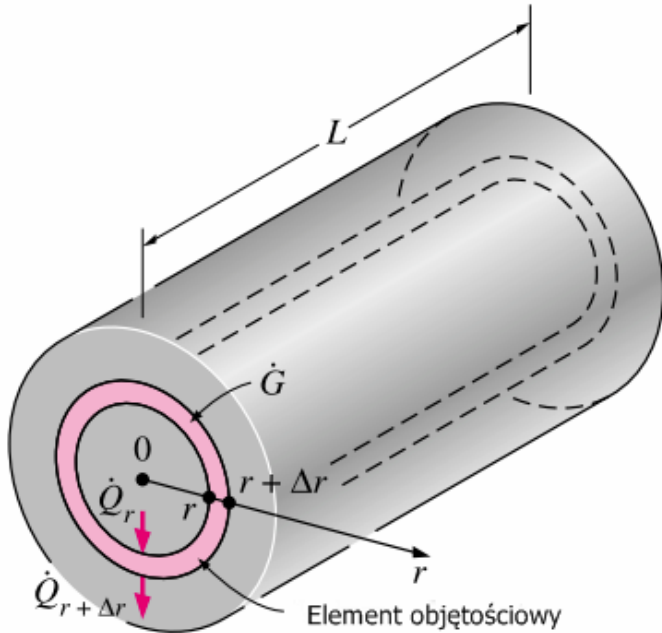
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-kA \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

Z definicji prawa Fouriera dla przewodzenia ciepła.

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Powierzchnia cylindra $A=2\pi rL$



(Wartość przepływu ciepła w r)

\dot{Q}_r

-

(Wartość przepływu ciepła w $r + \Delta r$)

$\dot{Q}_{r+\Delta r}$

+

(Wartość ciepła wytworzonego w r)

\dot{G}

=

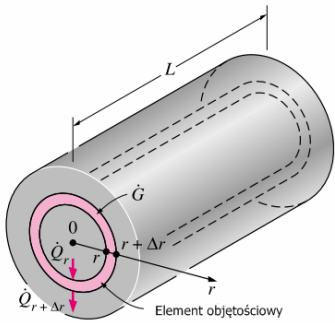
Wartość zmiany energii w elemencie r

$\frac{\Delta E_{\text{elementu}}}{\Delta t}$

$$\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} + \dot{G}_{\text{element}} = \frac{\Delta E_{\text{element}}}{\Delta t}$$

$$\Delta E_{\text{element}} = E_{t+\Delta t} - E_t = mC(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho CA\Delta r(T_{t+\Delta t} - T_t)$$

$$\dot{G}_{\text{element}} = \dot{g}V_{\text{element}} = \dot{g}A\Delta r$$



$$\dot{Q}_r - \dot{Q}_{r+\Delta r} + \dot{g}A\Delta r = \rho CA\Delta r \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

AΔr

$$-\frac{1}{A} \frac{\dot{Q}_{r+\Delta r} - \dot{Q}_r}{\Delta r} + \dot{g} = \rho C \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial r} \left(kA \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

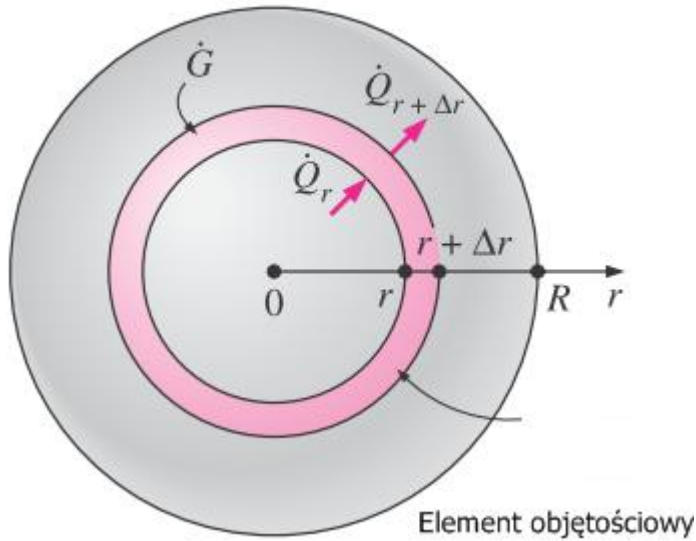
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{g}}{k} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

Powierzchnia sfery $A=4\pi r^2$



$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{g}}{k} = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad \text{lub}$$

$$r \frac{d^2 T}{dr^2} + 2 \frac{dT}{dr} = 0$$

$n=0$ dla płaskiej ściany

$n=1$ dla cylindra

$n=2$ dla sfery

Złożona jednowymiarowa wymiana ciepła

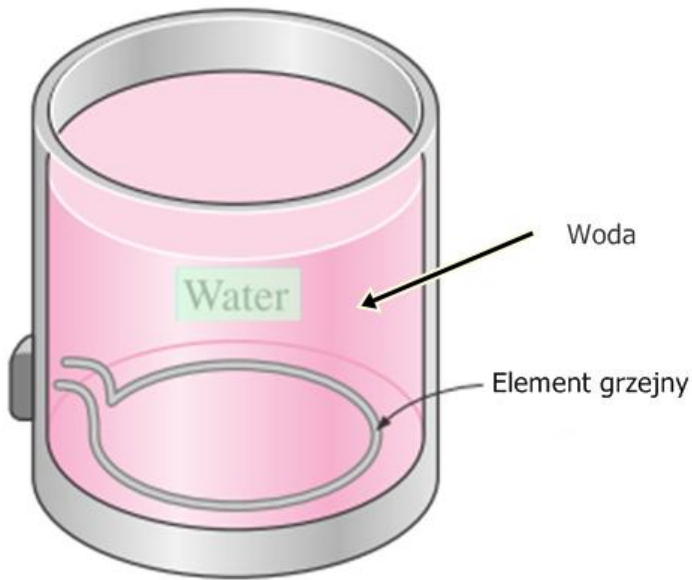


$L=0,4\text{cm}$ – grubość denka patelni
 $D=18\text{ cm}$ – średnica patelni

Ułożyć równania opisujące przewodzenie ciepła oraz obliczyć rozkład temperatury wzdłuż grubości denka. Zakładamy stan cieplnie ustalony. Patelnia stoi na grzejniku elektrycznym o mocy 800W.

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

Przewodzenie ciepła w elemencie grzejnym.



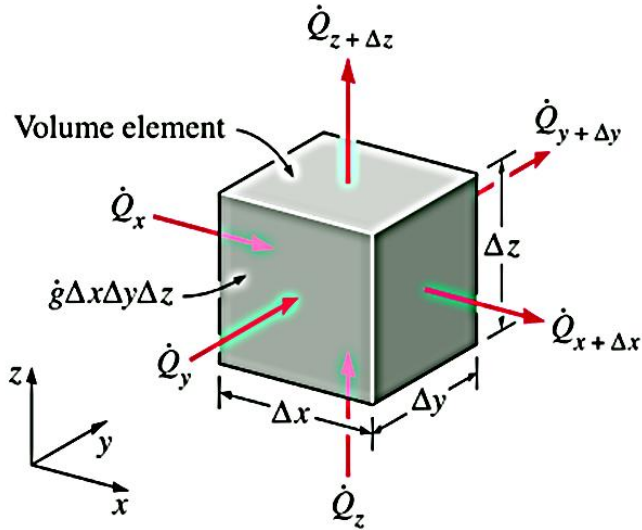
Moc grzałki 2kW. Przewodność cieplna $k=15 \text{ W/m}^2\text{K}$. Średnica $D=0,4\text{cm}$, długość $L=50\text{cm}$. Zakładamy stałą wartość k .

Grzałka traktowana jako bardzo długi cylinder (długość $L \gg$ średnicy D).
To oznacza, że można założyć równomierny rozkład temperatury wzdłuż średnicy grzałki.

$$\dot{g} = \frac{\dot{G}}{V_{\text{wire}}} = \frac{\dot{G}}{(\pi D^2/4)L} = \frac{2000 \text{ W}}{[\pi(0.004 \text{ m})^2/4](0.5 \text{ cm})} = 0.318 \times 10^9 \text{ W/m}^3$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{g}}{k} = 0$$

Ogólne równanie przewodzenia ciepła



(Wartość przepływu ciepła w x, y, z)

-

(Wartość przepływu ciepła w $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$)

+

(Wartość ciepła wytworzonego w x, y, z)

=

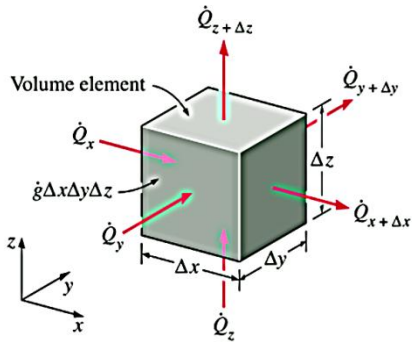
Wartość zmiany energii w elemencie x, y, z

$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_{z+\Delta z} + \dot{G}_{\text{element}} = \frac{\Delta E_{\text{element}}}{\Delta t}$$

$$\Delta E_{\text{element}} = E_{t+\Delta t} - E_t = mC(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho C \Delta x \Delta y \Delta z (T_{t+\Delta t} - T_t)$$

$$\dot{G}_{\text{element}} = \dot{g} V_{\text{element}} = \dot{g} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Ogólne równanie przewodzenia ciepła



$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_{z+\Delta z} + g\Delta x\Delta y\Delta z = \rho C\Delta x\Delta y\Delta z \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

$$-\frac{1}{\Delta y\Delta z} \frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta x\Delta z} \frac{\dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_y}{\Delta y} - \frac{1}{\Delta x\Delta y} \frac{\dot{Q}_{z+\Delta z} - \dot{Q}_z}{\Delta z} + g = \rho C \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y\Delta z} \frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta y\Delta z} \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} = \frac{1}{\Delta y\Delta z} \frac{\partial}{\partial x} \left(-k\Delta y\Delta z \frac{\partial T}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x\Delta z} \frac{\dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_y}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta x\Delta z} \frac{\partial \dot{Q}_y}{\partial y} = \frac{1}{\Delta x\Delta z} \frac{\partial}{\partial y} \left(-k\Delta x\Delta z \frac{\partial T}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x\Delta y} \frac{\dot{Q}_{z+\Delta z} - \dot{Q}_z}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta x\Delta y} \frac{\partial \dot{Q}_z}{\partial z} = \frac{1}{\Delta x\Delta y} \frac{\partial}{\partial z} \left(-k\Delta x\Delta y \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

Ogólne równanie przewodzenia ciepła

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0$$

Stan ustalony – równanie Poissona

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Stan nieustalony – równanie dyfuzji

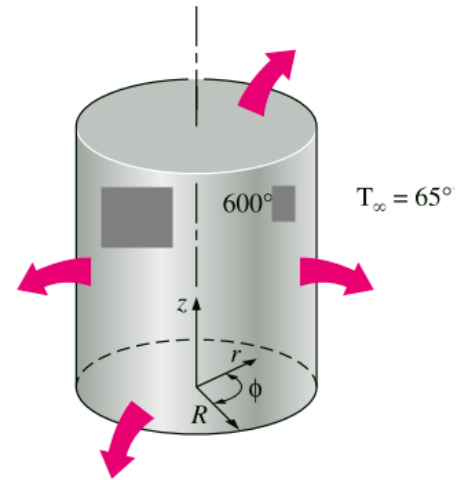
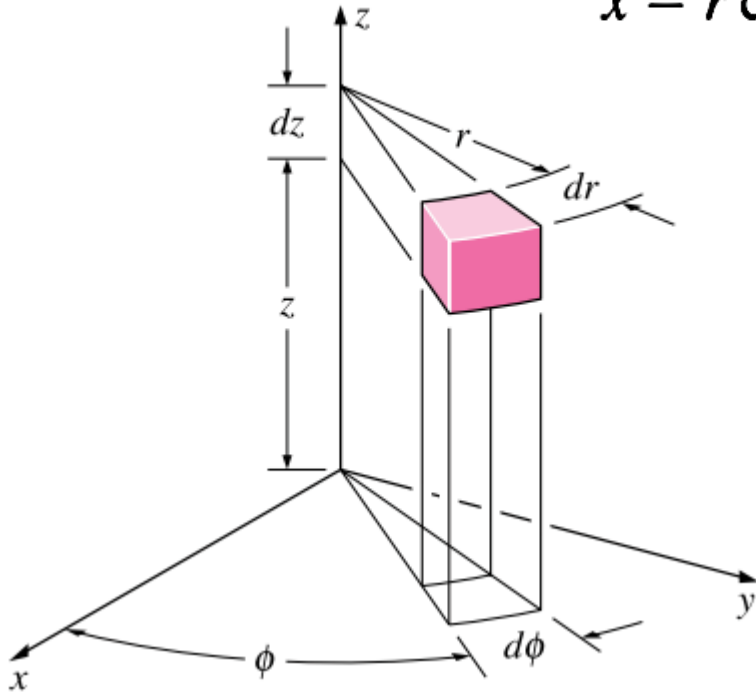
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Stan ustalony – równanie Laplace'a

Ogólne równanie przewodzenia ciepła

Współrzędne cylindryczne

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad \text{and} \quad z = z$$

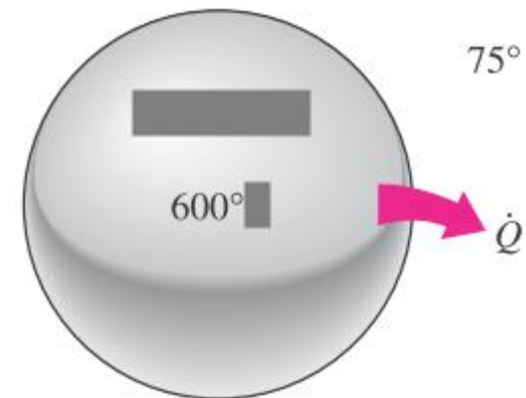
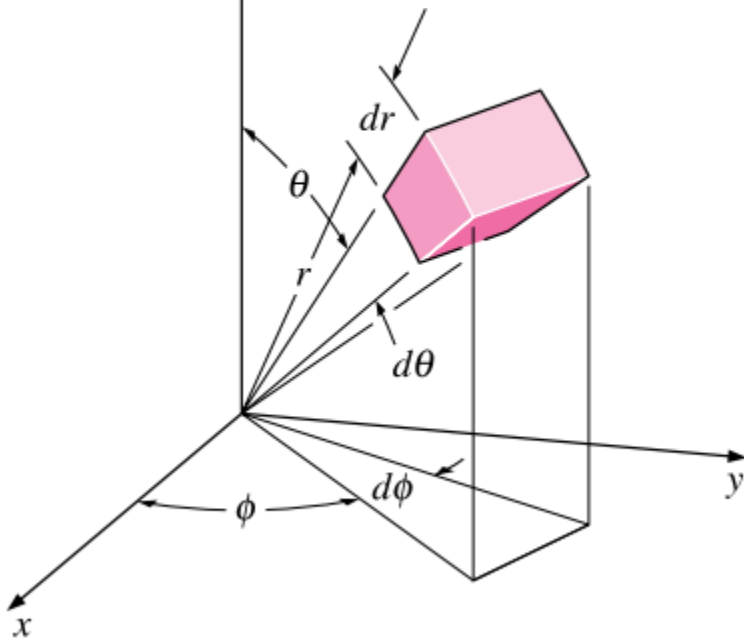


$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(kr \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Ogólne równanie przewodzenia ciepła

Współrzędne sferyczne

$$x = r \cos \phi \sin \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad \text{and} \quad z = r \cos \theta$$



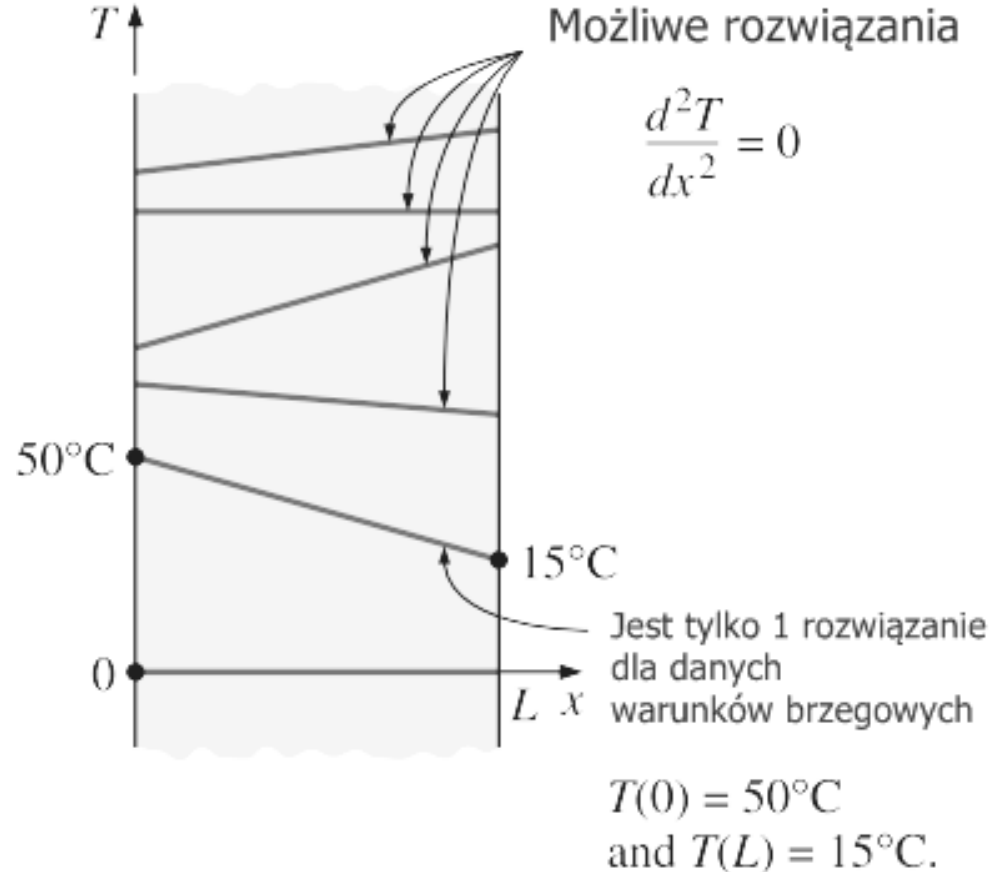
$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Warunki brzegowe

Rozważmy równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \longrightarrow T(x) = C_1x + C_2 \longrightarrow \begin{array}{l} T(x) = 2x + 5 \\ T(x) = -x + 12 \\ T(x) = -3 \\ T(x) = 6.2x \end{array}$$

Ponieważ równanie różniczkowe nie zawiera w sobie informacji o dodatkowych warunkach rozwiązania należy je podać oddzielnie w postaci **warunków brzegowych i początkowych**.

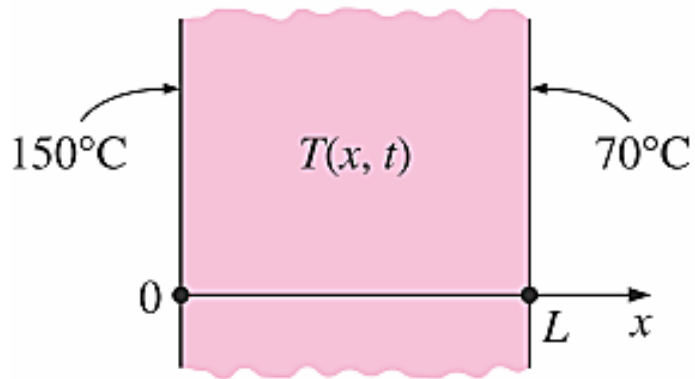


Matematyczne warunki brzegowe wynikają z warunków fizycznych panujących w czasie obliczania rozkładu ciepła wewnątrz układu.

Przykładowo, rozkład temperatury w analizowanej ścianie zależy od zmieniających się w czasie warunków atmosferycznych, np. prędkości wiatru, siły i czasu nasłonecznienia ściany. Uogólniając je można podać w postaci dwóch wartości temperatur na powierzchniach ściany.

Aby rozwiązać równanie różniczkowe liczba warunków brzegowych musi być równa rzędowi równania różniczkowego opisującego zjawisko fizyczne.

Warunek brzegowy I rodzaju (określona wartość temperatury)



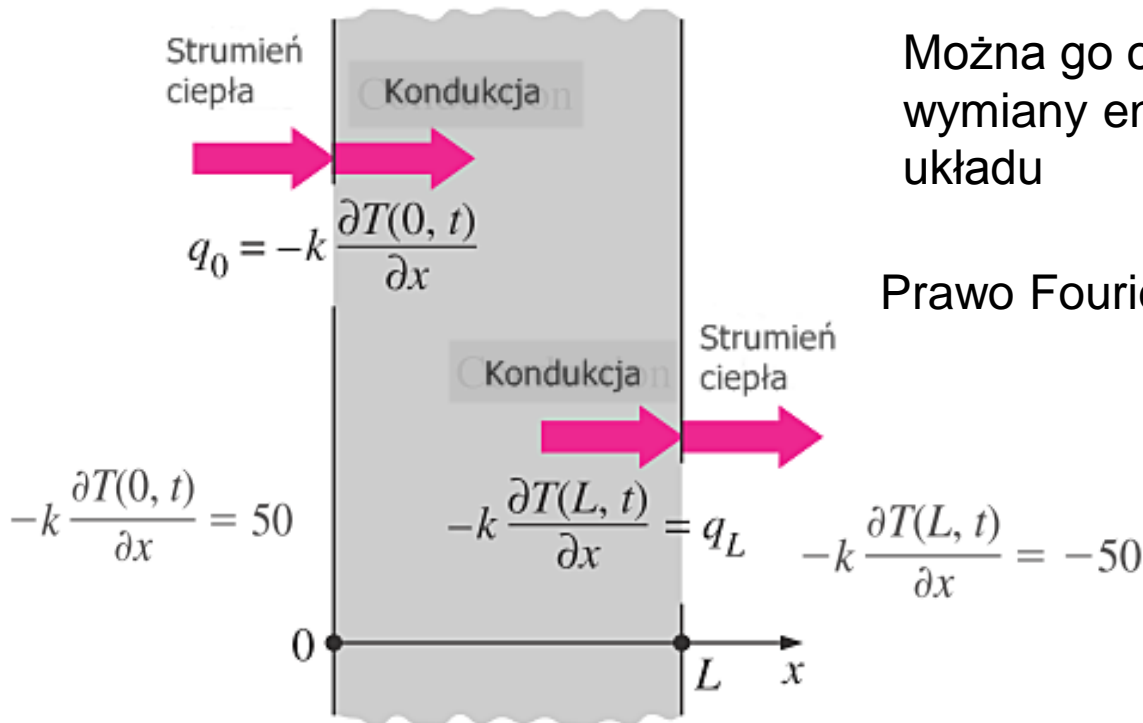
$$T(0, t) = 150^{\circ}\text{C}$$

$$T(L, t) = 70^{\circ}\text{C}$$

$$T(0, t) = T_1$$

$$T(L, t) = T_2$$

Warunek brzegowy określający strumień ciepła



Można go określić w przypadku znajomości wymiany energetycznej na powierzchni układu

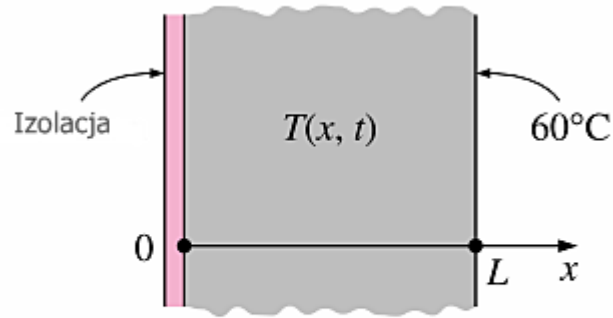
Prawo Fouriera

$$\dot{q} = -k \frac{\partial T}{\partial x} :$$

Warunki specjalne

$$k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0$$

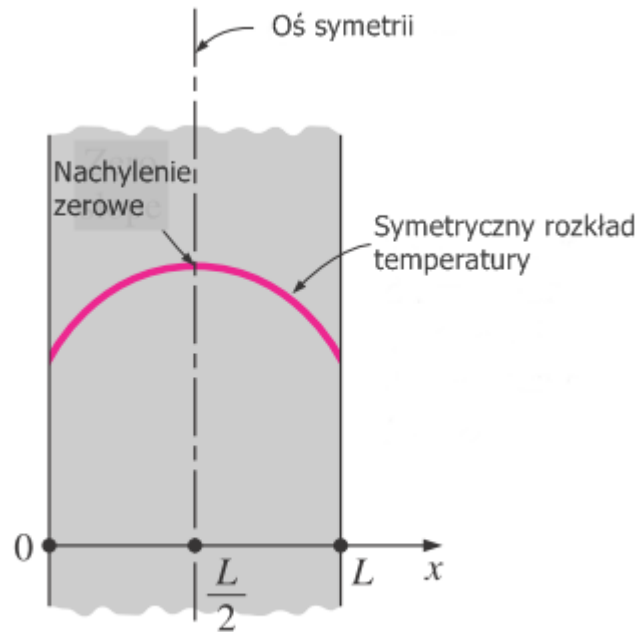
$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0$$



$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0$$

$$T(L, t) = 60^{\circ}\text{C}$$

$$\frac{\partial T(L/2, t)}{\partial x} = 0$$



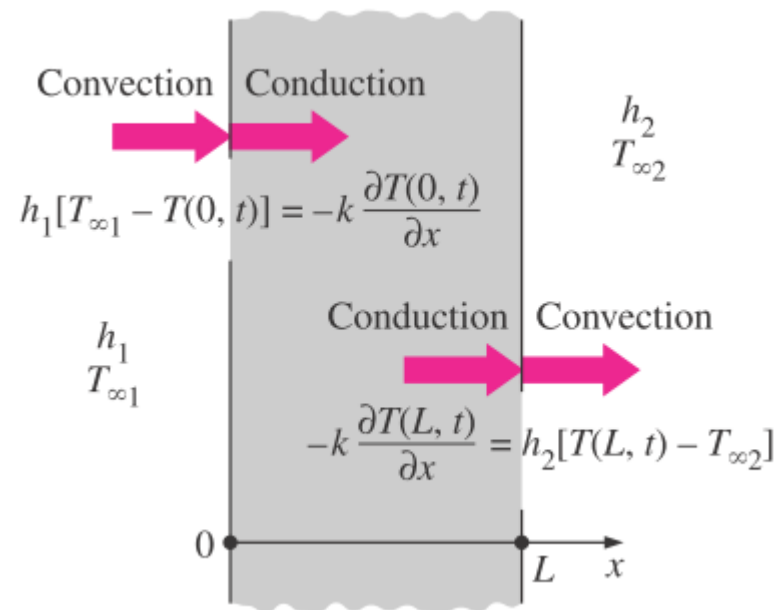
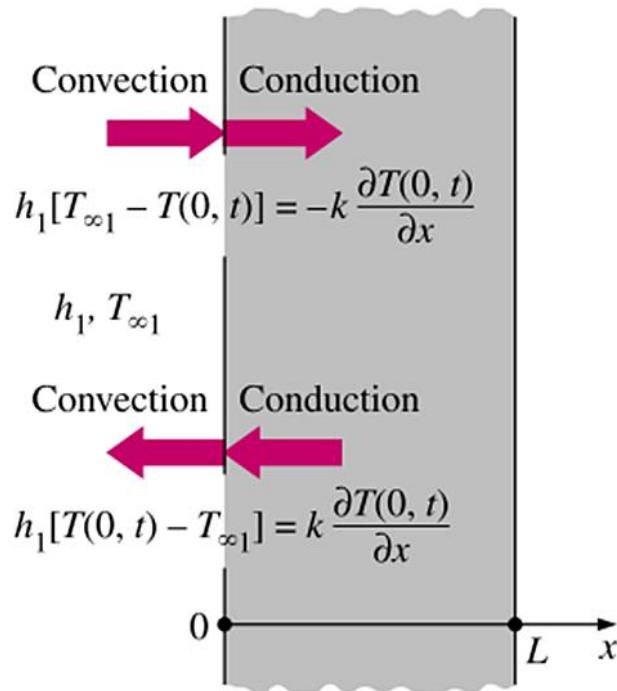
$$\frac{\partial T(L/2, t)}{\partial x} = 0$$

Konwekcja

$$\left(\begin{array}{c} \text{Przewodzenie} \\ \text{ciepła na powierzchni} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Unoszenie} \\ \text{ciepła z powierzchni} \end{array} \right)$$

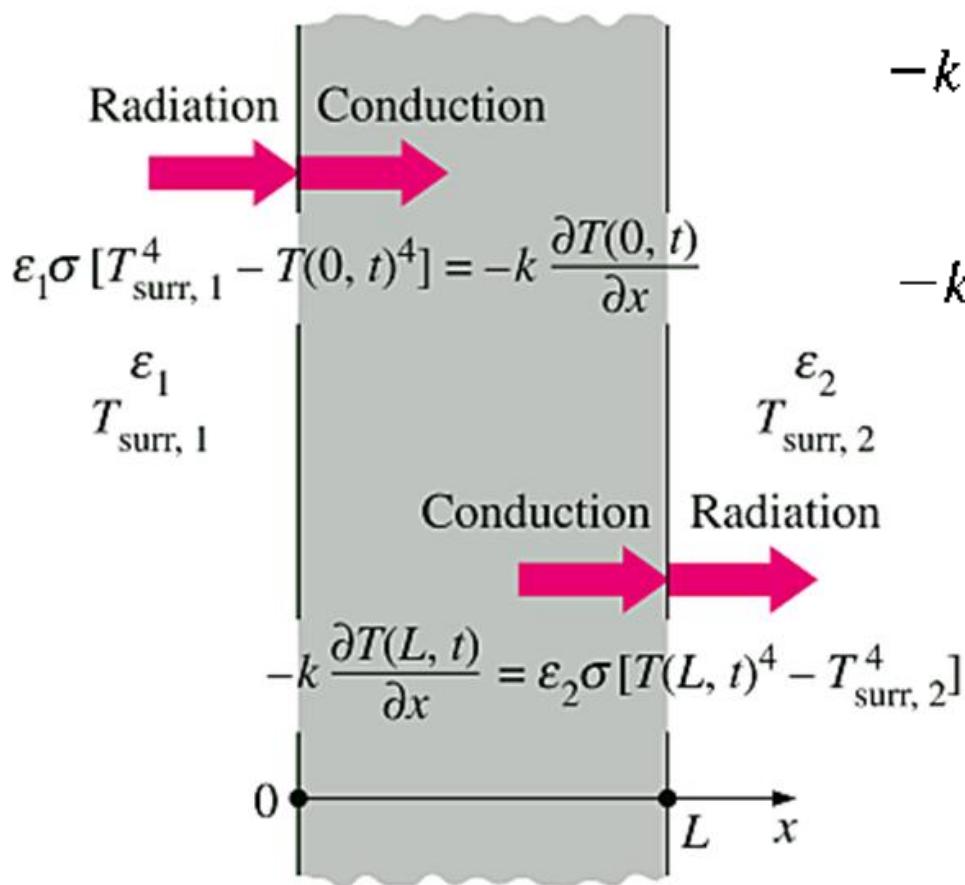
$$-k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = h_1 [T_{\infty 1} - T(0, t)]$$

$$-k \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = h_2 [T(L, t) - T_{\infty 2}]$$



Radiacja

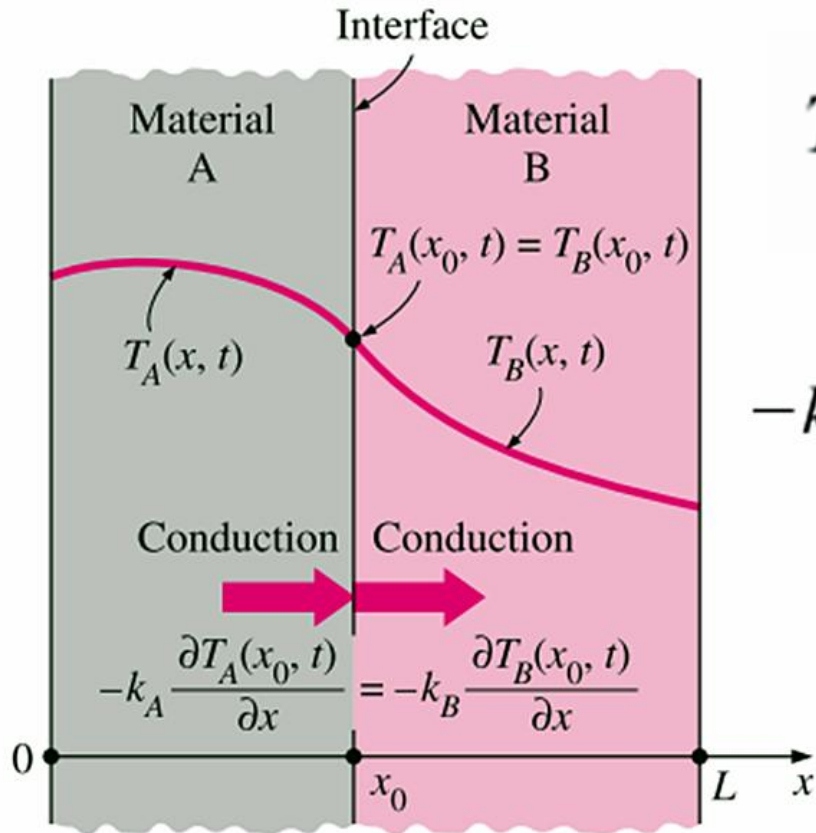
$$\left(\begin{array}{c} \text{Przewodzenie} \\ \text{ciepła na powierzchni} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Radiacyjna wymiana} \\ \text{ciepła z powierzchni} \end{array} \right)$$



$$-k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \varepsilon_1 \sigma [T_{\text{surr}, 1}^4 - T(0, t)^4]$$

$$-k \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = \varepsilon_2 \sigma [T(L, t)^4 - T_{\text{surr}, 2}^4]$$

Styk dwóch powierzchni



$$T_A(x_0, t) = T_B(x_0, t)$$

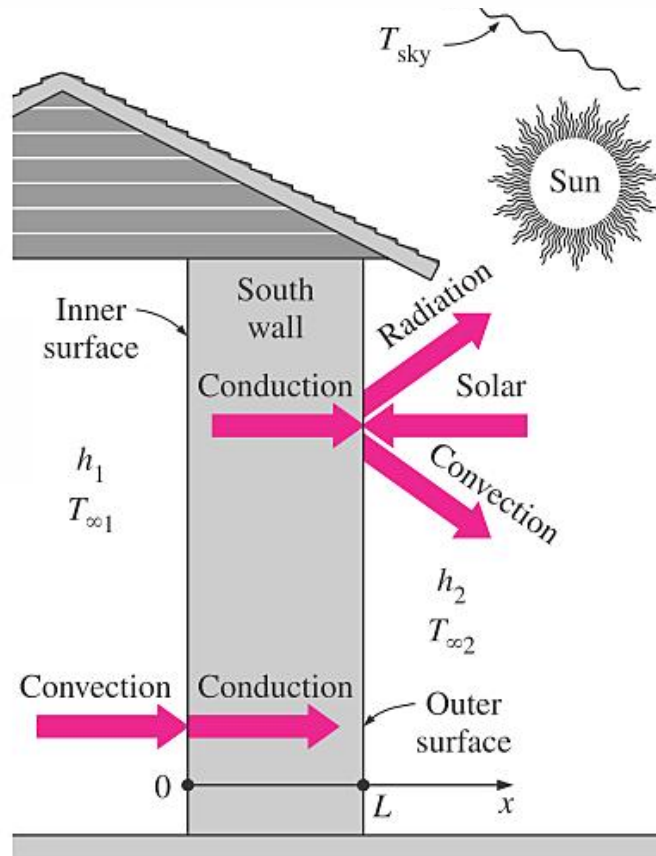
$$-k_A \frac{\partial T_A(x_0, t)}{\partial x} = -k_B \frac{\partial T_B(x_0, t)}{\partial x}$$

Połączone warunki brzegowe.

$$\left(\begin{array}{c} \text{Przepływ ciepła do ściany} \\ \text{poprzez konw, radiację} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Przepływ ciepła od ściany} \\ \text{poprzez konw, radiację} \end{array} \right)$$

$$-k \frac{dT(L)}{dx} = h_2[T(L) - T_{\infty 2}] + \varepsilon_2 \sigma [T(L)^4 - T_{\text{sky}}^4] - \alpha \dot{q}_{\text{solar}}$$

$$-k \frac{dT(0)}{dx} = h_1[T_{\infty 1} - T(0)]$$



α - absorpcyjność energii słonecznej

σ - stała promieniowania

Przykład:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

$$\frac{dT}{dx} = C_1$$

$$T(x) = C_1x + C_2$$

Dla $x=0$

$$T_1 = C_1 \times 0 + C_2 \longrightarrow C_2 = T_1$$

Dla $x=L$

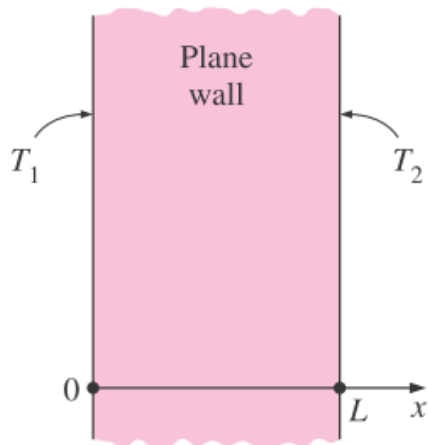
$$T_2 = C_1L + C_2 \longrightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$$

Warunki brzegowe

$$T_1 = 120^\circ\text{C}$$

$$T_2 = 50^\circ\text{C}$$



Przykład liczbowy:

Grubość ściany: $L=0,2\text{m}$

Współczynnik konwekcji: $k = 1,2 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$

Powierzchnia ściany: $A=15\text{m}^2$

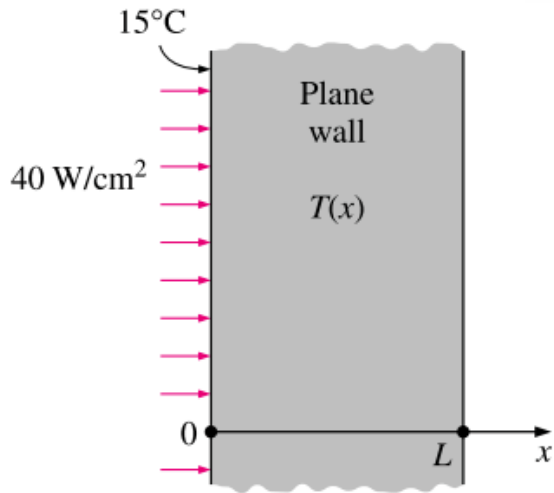
Temperatura w połowie grubości ściany:

$$T(0.1 \text{ m}) = \frac{(50 - 120)^\circ\text{C}}{0.2 \text{ m}} (0.1 \text{ m}) + 120^\circ\text{C} = \mathbf{85^\circ\text{C}}$$

Korzystając z prawa Fouriera można wyznaczyć wartość mocy, która przenika przez ścianę:

$$\dot{Q}_{\text{wall}} = -kA \frac{dT}{dx} = -kAC_1 = -kA \frac{T_2 - T_1}{L} = kA \frac{T_1 - T_2}{L}$$

$$\dot{Q} = kA \frac{T_1 - T_2}{L} = (1.2 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C})(15 \text{ m}^2) \frac{(120 - 50)^\circ\text{C}}{0.2 \text{ m}} = \mathbf{6300 \text{ W}}$$



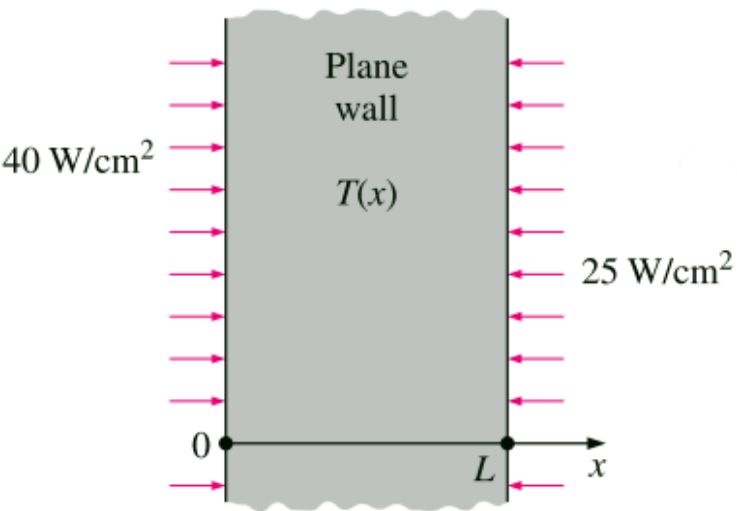
$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad T(x) = C_1x + C_2$$

$$\frac{dT}{dx} = C_1 \quad -k \frac{dT(0)}{dx} = \dot{q}_0 \quad -kC_1 = \dot{q}_0 \quad C_1 = -\frac{\dot{q}_0}{k}$$

$$T(0) = T_0 \quad T_0 = C_1 \times 0 + C_2 \quad C_2 = T_0$$

$$T(x) = -\frac{\dot{q}_0}{k}x + T_0$$

Dwa warunki brzegowe zostały zdefiniowane w tym samym miejscu. Nie ma zatem potrzeby definiowania ich w różnych miejscach.



$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad T(x) = C_1x + C_2$$

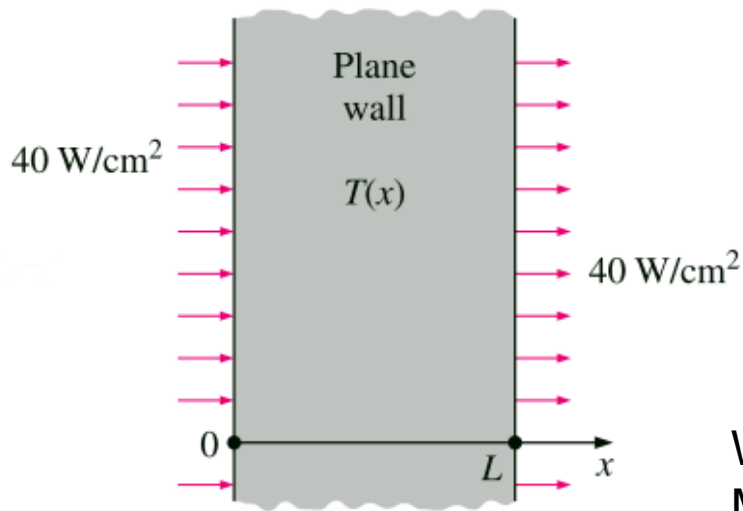
Dla $\dot{q}_0 \neq \dot{q}_L$ nie ma rozwiązania równania Laplace'a.

Jest to wytłumaczalne, gdyż jeżeli w tym samym czasie dwa strumienie ciepłe docierają do dwóch boków ściany, nie jest możliwe zapewnienie stanu cieplnie ustalonego.

$$\frac{dT}{dx} = C_1$$

$$-k \frac{dT(0)}{dx} = \dot{q}_0 \rightarrow -kC_1 = \dot{q}_0 \rightarrow C_1 = -\frac{\dot{q}_0}{k}$$

$$-k \frac{dT(L)}{dx} = \dot{q}_L \rightarrow -kC_1 = \dot{q}_L \rightarrow C_1 = -\frac{\dot{q}_L}{k}$$



$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad T(x) = C_1x + C_2$$

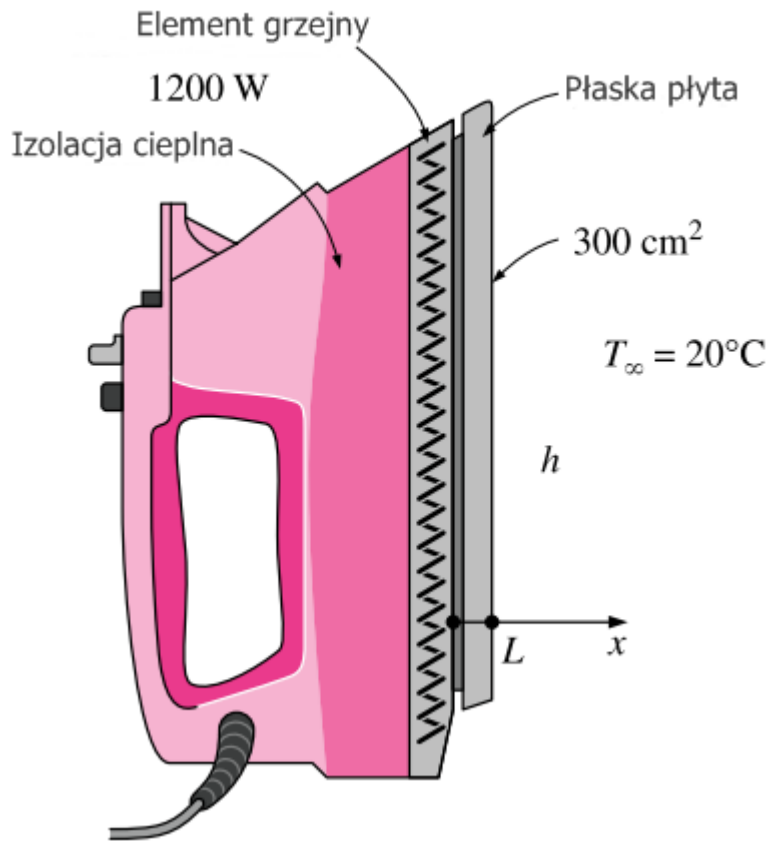
$$T(x) = -\frac{\dot{q}_0}{k}x + C_2$$

W tym przypadku C_2 musi być przyjęte arbitralnie. Matematycznie rozwiązanie przedstawia rodzinę równoległych linii prostych o nachyleniu $-\dot{q}_0/k$.

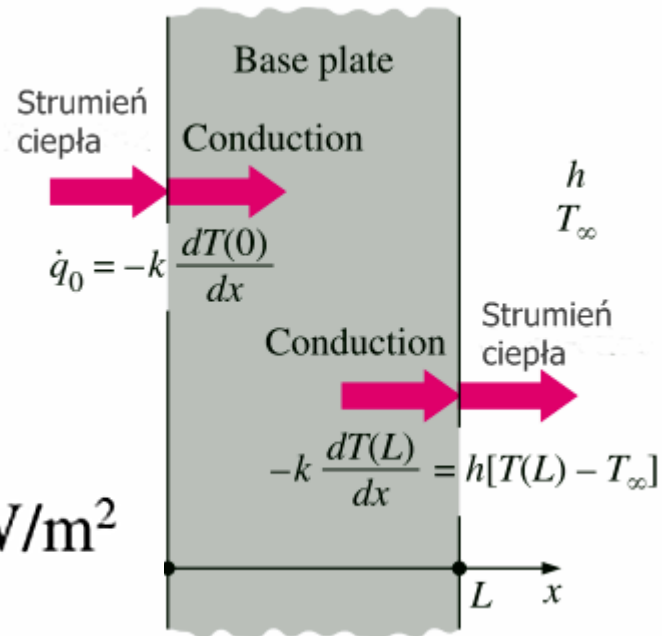
$$\frac{dT}{dx} = C_1$$

$$-k \frac{dT(0)}{dx} = \dot{q}_0 \rightarrow -kC_1 = \dot{q}_0 \rightarrow C_1 = -\frac{\dot{q}_0}{k}$$

$$-k \frac{dT(L)}{dx} = \dot{q}_0 \rightarrow -kC_1 = \dot{q}_0 \rightarrow C_1 = -\frac{\dot{q}_0}{k}$$



Moc elementu grzejnego $P=1200\text{W}$
 Grubość płyty $L=0,5\text{ cm}$
 Powierzchnia płyty $A=300\text{ cm}^2$
 Konduktywność płyty $k=15\text{ W/mK}$
 Współczynnik konwekcji $h=80\text{ W/m}^2\text{K}$
 Temperatura otoczenia $T_\infty=20^\circ\text{C}$



$$\dot{q}_0 = \frac{\dot{Q}_0}{A_{\text{base}}} = \frac{1200\text{ W}}{0.03\text{ m}^2} = 40,000\text{ W/m}^2$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

$$-k \frac{dT(0)}{dx} = \dot{q}_0 = 40,000 \text{ W/m}^2$$

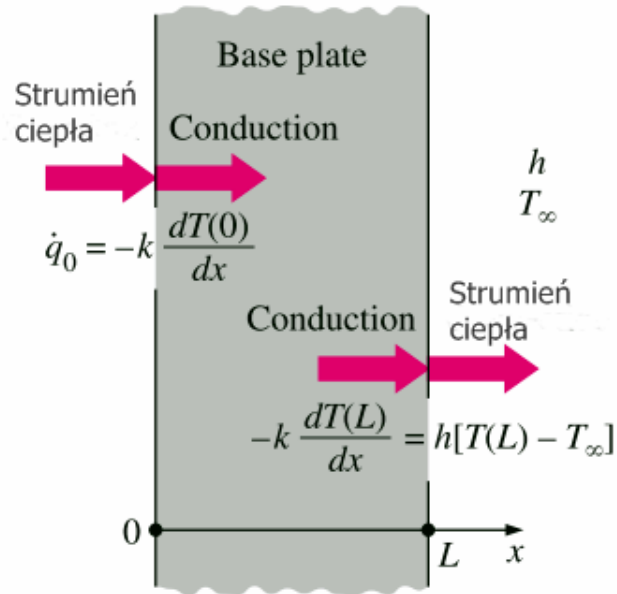
$$-k \frac{dT(L)}{dx} = h[T(L) - T_\infty]$$

$$\frac{dT}{dx} = C_1 \quad T(x) = C_1x + C_2$$

$$-k \frac{dT(0)}{dx} = \dot{q}_0 \rightarrow -kC_1 = \dot{q}_0 \rightarrow C_1 = -\frac{\dot{q}_0}{k}$$

Uwzględniając, że: $dT/dx=C_1$ oraz $T(L)=C_1L+C_2$

$$-k \frac{dT(L)}{dx} = h[T(L) - T_\infty] \rightarrow -kC_1 = h[(C_1L + C_2) - T_\infty]$$



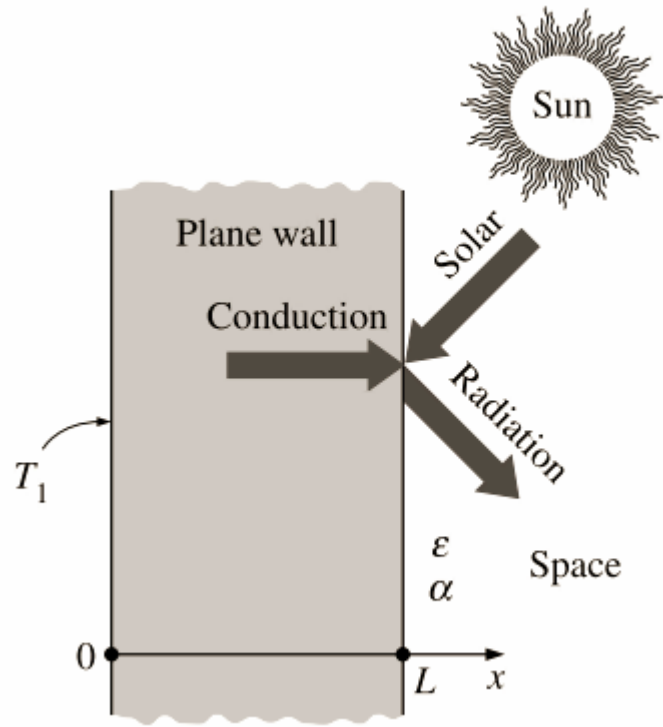
Podstawiając $C_1 = -\dot{q}_0/k$ \longrightarrow $C_2 = T_\infty + \frac{\dot{q}_0}{h} + \frac{\dot{q}_0}{k} L$

$$T(x) = T_\infty + \dot{q}_0 \left(\frac{L - x}{k} + \frac{1}{h} \right)$$

Jest to równanie opisujące zmianę temperatury w analizowanym układzie.

$$T(0) = T_\infty + \dot{q}_0 \left(\frac{L}{k} + \frac{1}{h} \right) = 20^\circ\text{C} + (40,000 \text{ W/m}^2) \left(\frac{0.005 \text{ m}}{15 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}} + \frac{1}{80 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} \right) = \mathbf{533^\circ\text{C}}$$

$$T(L) = T_\infty + \dot{q}_0 \left(0 + \frac{1}{h} \right) = 20^\circ\text{C} + \frac{40,000 \text{ W/m}^2}{80 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} = \mathbf{520^\circ\text{C}}$$



Grubość ściany $L=0,06\text{m}$
Konduktywność $k=1,2\text{ W/mK}$