Matematyka Dyskretna

Ćwiczenia

1. Elementy logiki

Zadanie 1.1. Sprawdź bez użycia metody zero-jedynkowej czy podane schematy są tautologiami:

a) $\sim\big((p \Rightarrow r) \vee \sim q\big) \vee (p \Rightarrow \sim(q \wedge \sim r))$
b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Leftrightarrow p)$
c) $(p \vee (\sim r)) \Rightarrow (q \Rightarrow \big((\sim p \vee r) \wedge q\big))$
d) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
e) $((p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)) \Rightarrow (\sim p \vee q)$

Zadanie 1.2. Dla każdego z poniższych twierdzeń: napisz twierdzenie równoważne, wypisz warunek konieczny i wystarczający oraz napisz twierdzenie odwrotne i stwierdź czy jest prawdziwe:

a) $4|x \Longrightarrow 2|x$
b) jeżeli funkcja jest różniczkowalna w punkcie, to jest ciągła w tym punkcie
c) $x^2 + y^2 = 0 \Longrightarrow (x = 0 \wedge y = 0)$

2. Działania na zbiorach

Zadanie 2.1. Udowodnij:

a) $(A \cup B)\backslash C = (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$
b) $A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B) \cup (A \cap C)$
c) $(A\backslash B) \cup C = \big((A \cup C)\backslash B\big) \cup (B \cap C)$
d) $A\backslash(B \cup C) = (A\backslash B)\backslash C$
e) $A \cup (B\backslash C) = \big((A \cup B)\backslash C\big) \cup (A \cap C)$
f) $A\backslash(B\backslash(C\backslash D)) = (A\backslash B) \cup ((A \cap C)\backslash D)$
g) $(A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (A \cup B)\backslash(B \cap A)$

Zadanie 2.2. Wypisz wszystkie elementy zbioru:

a) $A = \{(x, y, z) \in \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}: |x - y| = 1 \wedge z = \max\{x, y\}\}$
b) $B = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2: |a - 1| < 3 \wedge b = \min\{2, a\}\}$
c) $C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \{-1, 0, 1\}^4: |x_1 - x_3| \leq 1, |x_2 + 4| < 4, |x_4 - 2| > 0, x_4 < x_1\}$

3. Rekurencje

Zadanie 3.1. Wyznacz wzór jawny na n-ty wyraz ciągu:

a) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 2^{n-1} \cdot 5 \cdot a_{n-1} \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = \frac{n-1}{n} \cdot a_{n-1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = (-3)^{2n+2} \cdot \sqrt{2} \cdot a_{n-1} \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = \frac{n+1}{n-1} \cdot a_{n-1} \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{(n-1)(n+1)} \end{cases}$

Zadanie 3.2. Wyznacz wzór jawny na n-ty wyraz ciągu:

a) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 5 \\ a_n = -2 \cdot a_{n-1} + 8 \cdot a_{n-2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 8 \\ a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 4 \cdot a_{n-2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = -1 \\ a_n = 9 \cdot a_{n-2} \end{cases}$

Zadanie 3.3. Wyznacz wzór jawny na n-ty wyraz ciągu:

a) $\begin{cases} a_0 = -1 \\ a_1 = 3 \\ a_2 = -2 \\ a_n = -a_{n-1} + 17 \cdot a_{n-2} - 15 \cdot a_{n-3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = -2 \\ a_3 = 2 \\ a_n = -6 \cdot a_{n-1} - 12 \cdot a_{n-2} - 8 \cdot a_{n-3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = -2 \\ a_n = 7 \cdot a_{n-2} - 6 \cdot a_{n-3} \end{cases}$

4. Dowody indukcyjne

Zadanie 4.1. Udowodnij z zasady indukcji matematycznej poprawność wyznaczonych wzorów jawnych z zadania 3.1.

Zadanie 4.2. Udowodnij z zasady indukcji matematycznej, że dla $n \in \mathbb{N}$:

a) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
b) $\sum_{i=1}^{n}(6i-2) = n(3n+1)$
c) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$
d) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\sum_{i=1}^{n} i)^2$

Zadanie 4.3. Udowodnij z zasady indukcji matematycznej, że dla $n \in \mathbb{N}$:

a) $7|(8^n - 1)$
b) $10|(n^5 - n)$
c) $16|(5^n - 4n - 1)$

Zadanie 4.4. Udowodnij, że $2344^{140} - 2344^{20}$ jest wielokrotnością liczby 7.

Zadanie 4.5. Udowodnij z zasady indukcji matematycznej:

a) $2^{n-1} \leq n!$ dla $n \in \mathbb{N}$
b) $2^n > n^2 + n$ dla $n > 4$
c) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n}$ dla $n \geq 2$
d) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{n} - 1$ dla $n \in \mathbb{N}$
e) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$

5. Teoria grafów

Grafy, macierze sąsiedztwa, drogi i cykle Eulera

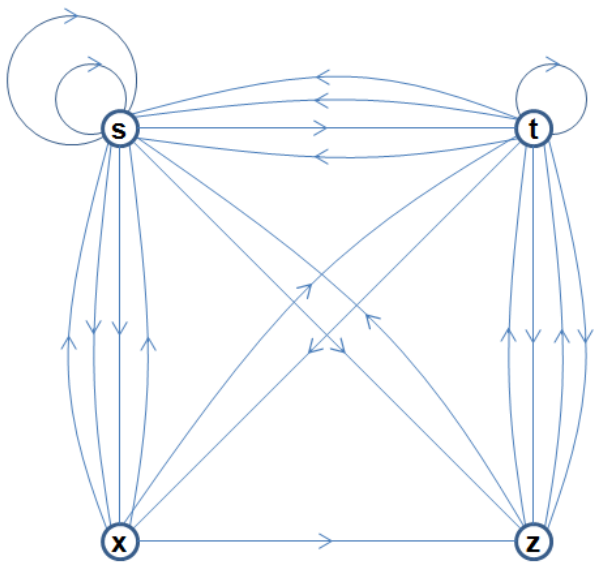
Zadanie 5.1. Niech dany będzie graf G: $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, $E(G) = \{\{v_1, v_3\},$ $\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_1\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_6\}, \{v_4, v_6\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}, \{v_5, v_5\}\}$.
Narysuj ten graf. Wypisz:

a) pętle,
b) trzy drogi,
c) trzy cykle o długości 2,
d) po jednym cyklu o długości 4, 5 i 8,
e) po jednej drodze prostej o długości 3, 4 i 6,
f) po jednym cyklu prostym o długości 2, 5 i 9,

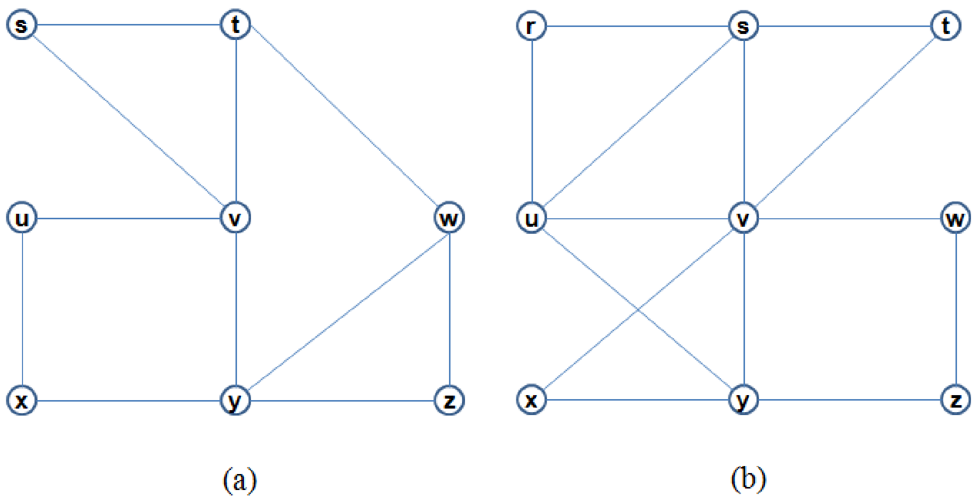
g) stopnie wierzchołków oraz liczby $D(G)$.

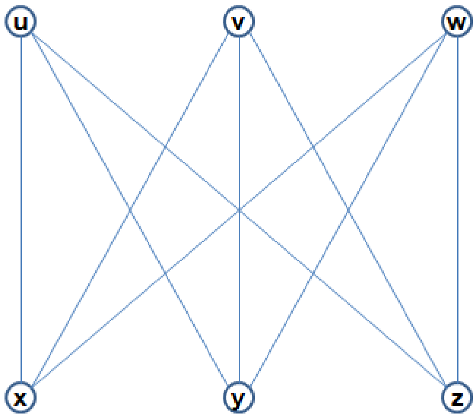
Zadanie 5.2. Niech dany będzie graf G, w którym: $D_1(G) = 4$, $D_3(G) = 2$, $D_4(G) = 4$, $D_5(G) = 2$, $D_6(G) = 4$. Ile krawędzi ma ten graf?

Zadanie 5.3. Podaj ile jest dróg o długości 3 z wierzchołka t do s oraz z x do z poniższego digrafu:

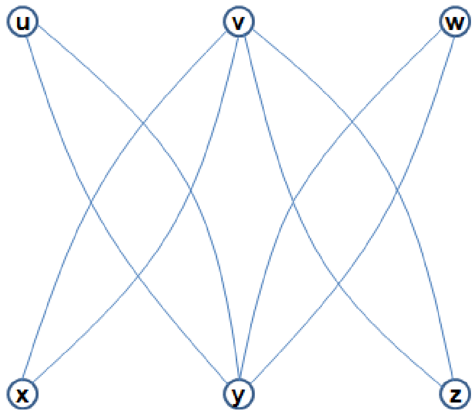


Zadanie 5.4. Które z grafów mają cykle Eulera, a które nie mają i dlaczego? Podaj przykładowy cykl Eulera dla grafów, które je posiadają.



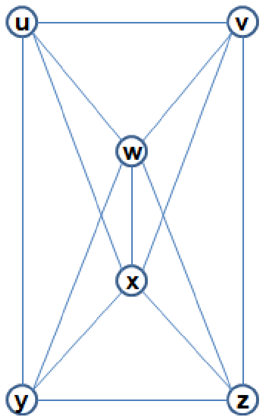


(c)

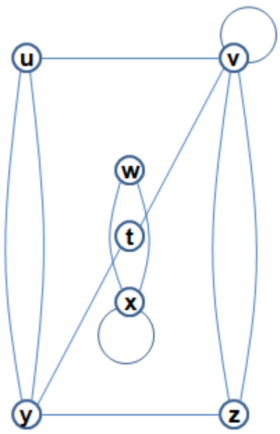


(d)

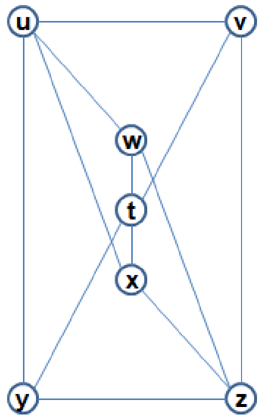
Zadanie 5.5. Które z grafów mają drogi Eulera, a które nie mają i dlaczego? Podaj taką drogę dla grafów, które ją posiadają.



(a)

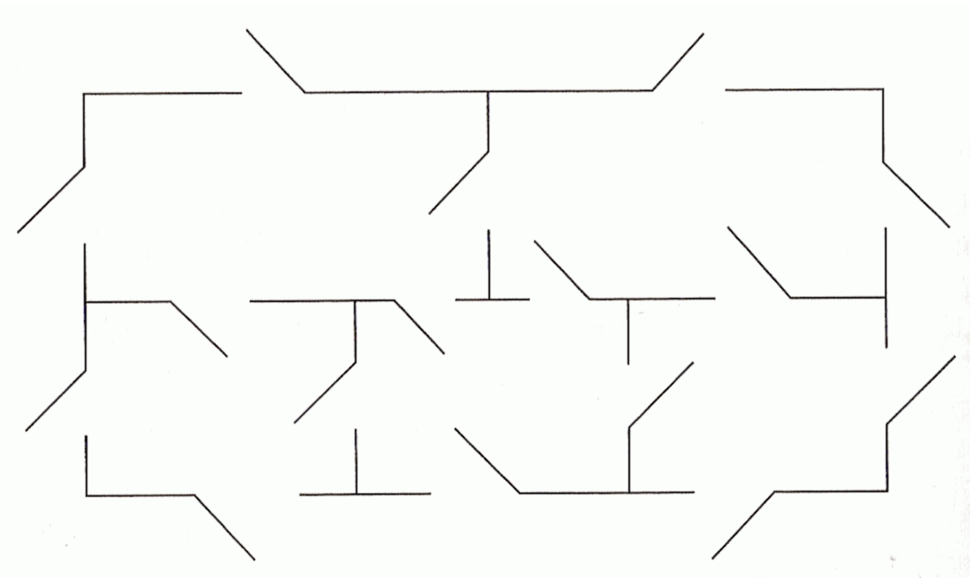


(b)



(c)

Zadanie 5.6. Czy można tak przejść dany dom aby przez każde drzwi przejść dokładnie raz? Odpowiedź uzasadnij. Jak zmieni się odpowiedź, jeśli drzwi między dwoma dużymi pokojami będą zamknięte?



Drzewa, grafy dwudzielne, drogi i cykle Hamiltona

Zadanie 5.7. Narysuj wszystkie drzewa mające 7 wierzchołków z dokładnością do izomorfizmu. Które z nich są drzewami binarnymi? Które z nich są drzewami regularnymi?

Zadanie 5.8. Narysuj wszystkie drzewa regularne o maksymalnie dziewięciu wierzchołkach z dokładnością do izomorfizmu.

Zadanie 5.9. Ile drzew spinających ma graf K_4? Narysuj je wszystkie.

Zadanie 5.10. Pewne drzewo ma 102 wierzchołki stopnia 4, 14 wierzchołków stopnia 3 i 45 wierzchołków stopnia 2. Jeśli pozostałe wierzchołki to liście, to ile wierzchołków jest w tym grafie?

Zadanie 5.11. Narysuj graf o 6 wierzchołkach, który nie jest dwudzielny.

Zadanie 5.12. Narysuj dwa grafy dwudzielne: jeden, który nie jest pełny i drugi, który jest pełny:

a) o 6 wierzchołkach, które nie mają drogi Hamiltona,
b) o 7 wierzchołkach, które mają drogę Hamiltona, ale nie mają cyklu Hamiltona,
c) o 6 wierzchołkach, które mają cykl Hamiltona.

W podpunktach b) i c) wyznacz odpowiednio jedną drogę i jeden cykl Hamiltona.

6. Kombinatoryka

Zadanie 6.1. Ile jest liczb trzycyfrowych podzielnych przez 8 lub 12?

Zadanie 6.2. Ile jest liczb czterocyfrowych podzielnych przez 3 lub 11 lub 12?

Zadanie 6.3. Niech: $A = \{x \in \mathbb{N}: |x - 4| \leq 5\}$, $B = \{y \in \mathbb{Z}: 4 \leq x^2 + (y-2)^2 \leq 26\}$, $C = \{(a, b) \in \{-2, -1, 1, 2\} \times \{-2, -1, 1\}:\ a^2 = b^2\}$. Oblicz liczbę elementów zbioru $A \times B \times C$.

Zadanie 6.4. Na ile sposobów można sześć z dziesięciu osób wpisać na numerowaną listę? Na ile sposobów można ich wszystkich wpisać na numerowaną listę?

Zadanie 6.5. Ile zostanie rozegranych meczów w turnieju szachowym dziesięciu zawodników gdzie każdy gra z każdym dokładnie jeden raz?

Zadanie 6.6. Ile symboli można zakodować w alfabecie $\{\sqcap, \sqcup, \otimes, \star\}$ używając co najwyżej 6 znaków tego alfabetu?

Zadanie 6.7. Na ile sposobów można pomalować czterema kolorami 6 nierozróżnialnych przedmiotów?

Zadanie 6.8. Ile jest dziewięciocyfrowych numerów rozpoczynających się od "609" zawierających dokładnie raz sekwencję "609"?

Zadanie 6.9. Ile jest pięciocyfrowych liczb parzystych, które mają dokładnie dwie cyfry parzyste?

Zadanie 6.10. Ile jest sześciocyfrowych liczb nieparzystych o różnych cyfrach, które mają dokładnie trzy cyfry parzyste?

Zadanie 6.11. Na ile sposobów może wysiąść z windy 5 osób, które wsiadły na parterze w dziewięciopiętrowym bloku?

Zadanie 6.12. Ile zespołów liczy liga jeżeli w sezonie letnim rozegrano 120 meczów (każdy grał z każdym dokładnie jeden raz)?

Zadanie 6.13. Na ile sposobów można ustawić litery a, b, c, d, e, f w takiej kolejności by:

a) litery a i b sąsiadowały ze sobą?
b) litery a i b nie sąsiadowały ze sobą?
c) litery a i b sąsiadowały ze sobą, ale litery a i c nie?

Zadanie 6.14. Ile jest możliwych skreśleń sześciu liczb w Lotto?

Zadanie 6.15. Ile jest rezultatów rzutu:

a) trzema nierozróżnialnymi kostkami?

b) trzema rozróżnialnymi kostkami?

Zadanie 6.16. Pewna grupa studencka składa się z 10 mężczyzn i 6 kobiet. Na ile sposobów można ich wpisać na numerowaną listę tak aby lista zawierała:

a) trzech mężczyzn i cztery kobiety?
b) cztery kobiety lub siedmiu mężczyzn?
c) trzy kobiety i dwóch mężczyzn lub dwie kobiety i trzech mężczyzn?

Zadanie 6.17. Znajdź liczbę układów kart w pokerze następujących rodzajów:

a) poker (strit w kolorze),
b) kareta (cztery karty o tej samej wartości),
c) kolor (pięć kart w tym samym kolorze, ale nie poker),
d) trójka (dokładnie trzy karty o tej samej wartości, reszta kart o innych wartościach),
e) para (dokładnie dwie karty o tej samej wartości, reszta kart o innych wartościach).

7. Dyskretna teoria prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo, prawdopodobieństwo warunkowe, niezależność zdarzeń

Zadanie 7.1. W pudełku znajdują się 3 kule białe i 8 kul czarnych. Losowo wyciągamy 2 kule bez zwracania (ze zwracaniem). Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

a) obie kule są białe,
b) obie są czarne,
c) kule są różnych kolorów.

Zadanie 7.2. Ze zbioru $\{1,2,5,6,7,9\}$ losujemy 3 różne cyfry i tworzymy z nich liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy liczbę nieparzystą.

Zadanie 7.3. Pewien program losuje 1000000 razy liczbę całkowitą z przedziału $[1,1000000]$. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosuje co najmniej raz cyfrę 1.

Zadanie 7.4. Rzucamy symetryczną kostką aż do otrzymania szóstki. Oblicz prawdopodobieństwo, że rzucimy:

a) co najmniej 3 razy,
b) parzystą liczbę razy.

Zadanie 7.5. Rzucamy dwiema symetrycznymi kostkami, białą i szarą. Oblicz prawdopodobieństwo, że liczba oczek na szarej kostce jest ≥ 5 pod warunkiem, że:

a) suma wartości na obu kostkach jest równa 9.
b) iloczyn wartości na obu kostkach jest ≥ 20.

Zadanie 7.6. Rzucamy trzema symetrycznymi kostkami. Oblicz prawdopodobieństwo, że na żadnej kostce nie wypadła szóstka, jeśli na każdej kostce wypadła inna liczba oczek.

Zadanie 7.7. Rzucamy 4 razy symetryczną monetą. Niech A oznacza zdarzenie: "w pierwszych dwóch rzutach dokładnie raz wypadł orzeł", B oznacza: "w czterech rzutach orzeł wypadł dokładnie dwa razy". Czy zdarzenia A i B są niezależne? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 7.8. Zdarzenia A i B są niezależne oraz $P(B \setminus A) = 0{,}36$ i $P(A \setminus B) = 0{,}16$. Oblicz: $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B)$, $P(A \cup B)$, $P(A' \cup B)$.

Prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa, zmienna losowa

Zadanie 7.9. W pierwszej urnie są 3 kule białe i 2 czarne, a w drugiej urnie są 4 czarne i 1 biała. Rzucamy kostką. Jeżeli wypadnie mniej niż 5 oczek, to losujemy kulę z pierwszej urny, jeżeli wypadnie 5 lub 6 oczek, to losujemy kulę z drugiej urny. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej. Oblicz prawdopodobieństwo, że na kostce wypadło mniej niż 5 oczek, jeśli wiadomo, że wylosowaliśmy kulę czarną.

Zadanie 7.10. W komodach A, B i C są po dwie szuflady. W każdej szufladzie jest jedna moneta, przy czym w komodzie A są monety złote, w komodzie C są monety srebrne, a w komodzie B jest jedna moneta srebrna i jedna moneta złota. Wylosowano komodę, następnie szufladę i znaleziono tam monetę złotą. Oblicz prawdopodobieństwo, że w drugiej szufladzie jest moneta złota.

Zadanie 7.11. W urnie są 3 kule białe i 2 kule czarne. Wyciągnięto jedną kulę z urny i wyrzucono bez oglądania, a potem wyciągnięto następną. Oblicz prawdopodobieństwo, że za drugim razem wyciągnięto kulę białą.

Zadanie 7.12. W mieście działają dwa przedsiębiorstwa taksówkowe: Zielone Taxi (85% samochodów) i Niebieskie Taxi (15% samochodów). Świadek nocnego wypadku zakończonego ucieczką kierowcy twierdzi, że to była niebieska taksówka. Eksperymenty wykazały, że świadek rozpoznaje kolor poprawnie w 80% przypadków, a myli się w 20% przypadków. Oblicz prawdopodobieństwo, że w wypadku rzeczywiście uczestniczyła niebieska taksówka.

Zadanie 7.13. Rzucono dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami. Rozważmy następujące zmienne losowe: $D(k,l) = |k-l|$ oraz $M(k,l) = max\{k,l\}$.

a) Znajdź zbiory wartości zmiennych D i M.
b) Podaj rozkłady prawdopodobieństwa zmiennych D i M.
c) Oblicz $P(D \leq 1)$, $P(M \geq 2)$, $P(|D-2| < 1)$, $P(|M-3| \geq 2)$, $P(D \leq 1, M \geq 6)$, $P(D = 0, M = 1)$.
d) Czy zmienne losowe D i M są niezależne?

Zadanie 7.14. Gracz wyciąga 2 karty spośród 52. Jeśli wyciągnie dwa asy, wygrywa 1000 zł, jeśli wyciągnie tylko jednego asa wygrywa 10 zł. Przy każdym innym układzie nic nie wygrywa. Znajdź rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej Z oznaczającej zysk gracza, jeśli gracz za udział w grze płaci 5 zł.

Zadanie 7.15. Uzupełnij poniższą tabelę i stwierdź czy zmienne losowe X i Y są niezależne:

$Y(\Omega)$	$X(\Omega)$			$P(Y=l)$
	1	2	4	
-1		0,08		0,4
1	0,42	0,12		
$P(X=k)$			0,1	

Dystrybuanta, wartość oczekiwana, odchylenie standardowe

Zadanie 7.16. W urnie znajduje się 5 kul białych i 2 kule niebieskie. Wybieramy losowo 3 kule bez zwracania. Znajdź rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X, która oznacza liczbę wylosowanych kul białych. Zdefiniuj dystrybuantę i narysuj jej wykres.

Zadanie 7.17. Niech X oznacza liczbę rzutów z zadania 6.4. Znajdź rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X oraz zdefiniuj jej dystrybuantę. Oblicz $P(X<50)$, $P(X\leq 60)$, $P(X>100)$, $P(X\geq 100)$, $P(200\leq X\leq 300)$, $P(100\leq X<250)$.

Zadanie 7.18. Niech X będzie pewną zmienną losową o wartościach naturalnych. Ustal wartość m, dla której $P(X=n)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{m^{n-1}}, n\in\mathbb{N}$. Podaj przykład takiej zmiennej losowej.

Zadanie 7.19. Pewna gra polega na pięciokrotnym rzucie monetą. Jeśli gracz wyrzuci 5 razy orła lub reszkę wygrywa 10 zł, jeśli wyrzuci na przemian orła i reszkę wygrywa 6 zł. Oblicz opłatę jaką powinien pobierać prowadzący grę aby interes był dla niego opłacalny.

Zadanie 7.20. Znajdź wartości oczekiwane i odchylenia standardowe zmiennych losowych D i M z zadania 6.13.

Zadanie 7.21. Dystrybuanta zmiennej losowej X ma postać:

$$F_X(k)=\begin{cases} 0\ dla\ k\in(-\infty,-1) \\ 0{,}15\ dla\ k\in[-1{,}3) \\ 0{,}25\ dla\ k\in[3{,}7) \\ 0{,}4\ dla\ k\in[7{,}10) \\ 0{,}85\ dla\ k\in[10{,}15) \\ 1\ dla\ k\in[15,\infty) \end{cases}$$

Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X. Oblicz $E(X)$ oraz $D(X)$.

Rozkłady dyskretne (dwumianowy, geometryczny i Poissona)

Zadanie 7.22. Oblicz średnią liczbę króli przy losowaniu ze zwracaniem 5 kart z talii 52 kart.

Zadanie 7.23. Rzucamy symetryczną sześcienną kostką aż do momentu wyrzucenia czterech oczek. Oblicz średnią liczbę rzutów.

Zadanie 7.24. Student opanował 60% materiału. Oblicz prawdopodobieństwo, że zda on egzamin, jeśli dostaje 5 pytań i aby zdać, musi na co najmniej 4 odpowiedzieć poprawnie.

Zadanie 7.25. Pewne urządzenie produkuje części do drukarki. Prawdopodobieństwo awarii urządzenia w przeciągu jednej doby wynosi 0,04. Oblicz prawdopodobieństwo, że urządzenie będzie pracowało bezawaryjnie co najmniej dwa tygodnie. Oblicz średnią liczbę dni jaką przepracuje bezawaryjnie urządzenie. Oblicz odchylenie standardowe tej liczby dni.

Zadanie 7.26. Prawdopodobieństwo wyprodukowania wadliwej pary obuwia przez zakład X wynosi 0,06. Oblicz prawdopodobieństwo, że klient, który zakupił hurtowo 20 par butów produkowanych przez firmę X, będzie reklamował dokładnie 2 pary butów.

Zadanie 6.27. Program losuje liczbę całkowitą z przedziału $[1,100]$ do momentu aż wylosuje cyfrę 100. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowany ciąg liczb będzie miał długość mniejszą niż 5.

Zadanie 7.28. Podręcznik wydano w nakładzie 5000 egzemplarzy. Prawdopodobieństwo wadliwego oprawienia podręcznika jest równe 0,001. Oblicz prawdopodobieństwo, że w tym nakładzie pojawią się co najmniej 3 wadliwie oprawione podręczniki.

Zadanie 6.29. Ile średnio rodzynków zawiera ciasto jeśli z prawdopodobieństwem 0,99 ciasto zawiera co najmniej 1 rodzynek? Wiadomo, że prawdopodobieństwo p znalezienia się każdego z $n = 1000$ rodzynków w cieście jest mniejsze niż 0,01 i $np \in (1,10)$.

8. Powtórzenie

Zadanie 8.1. Sprawdź bez użycia metody zero-jedynkowej czy schemat jest tautologią:

$$\big((q \Rightarrow r) \wedge p\big) \vee (p \Rightarrow \sim r)$$

Zadanie 8.2. Udowodnij, że $(A \cup B)\backslash A = B\backslash(A \cap B)$.

Zadanie 8.3. Narysuj 6 drzew binarnych o 8 wierzchołkach z dokładnością do izomorfizmu.

Zadanie 8.4. Znajdź wzór jawny na n-ty wyraz ciągu:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -1 \\ a_n = -a_{n-1} + 6 \cdot a_{n-2} \end{cases}$$

Zadanie 8.5. Udowodnij z zasady indukcji matematycznej:

$$\sum_{i=0}^{n} 4^i = \frac{4^{n+1}-1}{3} \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

Zadanie 8.6. Udowodnij z zasady indukcji matematycznej:

$$n! > 5^{n-2} \text{ dla } n \geq 6, n \in \mathbb{N}$$

Zadanie 8.7. Na ile sposobów można rozmieścić 7 kul w trzech urnach, tak aby w każdej urnie były co najmniej po 2 kule?

Zadanie 8.8. Komputer losuje 6 cyfr. Oblicz prawdopodobieństwo, że utworzony w ten sposób numer będzie parzysty, jeśli wiadomo, że wylosował dokładnie trzy cyfry 1 pod rząd.

Zadanie 8.9. $X \sim B(14, \frac{3}{7})$. Oblicz $E(X)$ oraz $E(X^2)$.

9. Zadania dodatkowe

Zadanie 9.1. Na ile sposobów można wylosować dwie pary w pokerze (52 karty)?

Zadanie 9.2. Na ile sposobów może 7 osób wysiąść z autobusu na dziesięciu przystankach?

Zadanie 9.3. Na ile sposobów można pomalować 8 przedmiotów siedmioma kolorami, jeśli:

a) przedmioty są rozróżnialne?
b) przedmioty nie są rozróżnialne?

Zadanie 9.4. Wadliwość w firmie A produkującej pewien wyrób wynosi 0,08, a w firmie B produkującej taki sam wyrób wynosi 0,1. W magazynie 40% wyrobów jest z firmy A, reszta z firmy B. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany wyrób jest dobry.

Zadanie 9.5. Pewna drużyna futbolowa rozgrywa 70% meczów po południu, a 30% późnym wieczorem. Wiadomo ponadto, że wygrywa 50% meczów popołudniowych i 90% wieczornych. Drużyna wygrała mecz. Oblicz prawdopodobieństwo, że był to mecz grany późnym wieczorem.

Zadanie 9.6. Z talii 52 kart wybrano losowo 5 kart. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród wybranych kart będą:

a) dokładnie 3 asy,
b) co najwyżej 2 asy,
c) dokładnie 2 asy i dokładnie 2 króle.

Zadanie 9.7. Rzucamy jednocześnie dwoma symetrycznymi monetami, aż do otrzymania dokładnie dwóch reszek. Oblicz prawdopodobieństwo, że rzucimy co najmniej 4 razy. Oblicz prawdopodobieństwo, że zakończymy rzuty rzutem nieparzystym.

Zadanie 9.8. Niech $P(A \cap B) = 0{,}08$, $P(A') = 0{,}6$, $P(B \setminus A) = 0{,}1$. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

Zadanie 9.9. Rzucono dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami. Rozważmy następującą zmienną losową: $M(k, l) = min\{k, l\}$.

a) Znajdź zbiór wartości zmiennej losowej M.
b) Podaj rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej M.

c) Zdefiniuj i narysuj dystrybuantę zmiennej losowej M.
d) Oblicz $P(M \geq 3)$, $P(|M-4| < 2)$.

Zadanie 9.10. Oblicz wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe zmiennej losowej M z zadania 9.9.

Zadanie 9.11. Ile trzeba losować kart z talii 52 (ze zwracaniem), aby oczekiwana liczba króli wynosiła 2?

Zadanie 9.12. Niech dany będzie graf G: $V(G) = \{u, v, w, y, x, z\}, E(G) = \{\{u, w\}, \{w, w\}, \{w, x\}, \{x, y\}, \{y, y\}, \{y, v\}, \{v, x\}, \{x, v\}\}$. Czy graf ten ma cykl Eulera? Czy graf ten ma drogę Eulera? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 9.13. Wylosowano pięciocyfrowy numer. Oblicz prawdopodobieństwo, że zawiera on dokładnie dwie cyfry 2, jeśli wiadomo, że na przedostatniej pozycji znajduje się cyfra 1.

Zadanie 9.14. Która zmienna losowa ma mniejsze odchylenie standardowe jeśli $P(X=1)=0{,}25$, $P(X=2)=0{,}2$, $P(X=4)=0{,}4$, $P(X=-1)=0{,}15$, $P(M=0)=0{,}25$, $P(M=2)=0{,}25$, $P(M=3)=0{,}35$, $P(M=-2)=0{,}15$.

Zadanie 9.15. Gra polega na trzykrotnym rzucie symetryczną kostką. Jeśli gracz wyrzuci 3 razy szóstkę wygrywa 100 zł wraz ze stawką, jeśli dokładnie 2 razy wyrzuci szóstkę to wygrywa 10 zł wraz ze stawką. W przeciwnym wypadku przegrywa stawkę. Oblicz wysokość stawki, aby gra była sprawiedliwa.

Zadanie 9.16. Losujemy 4 karty z talii 52 kart (bez zwracania). Niech zmienna losowa X oznacza liczbę wylosowanych asów. Oblicz $E(X)$ oraz $D(X)$.

Zadanie 9.17. Losujemy 4 karty z talii 52 kart (ze zwracaniem). Niech zmienna losowa X oznacza liczbę wylosowanych asów. Oblicz $E(X)$ oraz $D(X)$.

Zadanie 9.18. Dystrybuanta zmiennej losowej dyskretnej X ma postać:

$$F_X(k) = \begin{cases} 0 \; dla \; k < -1 \\ \frac{1}{3} \; dla -1 \leq k < 1 \\ \frac{2}{5} \; dla \; 1 \leq k < 2 \\ \frac{2}{3} \; dla \; 2 \leq k < 4 \\ 1 \; dla \; k \geq 4 \end{cases}$$

Znajdź rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X, oblicz wartość oczekiwaną oraz odchylenie standardowe.

Zadanie 9.19. $X \sim B(10, \frac{1}{6})$. Oblicz $P(|X-3| \leq 1)$.

Zadanie 9.20. Zbuduj graf mający zbiór wierzchołków $\{0{,}1\} \times \{0{,}1\} \times \{0{,}1\}$, w którym wierzchołki *v* i *w* są połączone krawędzią, jeśli ciągi *v* i *w* różnią się na dokładnie jednej współrzędnej. Czy ten graf ma cykl Eulera? Czy ten graf ma drogę Eulera? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 9.21. Rzucamy monetą tak długo, aż upadnie 2 razy z rzędu na tę samą stronę. Znaleźć prawdopodobieństwo następujących zdarzeń:

a) doświadczenie zakończy się nie później niż przy szóstym rzucie,
b) potrzebna będzie parzysta liczba rzutów.

Zadanie 9.22. Na kartce egzaminacyjnej jest 5 pytań z trzema możliwymi odpowiedziami. Należy wybrać jedną poprawną odpowiedź na każde pytanie. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie 4 poprawnych odpowiedzi, jeżeli egzaminowany odpowiedzi zgaduje.

Zadanie 9.23. Na strzelnicy jest 5 karabinów. Prawdopodobieństwa trafienia nimi do celu są odpowiednio równe: 50%, 60%, 70%, 80%, 90%. Oblicz prawdopodobieństwo trafienia do celu przy jednym strzale, jeżeli strzelec losowo wybiera karabin.

Zadanie 9.24. Wiadomo, że z trzech niezależnie pracujących elementów urządzenia, dwa zawiodły. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że zawiodły element pierwszy i drugi, jeśli prawdopodobieństwa awarii pierwszego, drugiego i trzeciego elementu są odpowiednio równe: 20%, 40%, 30%.

Zadanie 9.25. Gracz dostał 13 kart z 52, obejrzał 8 z nich i stwierdził, że nie ma asa. Oblicz prawdopodobieństwo, że w ogóle nie ma asa.

Zadanie 9.26. Gra polega na zarzucaniu krążków na kołek. Gracz otrzymuje 6 krążków i rzuca je aż do pierwszego celnego rzutu. Znaleźć prawdopodobieństwo, że po zarzuceniu krążka na kołek zostanie graczowi co najmniej jeden krążek, jeżeli prawdopodobieństwo trafienia na kołek przy każdym rzucie jest równe $0{,}1$.

Zadanie 9.27. Narysuj wszystkie drzewa regularne o jedenastu wierzchołkach z dokładnością do izomorfizmu.

Zadanie 9.28. Narysuj wszystkie drzewa binarne nieregularne o siedmiu wierzchołkach z dokładnością do izomorfizmu.

Zadanie 9.29. Udowodnij:

a) $(A\backslash B) \cap (C\backslash D) = (A \cap C)\backslash(B \cup D)$
b) $(A\backslash C) \cup (C\backslash B) = ((A \cup C)\backslash(B\backslash A))\backslash(B \cap C)$

Zadanie 9.30. Ile jest liczb naturalnych ośmiocyfrowych, których suma cyfr jest równa 4?

Zadanie 9.31. Ile jest liczb dziewięciocyfrowych, w których suma każdych trzech kolejnych cyfr jest równa 10?

Zadanie 9.32. Na ile sposobów można rozmieścić 6 kul w pięciu szufladach tak, aby w każdej szufladzie była przynajmniej jedna kula?

Zadanie 9.33. Ile jest permutacji zbioru $\{a, A, b, B, c, C, d, D, e, E\}$ takich, w których mała litera stoi przed wielką literą (niekoniecznie obok, np. $(c, a, b, B, e, A, C, E, d, D)$)?

Zadanie 9.34. Oblicz ile jest dziewięciocyfrowych liczb naturalnych parzystych, w zapisie których każda z cyfr 5 i 3 występuje dokładnie 3 razy.

Zadanie 9.35. Czy jest możliwe, aby owad poruszający się wzdłuż krawędzi sześcianu przeszedł każdą krawędź dokładnie raz? Odpowiedź poprzyj odpowiednim rysunkiem grafu.

Zadanie 9.36. Udowodnij z zasady indukcji matematycznej:

a) $\sum_{i=1}^{n}(4i-3) = n(2n-1)$ dla $n \in \mathbb{N}$
b) $6|(n^3-n)$ dla $n \in \mathbb{N}$
c) $2^n > 2n+1$ dla $n > 2$

Odpowiedzi do zadań dodatkowych

Zadanie 9.1. $\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{11}{1}\binom{4}{1}$

Zadanie 9.2. 10^7

Zadanie 9.3. a) 7^8, b) $|K_7^8|$

Zadanie 9.4. $0{,}908$

Zadanie 9.5. $\approx 0{,}435$

Zadanie 9.6. a) $\frac{|C_4^3||C_{48}^2|}{|C_{52}^5|}$, b) $\frac{|C_{48}^5|+|C_4^1||C_{48}^4|+|C_4^2||C_{48}^3|}{|C_{52}^5|}$, c) $\frac{|C_4^2||C_4^2||C_{44}^1|}{|C_{52}^5|}$

Zadanie 9.7. $\frac{27}{64}, \frac{4}{7}$

Zadanie 9.8. nie

Zadanie 9.9. a) $M(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$, b) $P(M=1) = \frac{11}{36}, P(M=2) = \frac{9}{36}, P(M=3) = \frac{7}{36}, P(M=4) = \frac{5}{36}, P(M=5) = \frac{3}{36}, P(M=6) = \frac{1}{36}$, d) $\frac{16}{36}, \frac{15}{36}$

Zadanie 9.10. $E(M) = \frac{91}{36}, D(M) = \sqrt{\frac{2555}{36^2}}$

Zadanie 9.11. 26

Zadanie 9.12. nie ma cyklu Eulera, ani drogi Eulera (nie jest spójny)

Zadanie 9.13. $\frac{486}{10000}$

Zadanie 9.14. $M\ (D(M) \approx 1{,}785, D(X) \approx 1{,}786)$

Zadanie 9.15. 1,25 zł

Zadanie 9.17. $E(X) = \frac{4}{13}, D(X) = \sqrt{\frac{48}{169}}$

Zadanie 9.18. $P(X = -1) = \frac{1}{3}, P(X = 1) = \frac{1}{15}, P(X = 2) = \frac{4}{15}, P(X = 4) = \frac{1}{3}, E(X) = \frac{24}{15},$
$D(X) = \sqrt{\frac{102}{15} - \left(\frac{24}{15}\right)^2}$

Zadanie 9.19. $\binom{10}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^8 + \binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7 + \binom{10}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^6$

Zadanie 9.20. Graf nie ma cyklu Eulera i nie ma drogi Eulera

Zadanie 9.21. a) $\frac{31}{32}$, b) $\frac{2}{3}$

Zadanie 9.22. $\binom{5}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4 \frac{2}{3}$

Zadanie 9.23. 0,7

Zadanie 9.24. $\approx 0{,}298$

Zadanie 9.25. $\frac{\binom{40}{5}}{\binom{44}{5}}$

Zadanie 9.26. $1 - (0{,}9)^5 \cdot 0{,}1 - (0{,}9)^6 \approx 0{,}410$

Zadanie 9.30. 120

Zadanie 9.31. 18 (z jednym zerem) + 12 (bez zera, dwie takie same) + 24 (bez zera, wszystkie różne) = 54

Zadanie 9.32. 5 (wybór szuflady z dwoma kulami) · $\binom{6}{2}$ (wybór dwóch kul do wybranej szuflady) · 4! (ułożenie pozostałych kul w 4 szufladach) = 1800

Zadanie 9.33. $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 113400$

Zadanie 9.34. 39200 (bez 3 i 5 na początku) + 67200 (z 3 na początku) + 67200 (z 5 na początku) = 173600