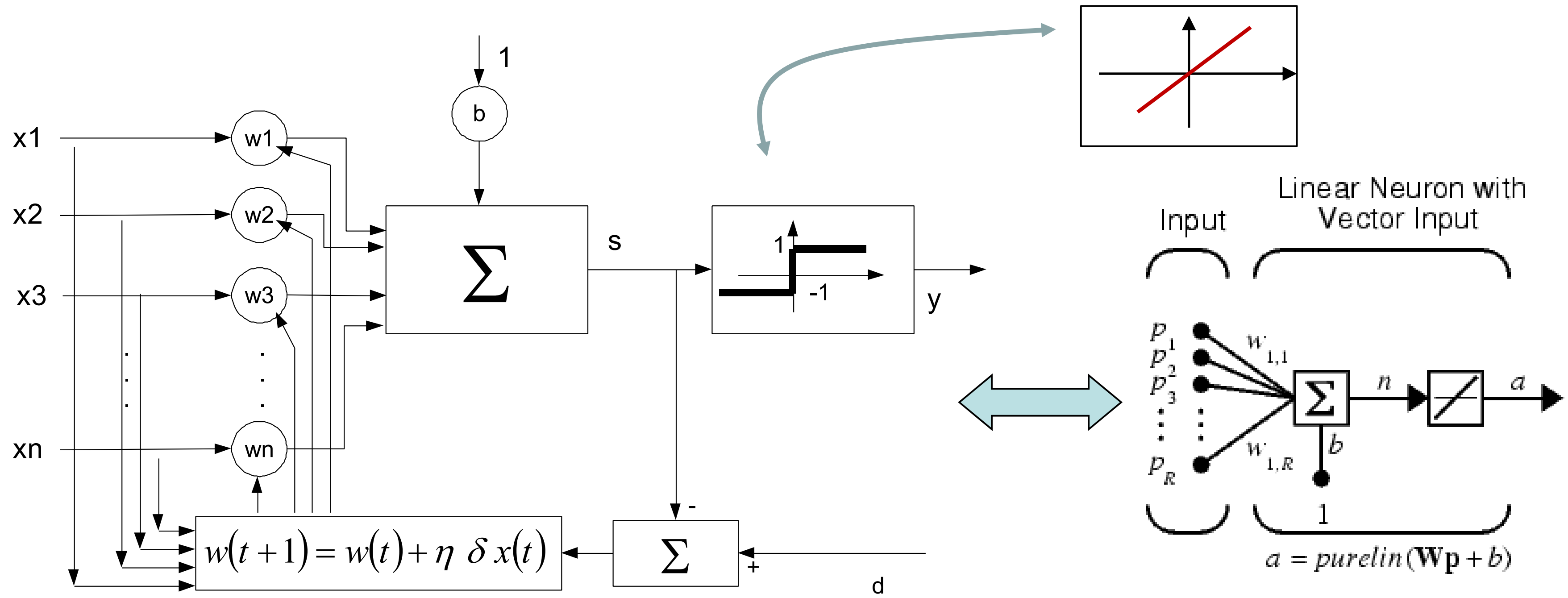
SZTUCZNE SIECI NEURONOWE

Ang. Artifficial neural network

Wykład 2

Dr inż. Piotr Urbanek

Neuron Adaline (Adaptive Linear Neuron)



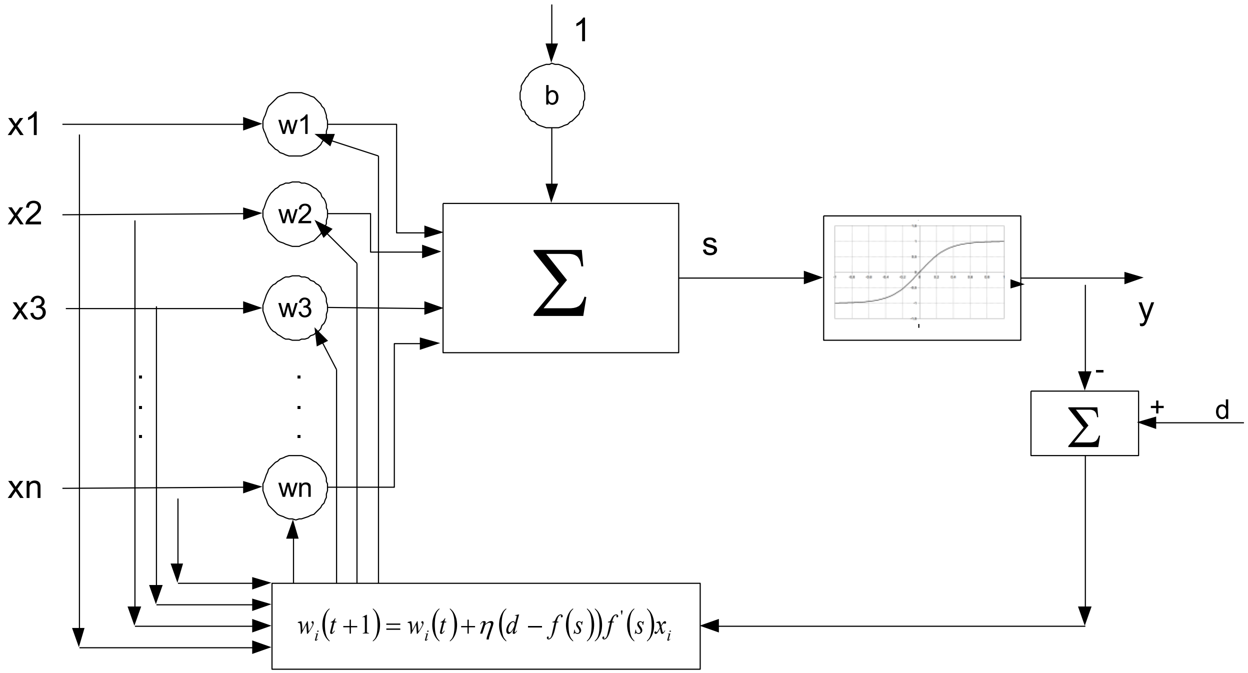
$$\varepsilon = d - s$$

Minimalizacja funkcji: $Q(w) = \frac{1}{2}\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\left[d - \left(\sum_{i=0}^{n} w_i x_i\right)\right]^2$

$$\boxed{w_i(t+1) = w_i(t) + \eta\,\delta\,x_i}$$

gdzie: $\delta = d - s$

Neuron sigmoidalny.



$$\boxed{w_i(t+1)=w_i(t)+\eta\left(d-f(s)\right)f'(s)\,x_i}$$

gdzie:

Funkcja aktywacji:

$$f(s)=\frac{1}{1+e^{-\beta s}}$$

$$f(s)=\tanh(\beta s)=\frac{1-e^{\beta s}}{1+e^{-\beta s}}$$

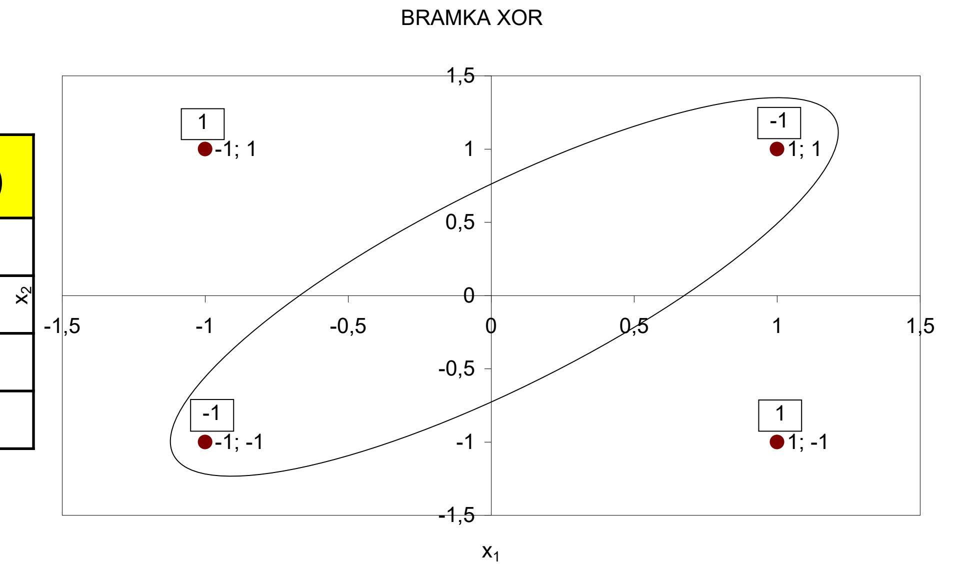
$$f'(s)=\beta f(s)(1-f(s))$$

$$f'(s)=\beta\left(1-f^2(s)\right)$$

Sieci jednokierunkowe wielowarstwowe

Bramka XOR

x_1	x_2	XOR (x_1, x_2)
1	1	-1
1	-1	1
-1	1	1
-1	-1	-1

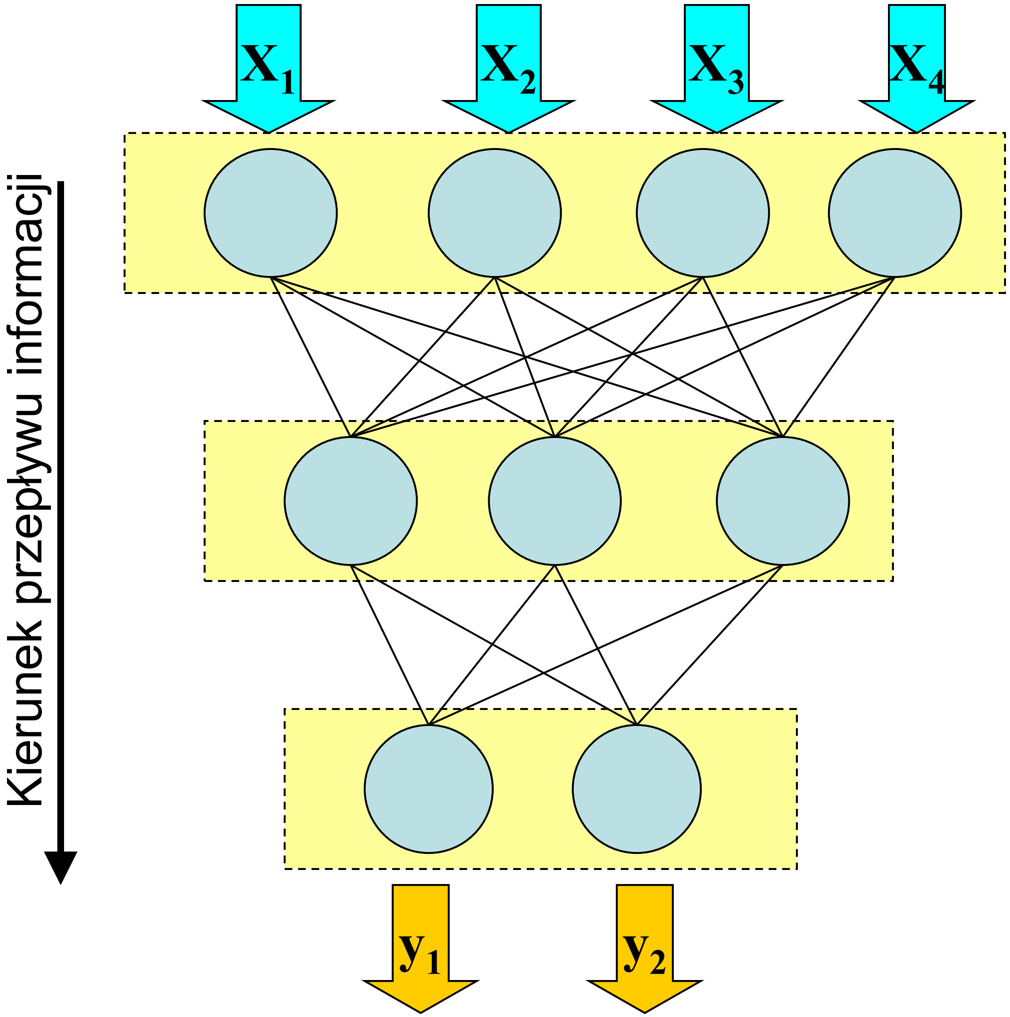


Sieci wielowarstwowe to odpowiednio ze sobą połączone neurony rozmieszczone w dwóch, lub więcej warstwach.

Z reguły są to neurony sigmoidalne, ale używa się również neuronów o liniowych funkcjach aktywacji (są one najczęściej umieszczane w ostatniej, wyjściowej warstwie).

Sieci wielowarstwowe muszą mieć co najmniej dwie warstwy: wejściową i wyjściową.

Wielowarstwowe Sztuczne Sieci Neuronowe



Warstwa wejściowa

- Każdy neuron posiada tylko jedno wejście zewnętrzne.

Warstwa ukryta

- Zawiera połączenia warstw

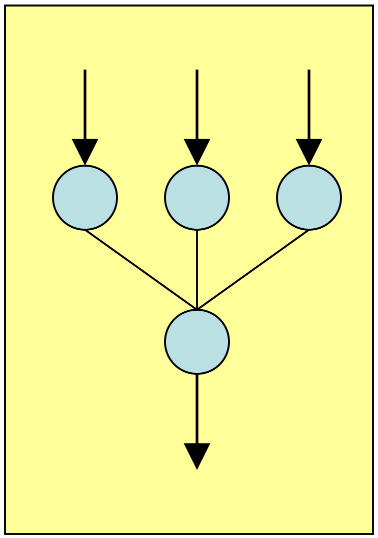
Warstwa wyjściowa

- Każdy neuron posiada jedno wyjście zewnętrzne.

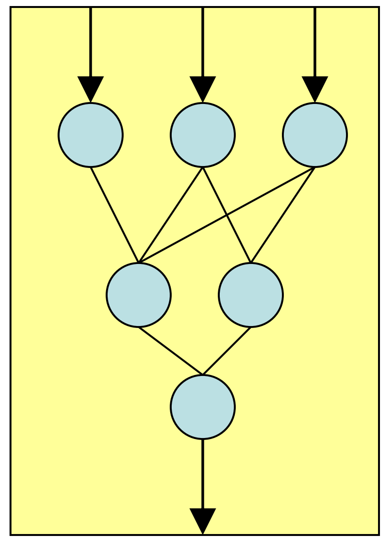
Wielowarstwowe Sztuczne Sieci Neuronowe

Liczba ukrytych warstw może wynosić:

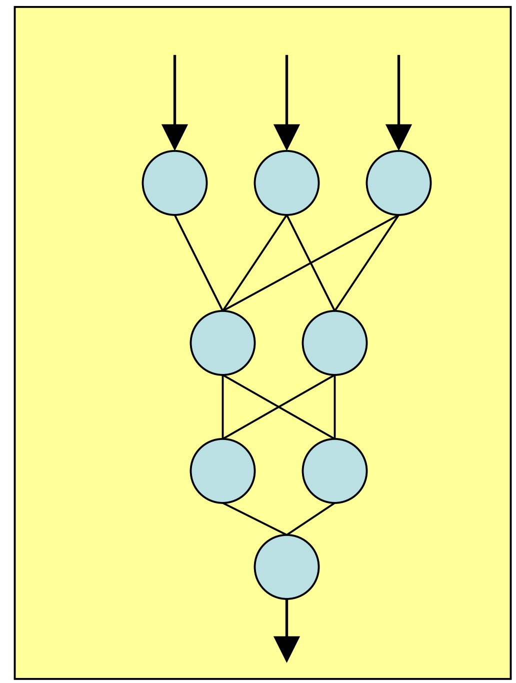
0



1

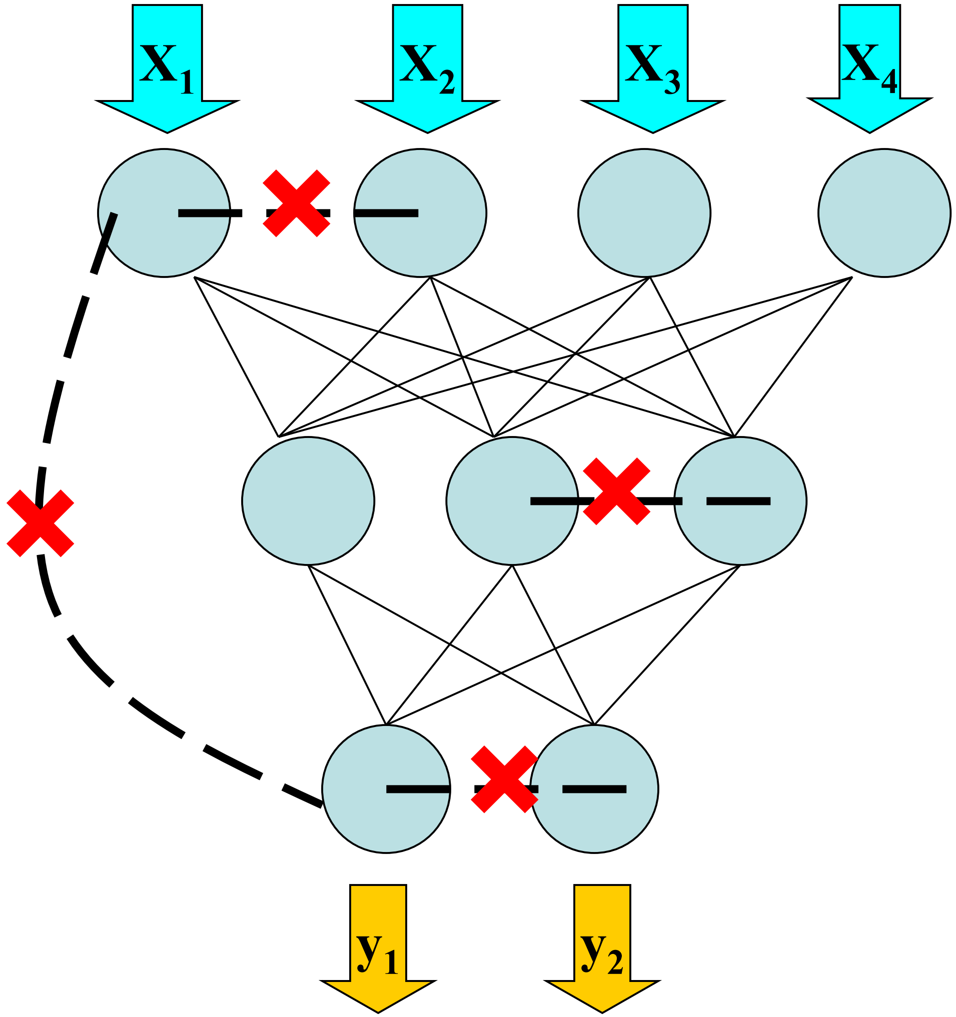


Więcej niż 1



Wielowarstwowe Sztuczne Sieci Neuronowe

Należy zauważyć, że:



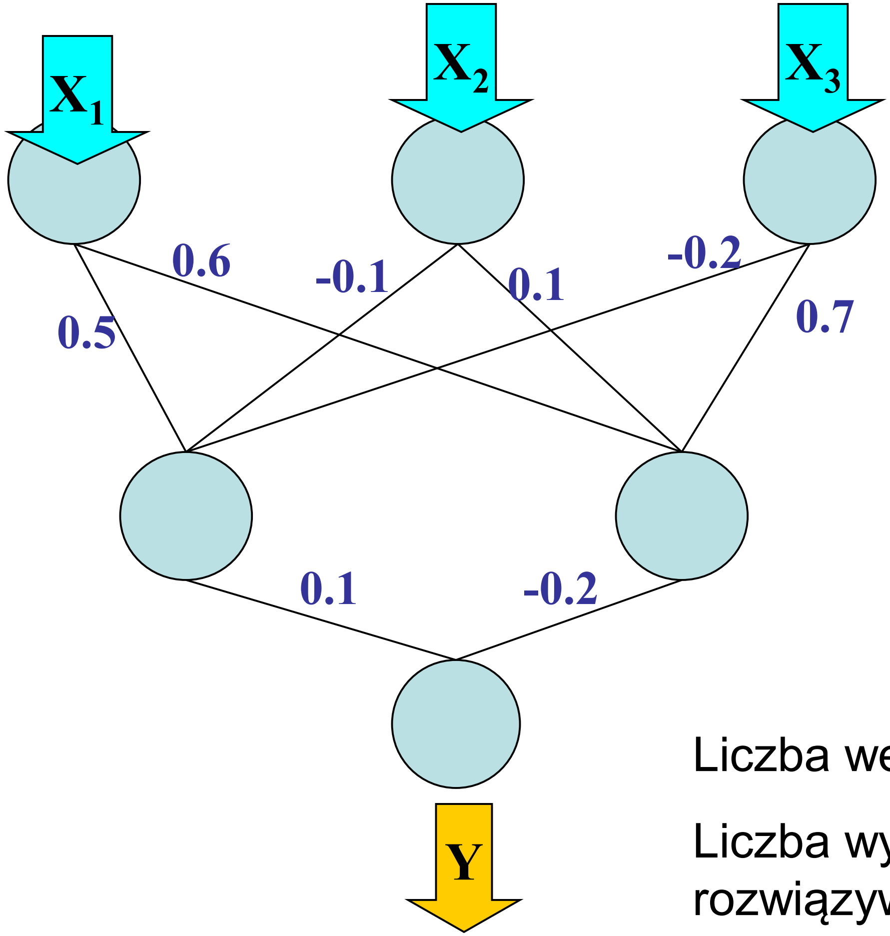
• Nie istnieją połączenia pomiędzy neuronami w danej warstwie.

• Neuron w jednej warstwie jest połączony z innymi neuronami w innych warstwach.

• „Przeskakiwanie" sygnału z ominięciem warstw nie jest dozwolone.

Przykład wielowarstwowej sieci neuronowej

Wejścia: X_1 X_2 X_3 **Wyjście:** Y **Model:** $Y = f(X_1\ X_2\ X_3)$



Parametery

# Neuronów wejściowych	3
# Warstw ukrytych	1
# Neuronów wyjściowych	1

Liczba wejść zależy od rozmiaru wektora X

Liczba wyjść zależy od rodzaju rozwiązywanego problemu

Budowanie modelu SSN

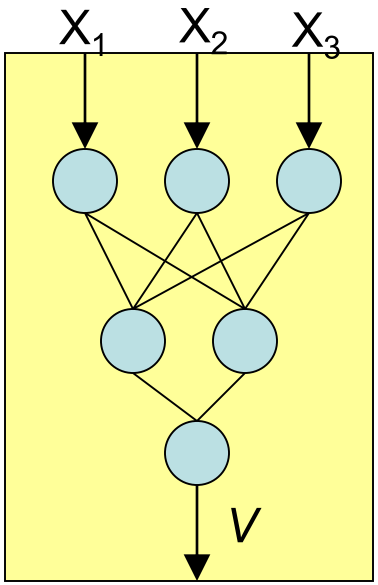
Jak zbudować model dla konkretnego zagadnienia ?

Wejście: $[X_1\ X_2\ X_3]$ **Wyjście:** Y **Model:** $Y = f(X_1\ X_2\ X_3)$

Wejść = **3** # Neuronów wyjściowych = # Wyjść = **1**

Warstw ukrytych = ??? Może **1**
Neuronów warstwie ukrytej = ??? Może **2**

Nie ma jednej strategii.
Metoda prób i błędów



Jeśli architektura SSN jest ustalona … to jak znaleźć wartości wag???

8 wartości wag do ustalenia.
$\underline{\mathbf{W}} = (W_1, W_2, \ldots, W_8)$

Dane ćwiczeniowe: $(Y_i, X_{1i}, X_{2i}, \ldots, X_{pi})$ i= 1,2,…,n

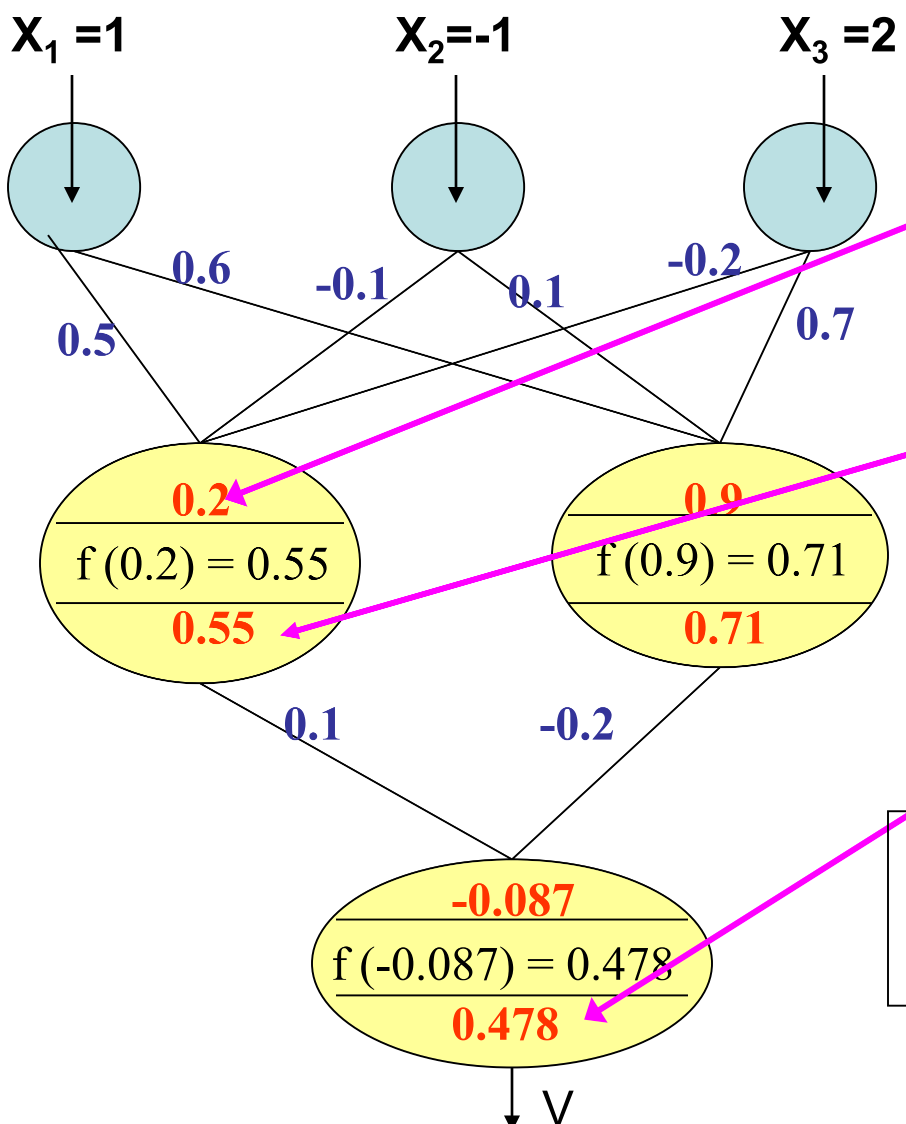
Określając wartości $\underline{\boldsymbol{W}}$, otrzymujemy wartości wyjściowe $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$

Zatem V=f($\underline{\boldsymbol{W}}$).

Definiujemy całkowity błąd predykcji: $E = \sum_i (Y_i - V_i)^2$

Przykład użycia SSN do predykcji sygnału.

Wejście: $X_1\ X_2\ X_3$ **Wyjście:** Y **Model:** $Y = f(X_1\ X_2\ X_3)$



0.2 = 0.5 * 1 –0.1*(-1) –0.2 * 2

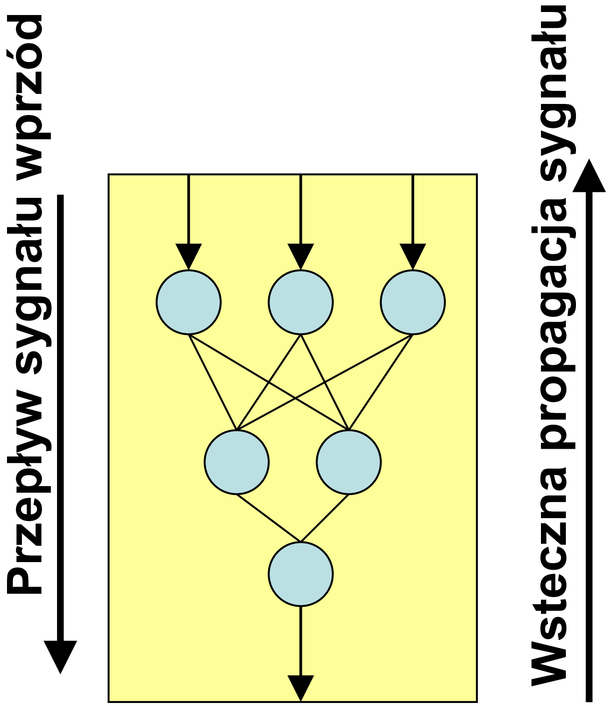
$f(x) = e^x / (1 + e^x)$

$f(0.2) = e^{0.2} / (1 + e^{0.2}) = 0.55$

Przewidywane V = 0.478

Spodziewana wartość Y = 2
zatem
Błąd predykcji = (2-0.478) =1.522

Ćwiczenie modelu SSN



$$e = \sum_i (Y_i - V_i)^2$$

Jak uczyć SSN ?

- Ustalenie losowych wartości wag

- Obliczenie przepływu sygnału w przód

X → Sieć **V → „Błąd i-tego neuronu” = (Y_i – V_i)**

- Dobieramy wagi aby zmniejszyć Błąd SSN

- Kolejne obliczenie przepływu sygnału.
  Dobór wag.

- Powtarzanie procedury, do momentu uzyskania
Błędu SSN mniejszego od założonego

Dobór wag w algorytmie uczenia metodą Wstecznej Propagacji Błędów

V_i – predykcja zwracana przez sieć w i-tej obserwacji – jest funkcją wektora wag $\underline{W} = (W_1, W_2, \ldots.)$

Stąd, E jest całkowitym błędem predykcji - również jest funkcją W

$$E(\underline{W}) = \Sigma [Yi - Vi(\underline{W})]^2$$

Metoda Największego Spadku :

Dla każdej wagi W_i, uaktualnianie wag odbywa się wg wzoru:

$$W_{new} = W_{old} + \alpha * (\partial E / \partial W) |_{Wold}$$

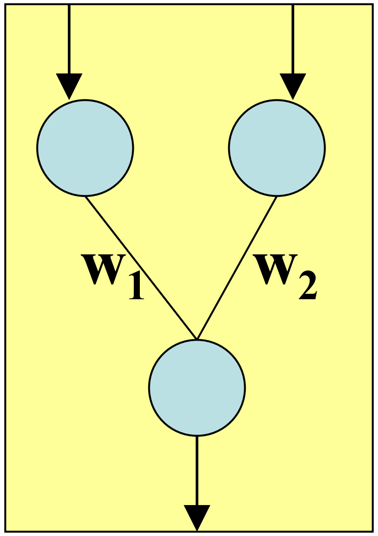
α = współczynnik uczenia [0;1]

Niekiedy do zmiany wag stosowany jest wzór:

$$W_{(t+1)} = W_{(t)} + \alpha * (\partial E / \partial W) |_{W(t)} + \beta * (W_{(t)} - W_{(t-1)})$$

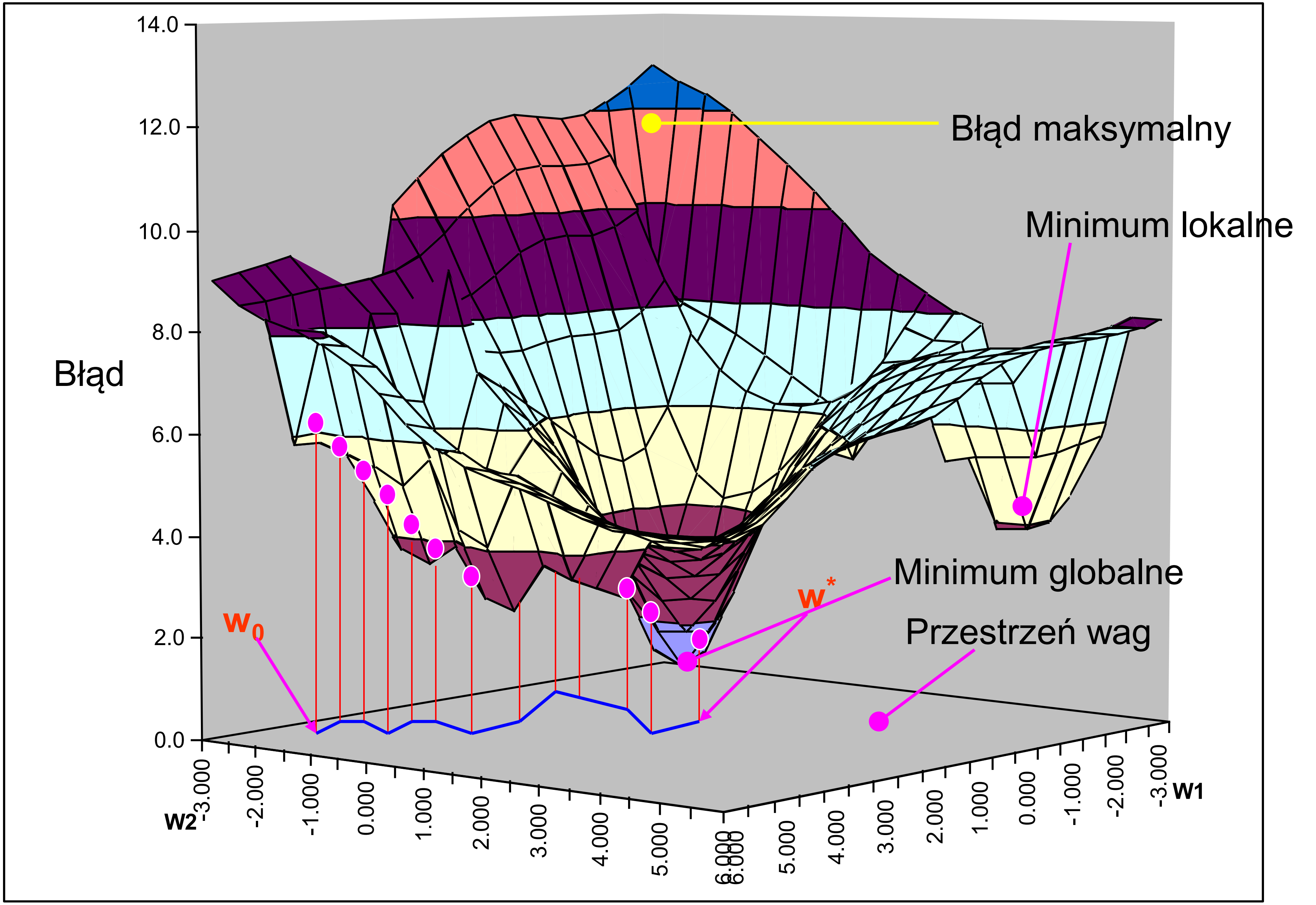
β - Współczynnik „Momentum” [0;1]

Geometryczna interpretacja doboru wag

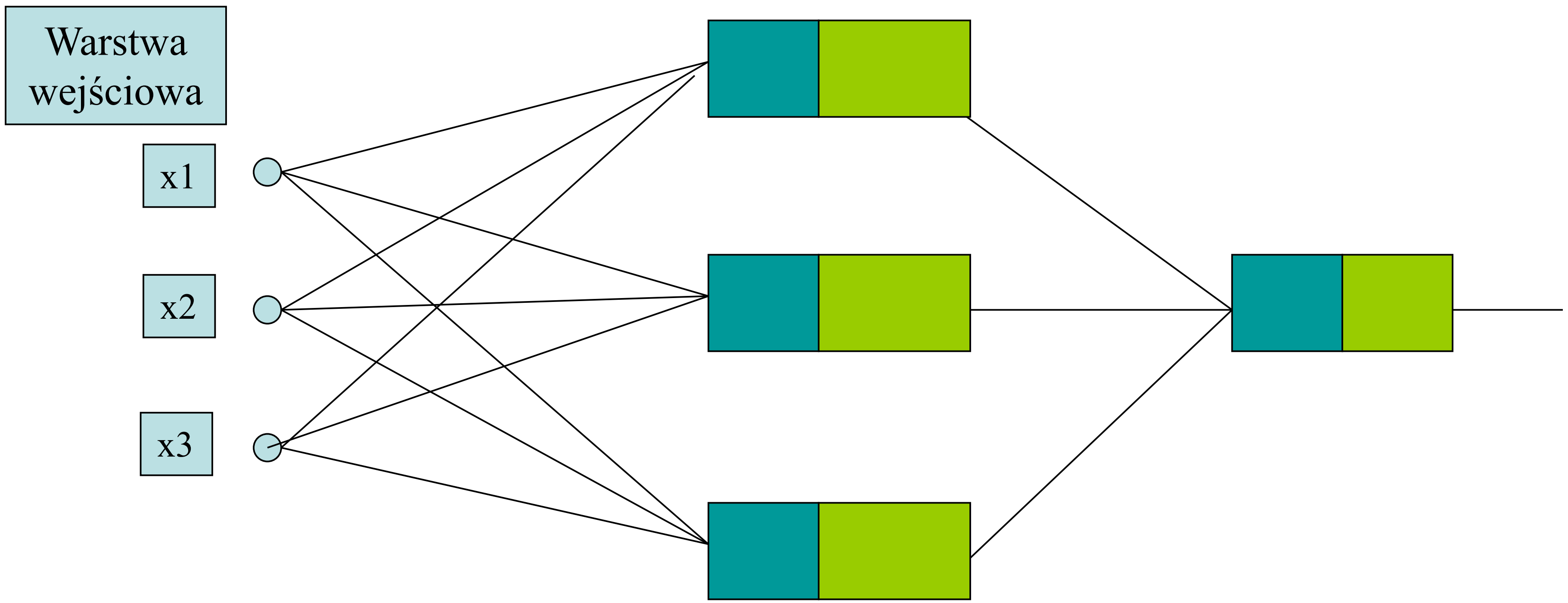


$$E(w_1, w_2) = \Sigma [Yi - Vi(w_1, w_2)]^2$$

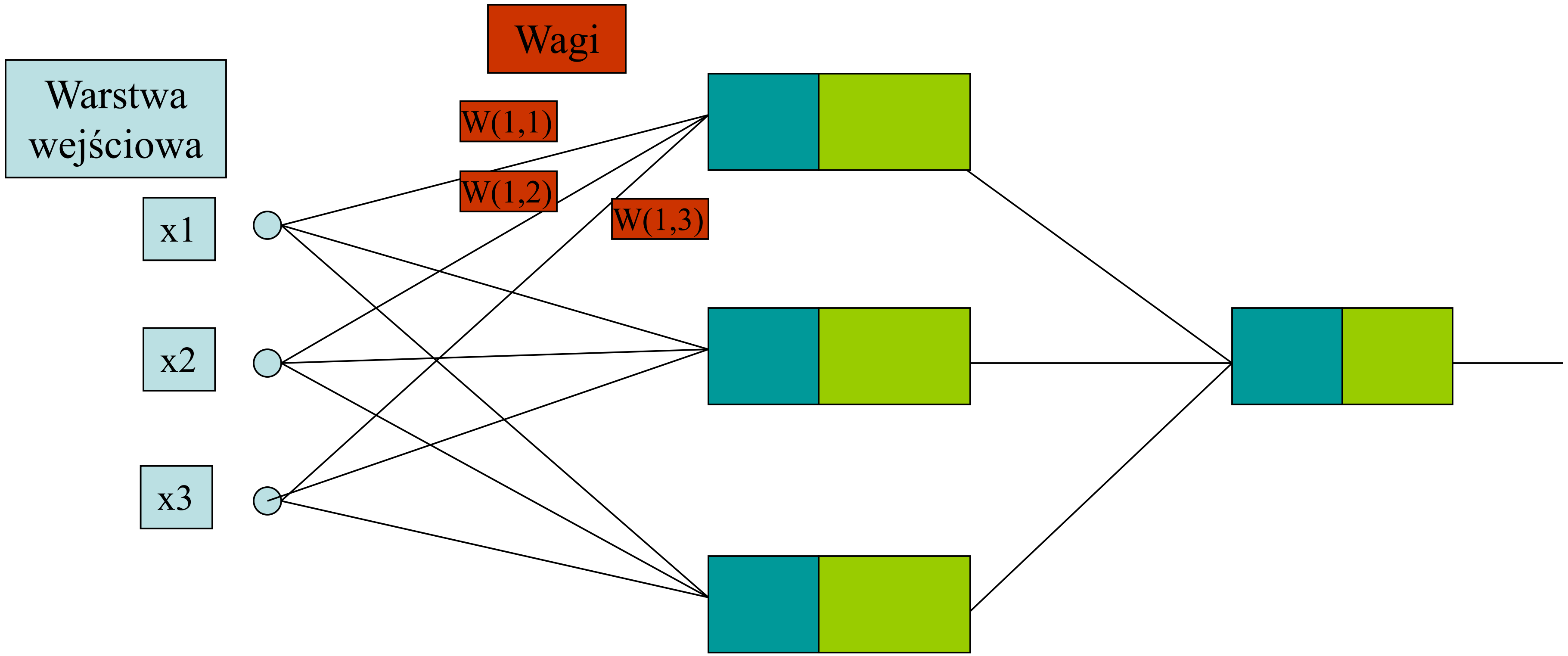
Geometryczna interpretacja doboru wag



Algorytm Wstecznej Propagacji Błędu



Na warstwę wejściową podawane są sygnały wejściowe (x1..xn). Mogą to być np. dane próbki sygnału zmieniającego się w czasie ($y = A\sin(2\pi f \cdot t + \varphi)$), próbki głosu do rozpoznania, lub inne.



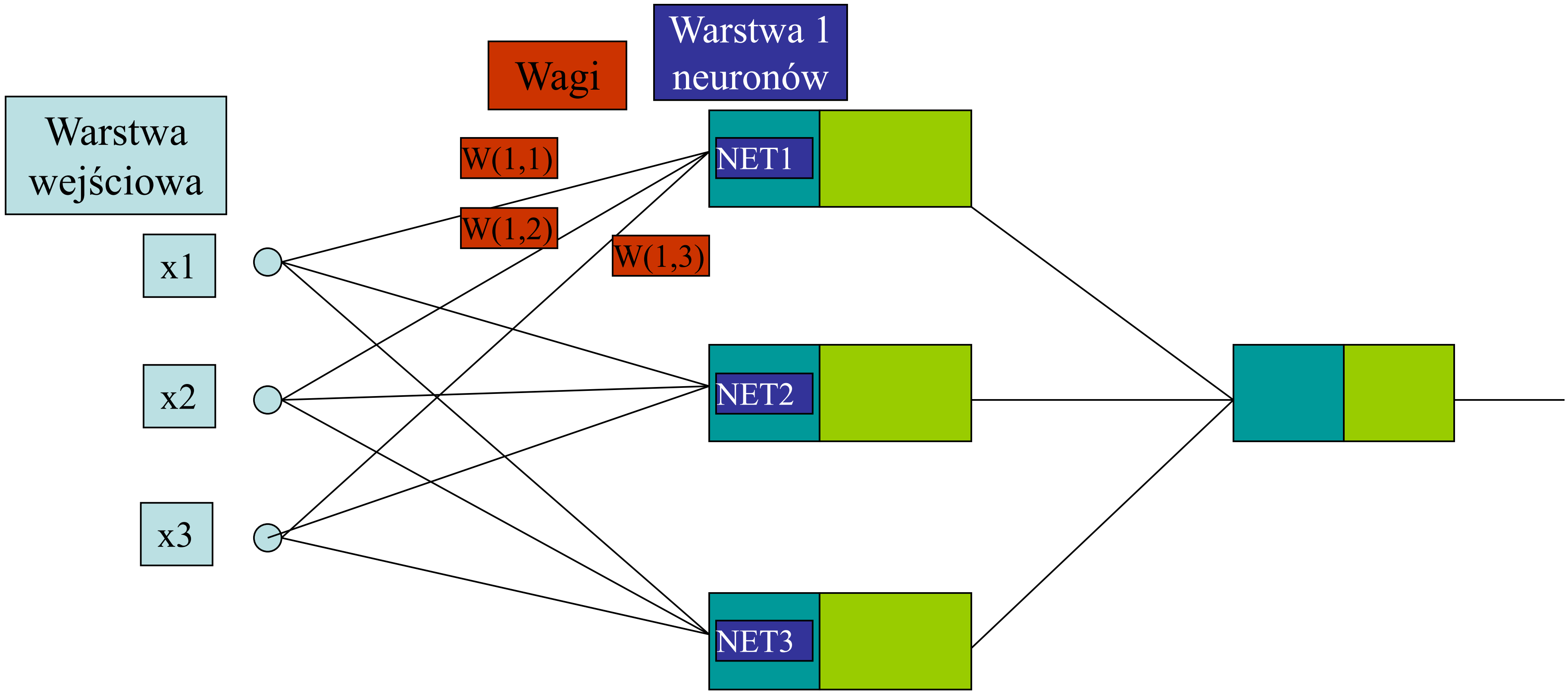
Sygnały wejściowe mnożone są odpowiednio przez wagi każdego z neuronów.

x1*w(1,1), x2*w(1,2), x3*w(1,3)

x1*w(2,1), x2*w(2,2), x3*w(2,3)

x1*w(3,1), x2*w(3,2), x3*w(3,3)

Algorytm Wstecznej Propagacji Błędu



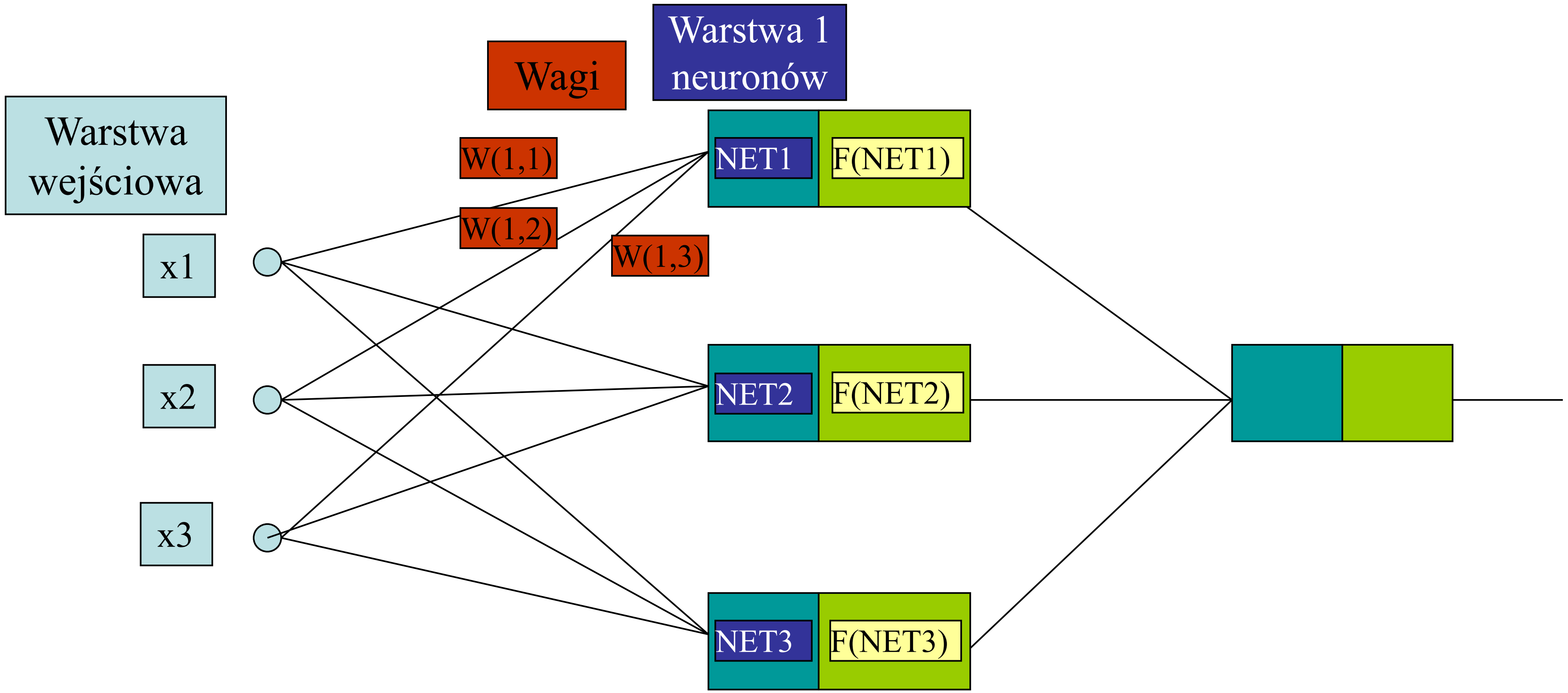
Wartości uzyskane z przemnożenia sygnałów wejściowych oraz odpowiednich wag są sumowane w każdym neuronie dając odpowiednie wartości potencjału neuronu (NET):

NET1=x1*w(1,1)+x2*w(1,2)+x3*w(1,3)

NET2=x1*w(2,1)+x2*w(2,2)+x3*w(2,3)

NET3=x1*w(3,1)+x2*w(3,2)+x3*w(3,3)

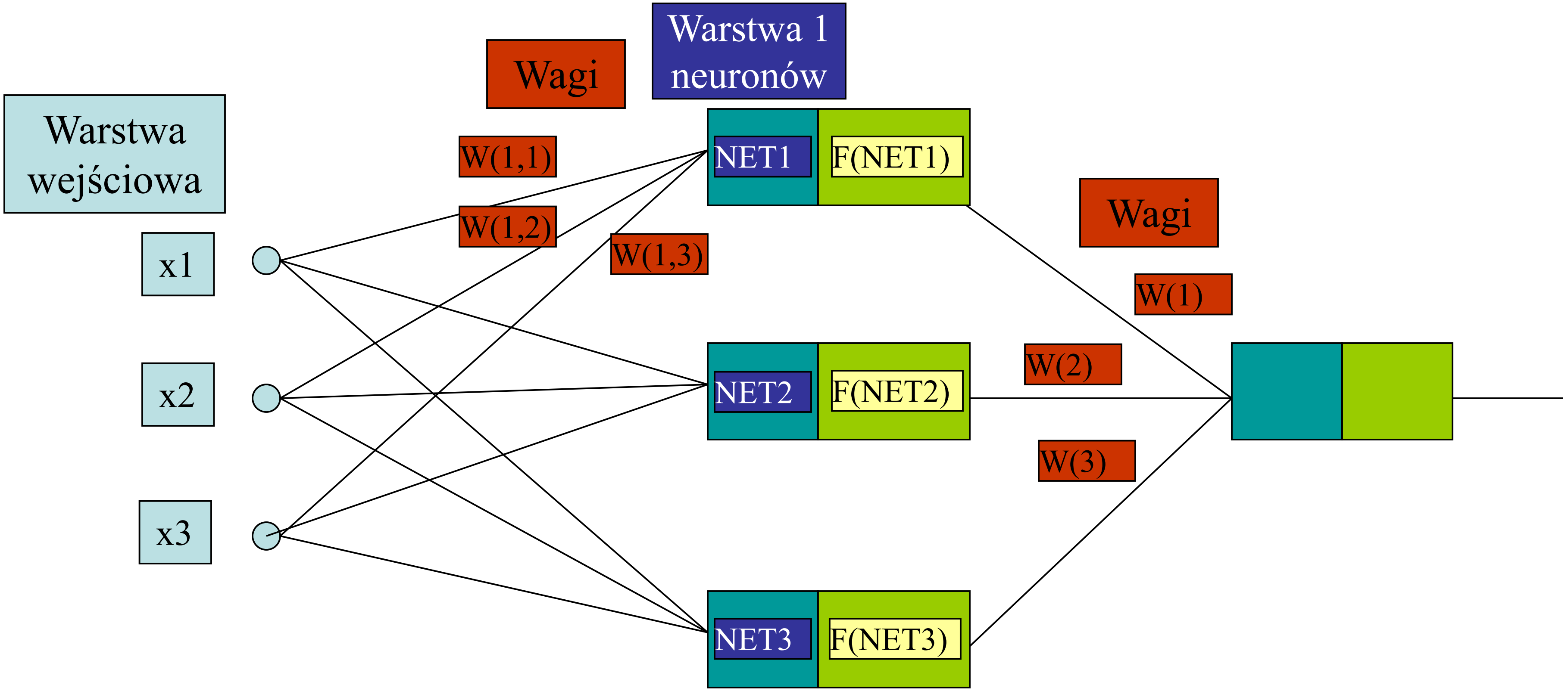
Algorytm Wstecznej Propagacji Błędu



Sygnał potencjału przekazywany jest jako argument do funkcji aktywacji neuronu f(NET). Jest ona nieliniowa oraz koniecznie różniczkowalna. Najczęściej spotykaną funkcją jest tzw. funkcja sigmoidalna postaci:

$$f(NETi) = \frac{1}{1+e^{-(\beta x)}}$$

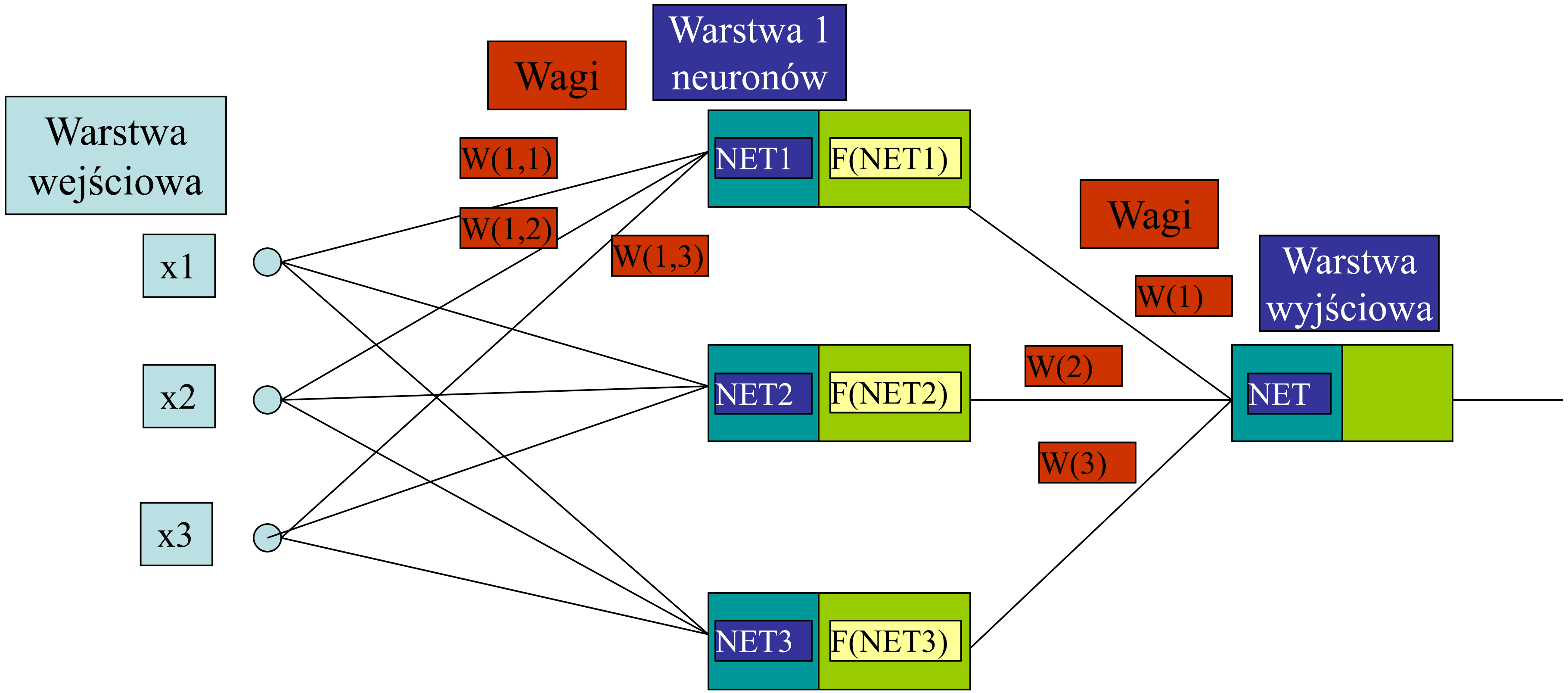
Algorytm Wstecznej Propagacji Błędu



Otrzymane wartości ze wszystkich neuronów zostają przemnożeone przez odpowiednie wagi neuronu warstwy wyjściowej:

F(NET1)*w(1),   F(NET2)*w(2),   F(NET3)*w(3)

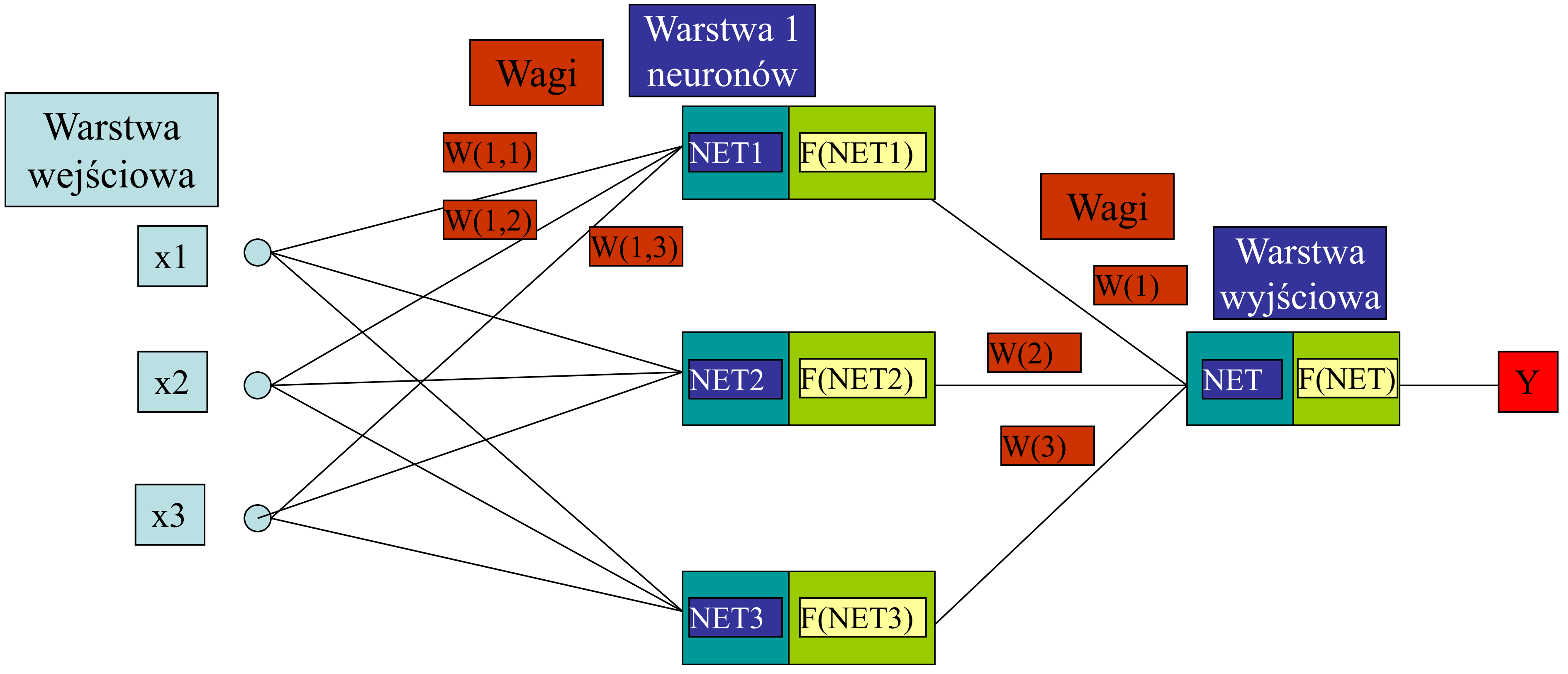
Algorytm Wstecznej Propagacji Błędu



W warstwie wyjściowej ważone wartości wyjściowe z poprzedniej warstwy zostają zsumowane, dając w wyniku potencjał NET

NET = f(NET1)*w(1)+f(NET2)*w(2)+f(NET3)*w(3)

Algorytm Wstecznej Propagacji Błędu

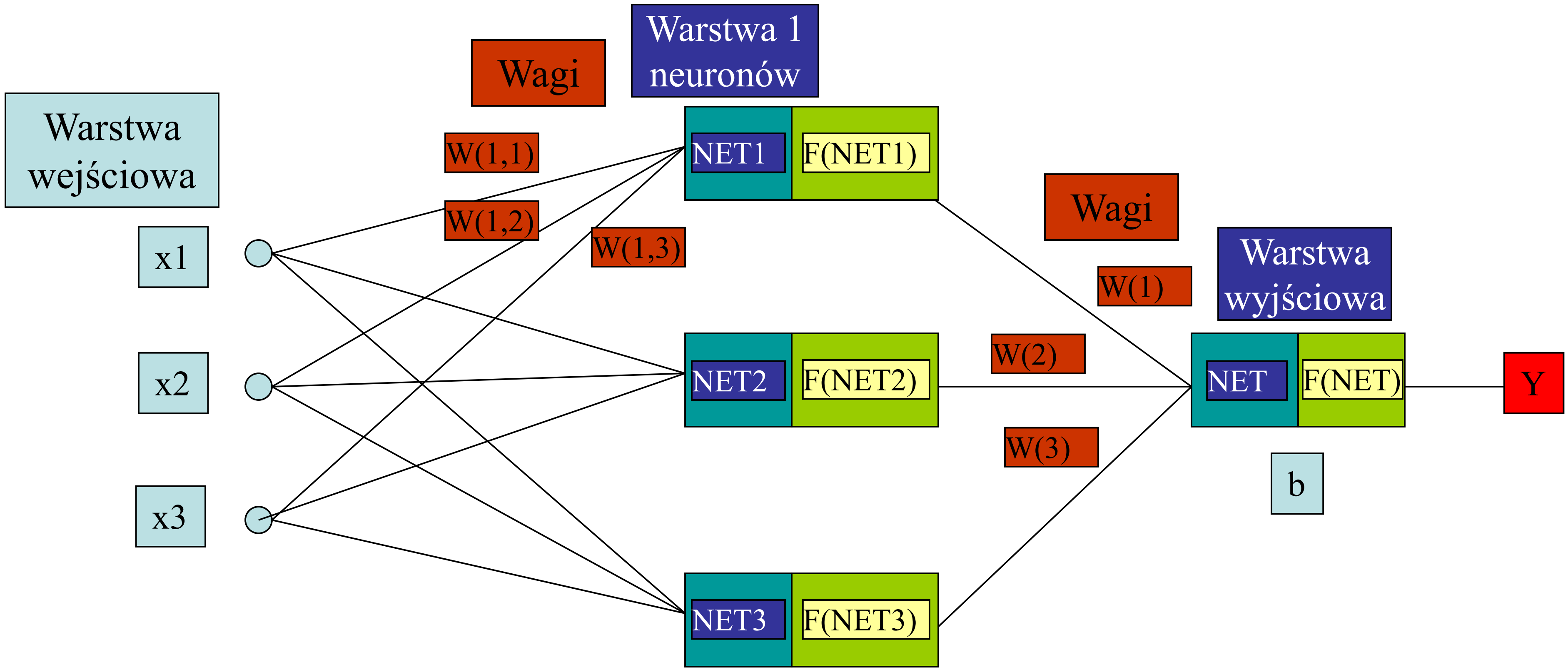


Sygnał NET zostaje podany jako argument nieliniowej funkcji sigmoidalnej f(NET) postaci:

$$y = \frac{1}{1 + e^{-(\beta x)}}$$

Dając w wyniku wartość wyjściową sieci (y).

Algorytm Wstecznej Propagacji Błędu

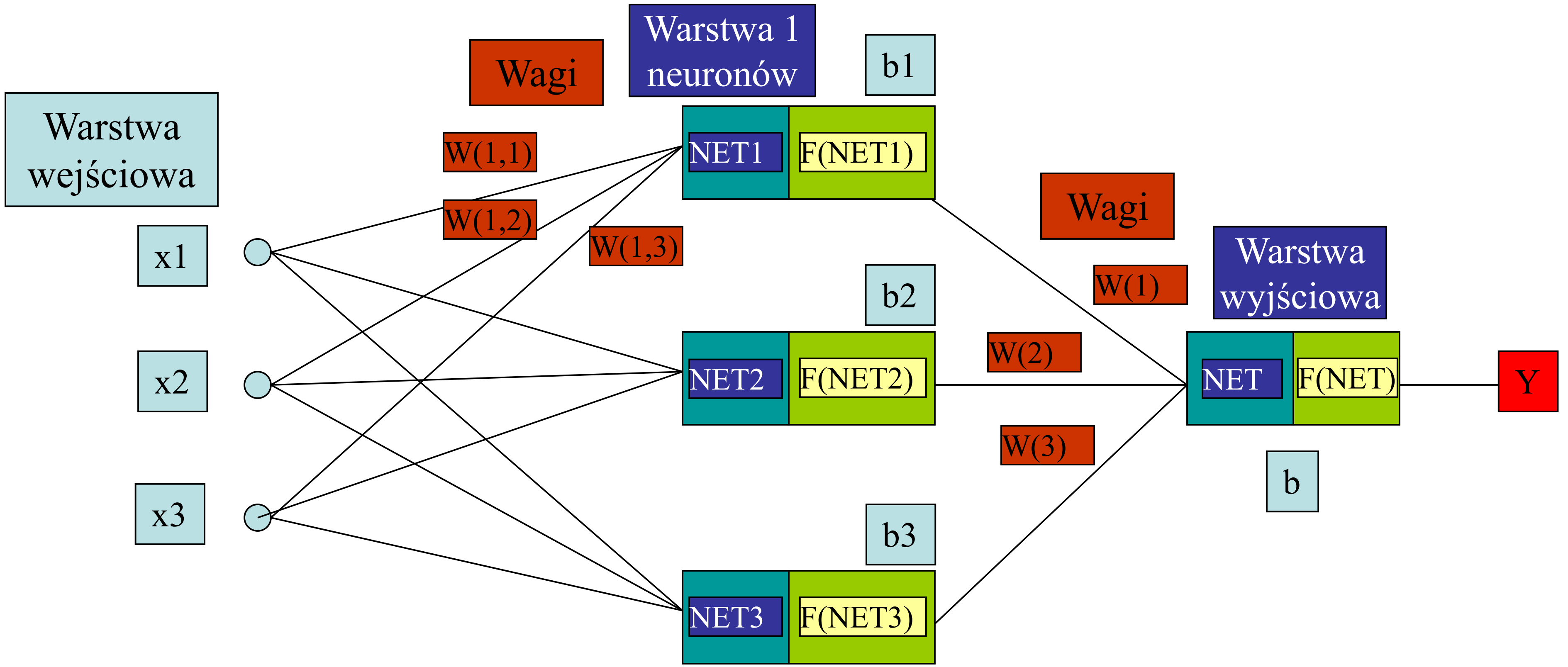


Wyznaczany jest błąd sieci wynikający z porównania odpowiedzi sieci (Y) z odpowiedzią wzorca (Z):

$$b = f'(NET)(Y - Z)$$

Będący błędem neuronu warstwy wyjściowej

Algorytm Wstecznej Propagacji Błędu

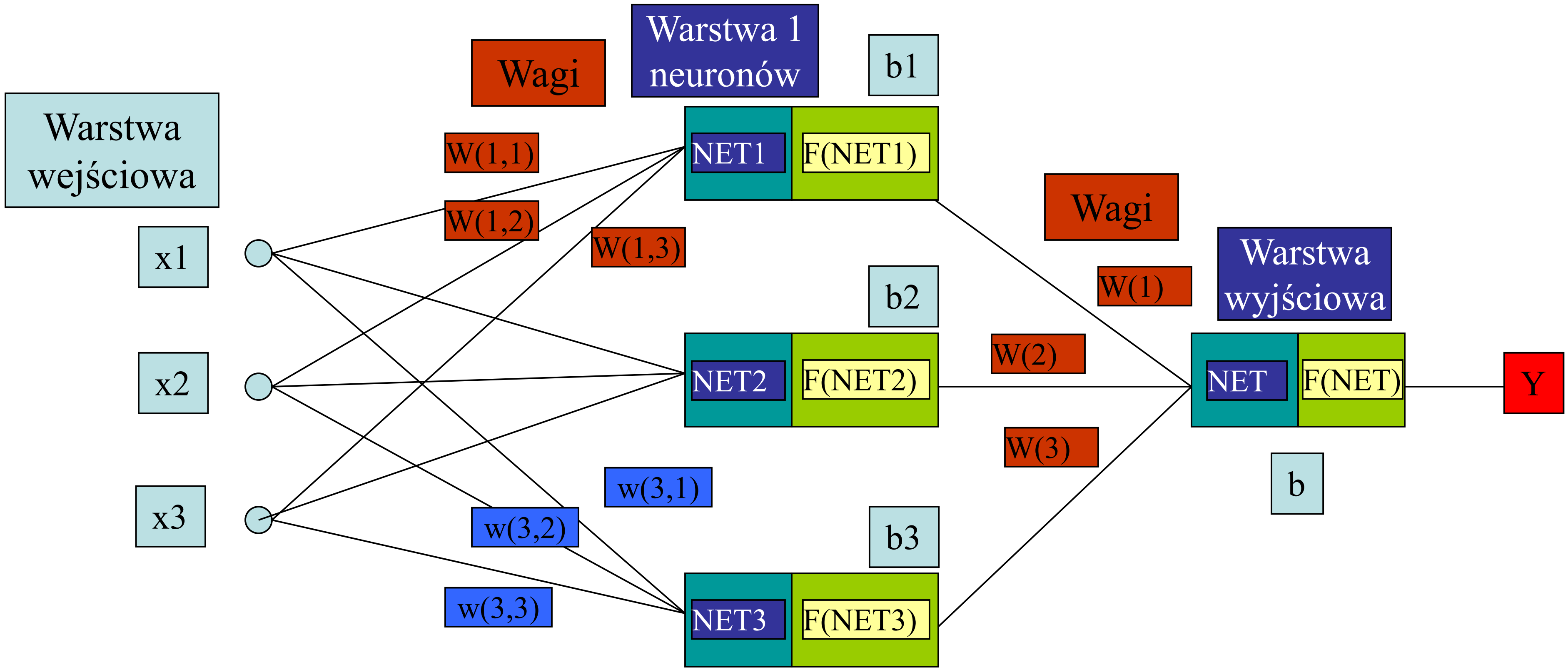


Błąd neuronów warstwy ukrytej wyznaczany jest za pomocą wzoru:

$$b_i = f'(NET)bw_i$$

Co oznacza, że błąd neuronu warstwy ukrytej jest proporcjonalny do błędu neuronu z którym jest „mocno połączony”. Im większy jest błąd jego następcy, tym większy powinien być jego błąd. Wyznaczanie błędów odbywa się w kierunku odwrotnym do zwykłej propagacji sygnału i stąd wzięła się nazwa algorytmu.

Algorytm Wstecznej Propagacji Błędu

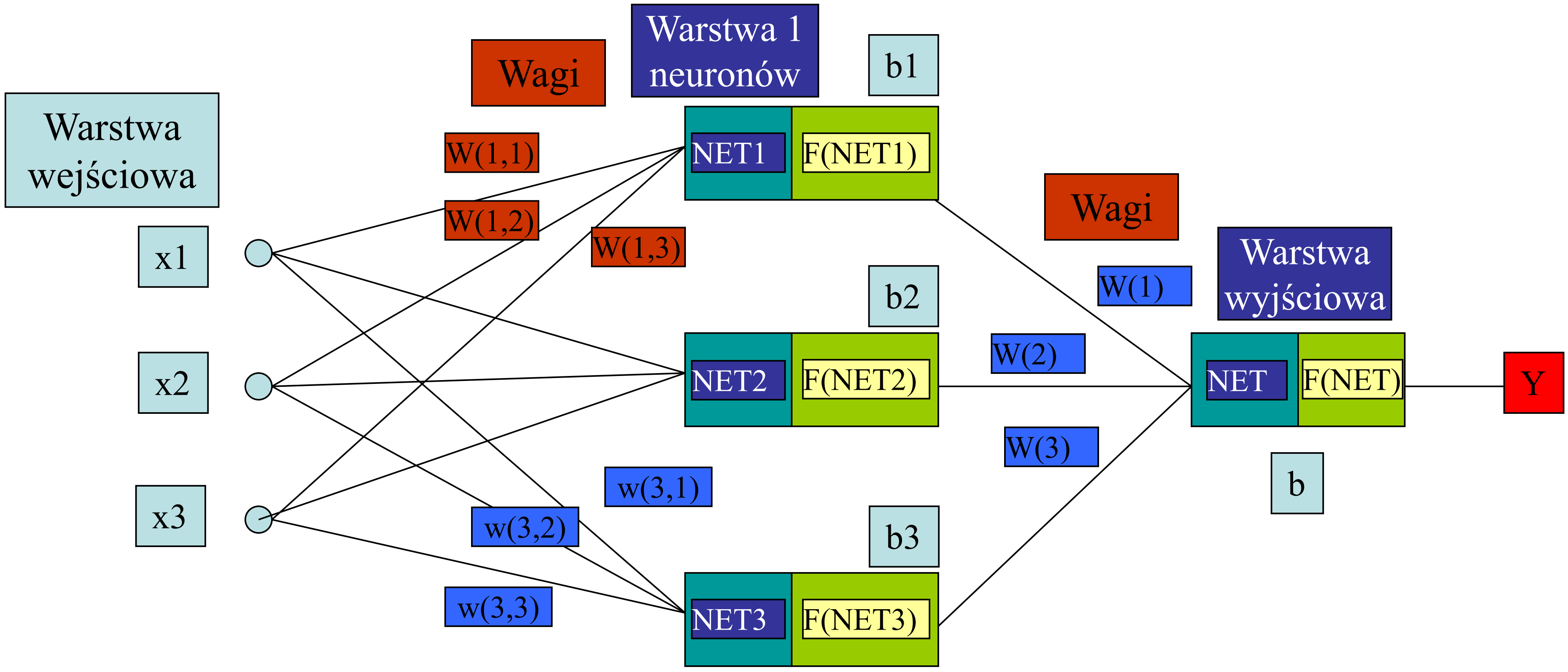


Aktualizacja wag zachodzi w kierunku przewodzenia sygnałów według wzoru:

$$w_{i,j} = w(stare)_{i,j} + \eta b_i x_i$$

Gdzie η tzw. współczynnik uczenia, zwykle 0..0.5 odpowiedzialny jest za szybkość oraz stabilność procesu uczenia. Zmianie podlegają wszystkie wagi neuronów warstwy ukrytej

Algorytm Wstecznej Propagacji Błędu



Aktualizacja wag w warstwie wejściowej następuje analogicznie według wzoru:

$$w_{i,j} = w_{i,j}(stare) + \eta b_i f(NET_i)$$

W wyniku algorytmu, nowe wagi powinny być lepiej przystosowane do pokazanego wzorca wejściowego, co oznacza, że przy kolejnym pokazie, wygenerowany błąd będzie mniejszy.

Algorytm Wstecznej Propagacji Błędu

Uczenie sieci jednokierunkowej, wielowarstwowej metodą wstecznej propagacji błędu (ang. *error backpropagation*)

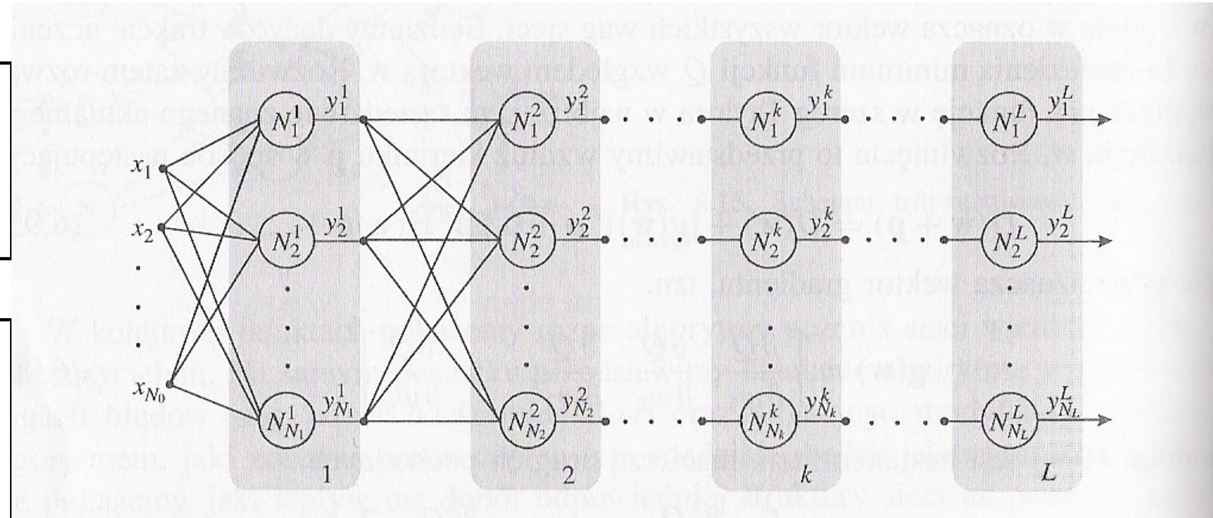
Podajemy na wejście sieci wartości wejściowe ciągu uczącego

↓

Obliczamy wartości wyjściowe kolejno dla wszystkich neuronów od warstwy wejściowej do warstwy wyjściowej

↓

Modyfikujemy wartości wag w sieci, aby wartość wyjściowa sieci była zbliżona do wartości wzorcowej.



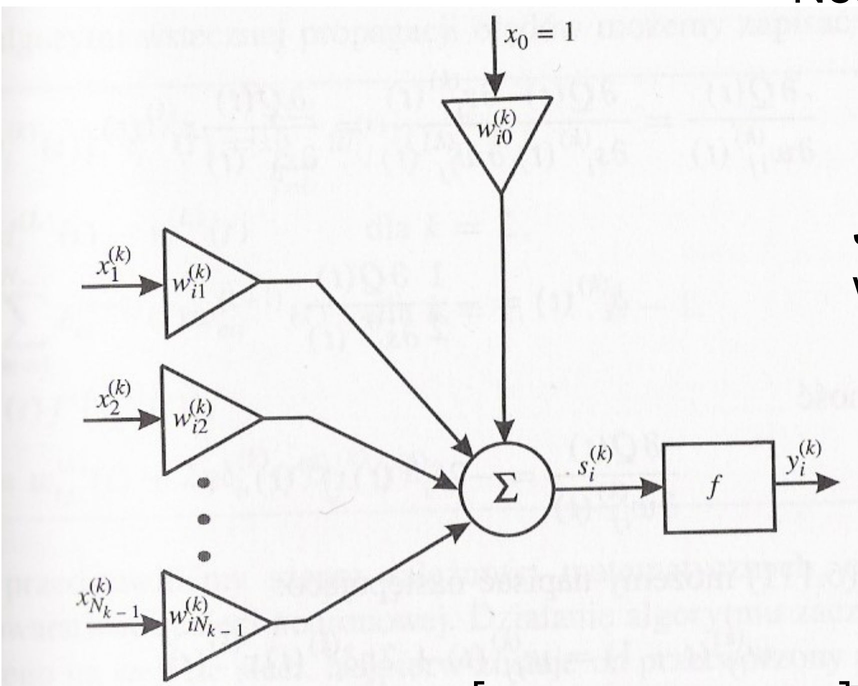
$N_i^k, i = 1, \ldots, N_k$

N_i^k *- neurony sigmoidalne*

$x = \left[x_1(t), \ldots, x_{N_0}(t)\right]^T \quad t = 1, 2, \ldots$ *sygnały wejściowe*

$y_i^{(k)}(t),\ i = 1, \ldots, N_K, k = 1, \ldots, L$ *sygnały wyjściowe*

Model neuronu N_i^k



Neuron posiada k-wejść tworzących wektor:

$$x^k(t) = \left[x_0^k(t), \ldots, x_{N_{k-1}}^k(t)\right]^T$$

Jest on powiązany z sygnałem wyjściowym warstwy (k-1):

$$x_i^k(t) = \begin{cases} x_i(t), & dla\ k = 1 \\ y_i^{k-1}(t), & dla\ k = 2, \ldots, L \\ +1 & dla\ i = 0,\ k = 1, \ldots, L \end{cases}$$

$$w_i^k(t) = \left[w_{i,0}^k(t), \ldots, w_{i,N_{k-1}}^k(t)\right]^T \qquad i = 1, \ldots, N_K, k = 1, \ldots, L$$

Sygnał wyjściowy neuronu w chwili t, t=1,2,… jest określony jako: $y_i^{(k)}(t) = f\left(s_i^k(t)\right)$

gdzie: $s_i^k(t) = \sum_{j=0}^{N_{k-1}} w_{ij}^k(t) x_j^k(t)$ w^k_{ij} - waga i-tego neuronu w warstwie k połączonego z j-tym wejściem. x^k_j – j-te wejście w warstwie k.

Sygnały wyjściowe neuronu: $y_1^L(t), y_2^L, \ldots, y_{N_L}^L(t)$

Sygnały wzorcowe: $d_1^L(t), d_2^L, \ldots, d_{N_L}^L(t)$

Błąd na wyjściu sieci definiujemy następująco: $Q(t)=\sum_{i=1}^{N_L}\left(\varepsilon_i^L\right)^2=\sum_{i=1}^{N_L}\left(d_i^L(t)-y_i^L(t)\right)^2$

Zmiana wag neuronów w sieci będzie następowała zgodnie z regułą największego spadku:

$$w_{ij}^k(t+1)=w_{ij}^k(t)-\eta\frac{\partial Q(t)}{\partial w_{ij}^k(t)}$$

Ponieważ: $\frac{\partial Q(t)}{\partial w_{ij}^k(t)}=\frac{\partial Q(t)}{\partial s_i^k(t)}\cdot\frac{\partial s_i^k(t)}{\partial w_{ij}^k(t)}=\frac{\partial Q(t)}{\partial s_i^k(t)}\cdot x_j^k(t)$

Oznaczając: $\delta_i^k(t)=-\frac{1}{2}\frac{\partial Q(t)}{\partial s_i^k(t)}$

Otrzymujemy: $\frac{\partial Q(t)}{\partial w_{ij}^k(t)}=-2\delta_i^k(t)x_j^k(t)$

$$\boxed{w_{ij}^k(t+1)=w_{ij}^k(t)+2\eta\,\delta_i^k(t)\,x_j^k(t)}$$

Sposób obliczania wartości δ_i^k jest uzależniony od warstwy sieci.

Dla warstwy ostatniej:

$$\delta_i^L(t)=-\frac{1}{2}\frac{\partial Q(t)}{\partial s_i^L(t)}=-\frac{1}{2}\frac{\partial\left(d_i^L(t)-y_i^L(t)\right)^2}{\partial s_i^L(t)}=$$

$$=Q_i^L(t)\frac{\partial y_i^L(t)}{\partial s_i^L(t)}=Q_i^L(t)\,f'\left(s_i^L(t)\right)$$

dla dowolnej warstwy k ≠ L mamy:

$$\delta_i^L(t) = -\frac{1}{2}\frac{\partial Q(t)}{\partial s_i^k(t)} = -\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N_{k+1}} \delta_m^{(k+1)}(t) w_{mi}^{(k+1)}(t) f'\left(s_i^k(t)\right) =$$

$$= f'\left(s_i^k(t)\right) \sum_{m=1}^{N_{k+1}} \delta_m^{(k+1)}(t) w_{mi}^{(k+1)}(t)$$

Błąd w k-tej warstwie (z wyjątkiem ostatniej) dla i-tego neuronu:

$$\varepsilon_i^L(t) = \sum_{m=1}^{N_{k+1}} \delta_m^{(k+1)}(t) w_{mi}^{(k+1)}(t), \quad k = 1, \ldots, L-1$$

Zatem: $\delta_i^k(t) = \varepsilon_i^k(t) f'\left(s_i^k(t)\right)$

Algorytm wstecznej propagacji błędów dla sieci wielowarstwowej, jednokierunkowej

Sygnał wyjściowy:

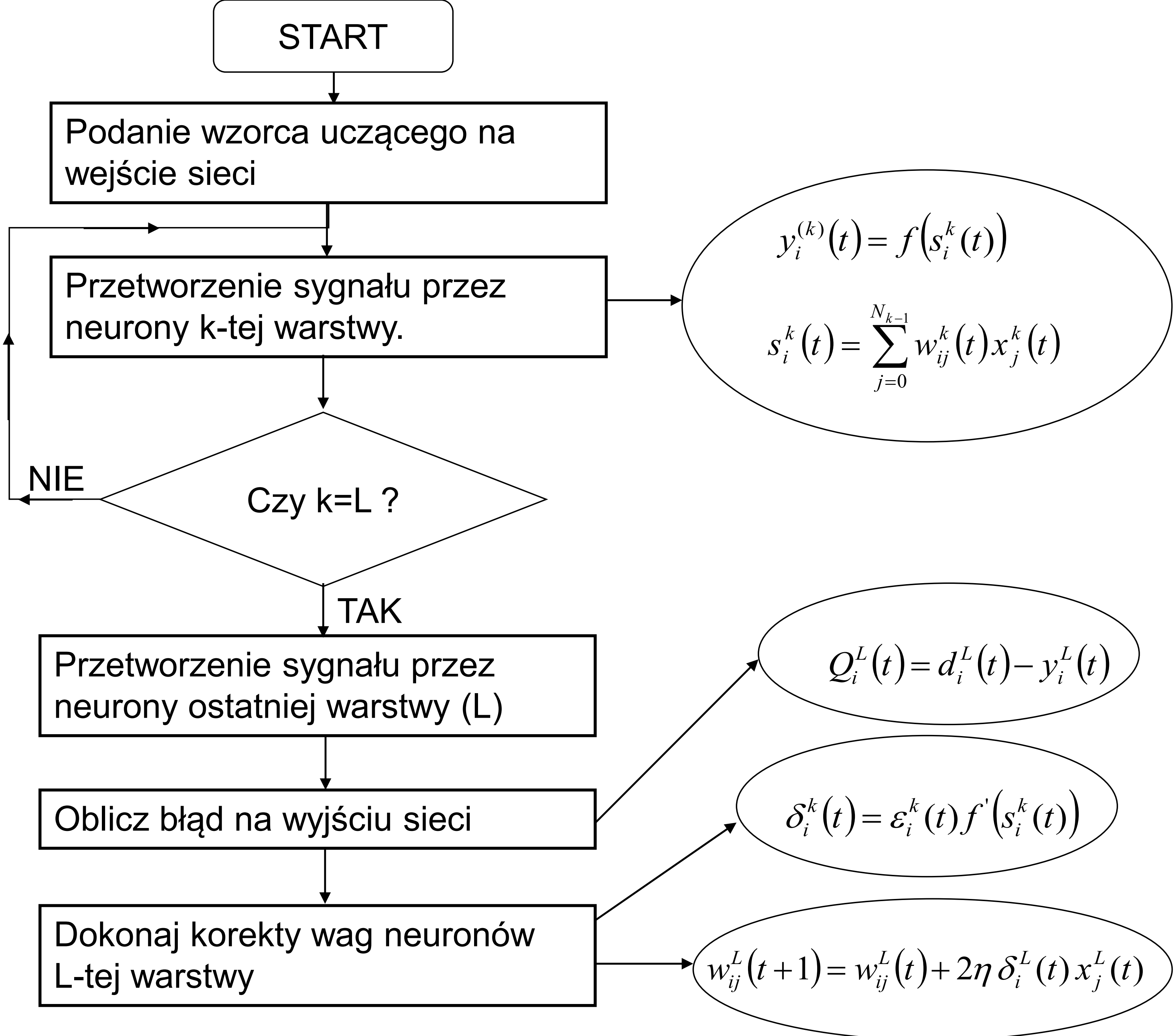
$$y_i^{(k)}(t) = f\left(s_i^k(t)\right) \quad \text{gdzie:} \quad s_i^k(t) = \sum_{j=0}^{N_{k-1}} w_{ij}^k(t)\, x_j^k(t)$$

Miara błędu sieci:

$$Q_i^k(t) = \begin{cases} d_i^L(t) - y_i^L(t) & dla\ \ k = L \\ \sum_{m=1}^{N_{k+1}} \delta_m^{k+1}(t)\, w_{mi}^{(k+1)}(t) & dla\ \ k = 1, \ldots, L-1 \end{cases}$$

$$\delta_i^k(t) = \varepsilon_i^k(t)\, f^{'}\left(s_i^k(t)\right)$$

$$w_{ij}^k(t+1) = w_{ij}^k(t) + 2\eta\, \delta_i^k(t)\, x_j^k(t)$$


START
Podanie wzorca uczącego na wejście sieci
Przetworzenie sygnału przez neurony k-tej warstwy.
$y_i^{(k)}(t) = f\left(s_i^k(t)\right)$
$s_i^k(t) = \sum_{j=0}^{N_{k-1}} w_{ij}^k(t) x_j^k(t)$
Czy k=L ?
NIE
TAK
Przetworzenie sygnału przez neurony ostatniej warstwy (L)
$Q_i^L(t) = d_i^L(t) - y_i^L(t)$
Oblicz błąd na wyjściu sieci
$\delta_i^k(t) = \varepsilon_i^k(t) f'\left(s_i^k(t)\right)$
Dokonaj korekty wag neuronów L-tej warstwy
$w_{ij}^L(t+1) = w_{ij}^L(t) + 2\eta\, \delta_i^L(t)\, x_j^L(t)$

Ponieważ nie znamy wartości δ^k_i dla neuronów warstw ukrytych nie możemy zmodyfikować ich wag. Dlatego błąd wyjściowy jest propagowany „do tyłu”, w kierunku wejścia sieci neuronowej zgodnie z połączeniami neuronów i ich funkcjami aktywacji, zgodnie ze wzorem:

$$Q_i^k(t) = \sum_{m=1}^{N_{k+1}} \delta_m^{k+1}(t) w_{mi}^{(k+1)}(t) \quad dla \;\; k = 1, \ldots, L-1$$