POLITECHNIKA ŁÓDZKA, INSTYTUT INFORMATYKI STOSOWANEJ

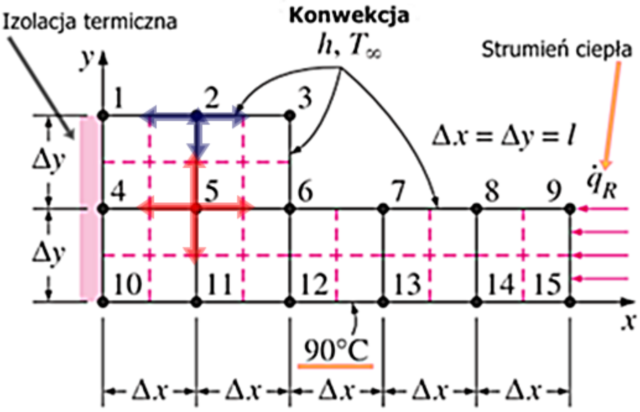
Laboratorium Komputerowej Analizy Urządzeń Termicznych

Obliczanie dwuwymiarowego rozkładu stacjonarnego pola temperatury z warunkami brzegowymi I, II i III rodzaju.

Dr inż.Piotr Urbanek

2013-01-23

Zadanie do samodzielnego rozwiązania na zaliczenie laboratorium KAUT.
Napisać program do obliczający rozkład temperatury w stanie cieplnie ustalonym w ciele stałym, którego przekrój pokazany jest na rysunku 1.



Rys. 1. Przekrój poprzeczny ciała stałego z zaznaczonymi warunkami brzegowymi.

Zakładamy, że w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny rysunku przepływ ciepła można zaniedbać. Analizowane ciało posiada konduktywność $k = 15\ W/mK$. Wewnątrz ciała generowane jest ciepło $\dot{g} = 2 \times 10^6\ W/m^3$. Lewa ściana jest izolowana termicznie, spód ciała jest utrzymywany w stałej temperaturze $T_{spód} = 90$°C. Cała górna powierzchnia ciała wymienia ciepło z otoczeniem poprzez konwekcję, której współczynnik wynosi $h = 80 \frac{W}{(m^2\ K)}$ przy temperaturze otoczenia $T_\infty = 25$°C. Prawa ściana ciała jest wystawiona na strumień ciepła, który jest stały i wynosi $\dot{q}_r = 5000\ W/m^2$.
Zakładamy, że ciało zostało podzielone siatką składającą się z 15 węzłów, których odległości $\Delta x = \Delta y = 1{,}2\ cm$. Założyć, że wymianę ciepła przez radiację można zaniedbać.

Analiza zadania.
Należy zauważyć, że jedynie węzeł nr 5 jest węzłem środkowym. Powoduje to konieczność układania bilansu energii w celu ułożenia równań różnicowych dla węzłów znajdujących się na brzegach obszaru (z wyjątkiem węzłów od 10 do 14, których temperatury są znane).
Aby tego dokonać najpierw należy podzielić istniejące już elementy (od 1 do 15) na jednakowe podobszary reprezentowane na rysunku 1 liniami przerywanymi. Jeśli założymy, że objętość elementu określana przez węzeł wewnętrzny 5 wynosi $(\Delta x \times \Delta y \times 1)$, to objętość elementu powierzchniowego, np. znajdującego się przy węźle nr 2 wynosi $(\Delta x \times \Delta y/2 \times 1)$, natomiast elementu narożnego wynosi $(\Delta x/2 \times \Delta y/2 \times 1)$.
Wykorzystując równanie bilansu energii dla węzła środkowego:

$$T_{lewy} + T_{góra} + T_{prawy} + T_{spód} - 4T_{węzła} + \frac{\dot{g}_{węzła} l^2}{k} = 0$$

Można ułożyć równania dla poszczególnych węzłów układu, to znaczy:

Węzeł nr 1 (izolowany plus konwekcja)

$$0 + h\frac{\Delta x}{2}(T_\infty - T_1) + k\frac{\Delta y}{2}\frac{T_2 - T_1}{\Delta x} + k\frac{\Delta x}{2}\frac{T_4 - T_1}{\Delta y} + \dot{g}_1\frac{\Delta x}{2}\frac{\Delta y}{2} = 0$$

Uwzględniając, że $\Delta x = \Delta y = l$ otrzymujemy równanie:

$$-\left(2 + \frac{hl}{k}\right)T_1 + T_2 + T_4 = -\frac{hl}{k}T_\infty - \frac{\dot{g}_1 l^2}{2k}$$

Węzeł nr 2.

$$h\Delta x(T_\infty - T_2) + k\frac{\Delta y}{2}\frac{T_3 - T_2}{\Delta x} + k\Delta x\frac{T_5 - T_2}{\Delta y} + k\frac{\Delta y}{2}\frac{T_1 - T_2}{\Delta x} + \dot{g}_2\Delta x\frac{\Delta y}{2} = 0$$

$$T_1 - \left(4 + \frac{2hl}{k}\right)T_2 + T_3 + 2T_5 = -\frac{2hl}{k}T_\infty - \frac{\dot{g}_2 l^2}{k}$$

Węzeł nr 3 (narożny zewnętrzny)

$$h\left(\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta y}{2}\right)(T_\infty - T_3) + k\frac{\Delta x}{2}\frac{T_6 - T_3}{\Delta y} + k\frac{\Delta y}{2}\frac{T_2 - T_3}{\Delta x} + \dot{g}_3\frac{\Delta x}{2}\frac{\Delta y}{2} = 0$$

$$T_2 - \left(2 + \frac{2hl}{k}\right)T_3 + T_6 = -\frac{2hl}{k}T_\infty - \frac{\dot{g}_3 l^2}{2k}$$

Węzeł nr 4 (wewnętrzny izolowany termicznie)

$$T_5 + T_1 + T_5 + T_{10} - 4T_4 + \frac{\dot{g}_4 l^2}{k} = 0$$

Gdzie T_{10}=90°C.

Węzeł nr 5 (wewnętrzny)

$$T_4 + T_2 + T_6 + T_{11} - 4T_5 + \frac{\dot{g}_5 l^2}{k} = 0$$

Węzeł nr 6 (narożny wewnętrzny z konwekcją)

$$h\left(\frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta y}{2}\right)(T_\infty - T_6) + k\frac{\Delta y}{2}\frac{T_7 - T_6}{\Delta x} + k\Delta x\frac{T_{12} - T_6}{\Delta y}$$
$$+ k\Delta y\frac{T_5 - T_6}{\Delta x} + k\frac{\Delta x}{2}\frac{T_3 - T_6}{\Delta y} + \dot{g}_6\frac{3\Delta x\Delta y}{4} = 0$$

Węzeł nr 7 i nr 8 (powierzchniowy z konwekcją)

$$h\Delta x(T_\infty - T_7) + k\,\frac{\Delta y}{2}\,\frac{T_8 - T_7}{\Delta x} + k\Delta x\,\frac{T_{13} - T_7}{\Delta y}$$
$$+ k\,\frac{\Delta y}{2}\,\frac{T_6 - T_7}{\Delta x} + \dot{g}_7\Delta x\,\frac{\Delta y}{2} = 0$$

Węzeł nr 9 (konwekcja plus strumień ciepła).

$$h\,\frac{\Delta x}{2}\,(T_\infty - T_9) + \dot{q}_R\,\frac{\Delta y}{2} + k\,\frac{\Delta x}{2}\,\frac{T_{15} - T_9}{\Delta y} + k\,\frac{\Delta y}{2}\,\frac{T_8 - T_9}{\Delta x} + \dot{g}_9\,\frac{\Delta x}{2}\,\frac{\Delta y}{2} = 0$$