Matematyka Dyskretna

3. Rekurencje

Rekurencja (**rekursja**) to odwoływanie się pojęcia (np. funkcji lub definicji) do samego siebie.

W informatyce rekurencja jest sposobem rozwiązania problemu przez zastosowanie algorytmu rekurencyjnego. Jego realizacją są obliczenia, w których wydzielony podprogram wywołuje sam siebie. Rekurencja jest stosowana w efektywnych algorytmach sortowania, między innymi w quicksort.

Przyjmujemy, że $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Ciąg jest zdefiniowany rekurencyjnie, jeśli:

(P) – określony jest pewien skończony zbiór wyrazów ciągu, zazwyczaj kilka pierwszych lub pierwszy wyraz,

(R) – pozostałe wyrazy ciągu są zdefiniowane za pomocą poprzednich wyrazów ciągu.

Ciąg arytmetyczny:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r \end{cases}$$

Ciąg geometryczny:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} \cdot q \end{cases}$$

Ciąg liczb harmonicznych $\{H_n\}$:

$$\begin{cases} H_1 = 1 \\ H_{n+1} = H_n + \dfrac{1}{n+1} \; dla\, n \geq 1 \end{cases}$$

Ciąg Fibonacciego:

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

Początkowe wyrazy ciągu Fibonacciego:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,…

Tożsamość Cassiniego:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \ dla\, n > 0$$

Np. dla n=4   mamy $5*2-3^2=1$

F_{kn} jest wielokrotnością F_n dla wszystkich liczb całkowitych k oraz n.

Np. dla k=2, n=4 $F_{kn} = 21,\ \ F_n$=3, Liczby Lucasa określone są w następujący sposób:

$$\begin{cases} L_1 = 2 \\ L_2 = 1 \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \; dla \; n \geq 3 \end{cases}$$

Liczby Lucasa można przedstawić jako sumy liczb Fibonacciego $L_n = F_n + F_{n-2} \; dla \; n \geq 2,$

Inne zależności:

$$L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n$$

$$5F_{n-1} = L_{n-1} - L_{n+1}$$

$$F_{2n} = F_n L_{n+1}$$

Wyprowadź wzór jawny na podstawie wzoru rekurencyjnego ciągu arytmetycznego:

$$\begin{cases} a_1 = \dots \\ a_n = a_{n-1} + r \end{cases}$$

$$a_n = a_{n-1} + r$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + r$$

$$a_{n-2} = a_{n-3} + r$$

$$a_n = a_{n-1} + r$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + r$$

$$a_{n-2} = a_{n-3} + r$$

$$a_n = a_{n-1} + r$$

$$a_n = a_{n-1} + r$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + r$$

$$a_{n-2} = a_{n-3} + r$$

$$a_n = a_{n-1} + r$$

$$a_n = a_{n-2} + r + r$$

$$a_n = a_{n-1} + r$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + r$$

$$a_{n-2} = a_{n-3} + r$$

$$a_n = a_{n-1} + r$$

$$a_n = a_{n-2} + r + r$$

$$a_n = a_{n-3} + r + r + r$$

$$a_n = a_{n-1} + r$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + r$$

$$a_{n-2} = a_{n-3} + r$$

$$a_n = a_{n-1} + r$$

$$a_n = a_{n-2} + r + r$$

$$a_n = a_{n-3} + r + r + r$$

$$a_n = a_1 + r + r + \cdots + r$$

$$a_n = a_{n-1} + r$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} + r$$

$$a_{n-2} = a_{n-3} + r$$

$$a_n = a_{n-1} + r$$

$$a_n = a_{n-2} + r + r$$

$$a_n = a_{n-3} + r + r + r$$

$$a_n = a_1 + r + r + \cdots + r$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Ciąg arytmetyczny – wzór jawny:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Wyprowadź wzór jawny na podstawie wzoru rekurencyjnego ciągu geometrycznego:

$$\begin{cases} a_1 = \ldots \\ a_n = a_{n-1} \cdot q \end{cases}$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} \cdot q$$

$$a_{n-2} = a_{n-3} \cdot q$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} \cdot q$$

$$a_{n-2} = a_{n-3} \cdot q$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} \cdot q$$

$$a_{n-2} = a_{n-3} \cdot q$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

$$a_n = a_{n-2} \cdot q \cdot q$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} \cdot q$$

$$a_{n-2} = a_{n-3} \cdot q$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

$$a_n = a_{n-2} \cdot q \cdot q$$

$$a_n = a_{n-3} \cdot q \cdot q \cdot q$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} \cdot q$$

$$a_{n-2} = a_{n-3} \cdot q$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

$$a_n = a_{n-2} \cdot q \cdot q$$

$$a_n = a_{n-3} \cdot q \cdot q \cdot q$$

$$a_n = a_1 \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

$$a_{n-1} = a_{n-2} \cdot q$$

$$a_{n-2} = a_{n-3} \cdot q$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

$$a_n = a_{n-2} \cdot q \cdot q$$

$$a_n = a_{n-3} \cdot q \cdot q \cdot q$$

$$a_n = a_1 \cdot q \cdot q \cdot \ldots \cdot q$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Ciąg geometryczny – wzór jawny:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Znajdź wzór jawny na n-ty wyraz ciągu:

$$\begin{cases} P_0 = 0 \\ P_{n+1} = P_n + n + 1 \; dla \; n \geq 1 \end{cases}$$

Metoda, dzięki której można rozwiązać to konkretne równanie, to jego rozwinięcie, czyli cofanie się w rekursji:

$P_n = P_{n-1} + n-1 +1 = P_{n-2} + (n-1) + n = \ldots = P_0 + (1+2+ \ldots +n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Otrzymany wzór ma postać zamkniętą lub zwartą, czyli jest określony przez stałą liczbę operacji arytmetycznych, niezależnych od wskaźnika n.

Znajdź wzór jawny na n-ty wyraz ciągu:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = (-3)^{n+2} \cdot 2^{2n-4} \cdot 4 \cdot a_{n-1} \end{cases}$$

$$a_n = (-3)^{n+2} \cdot 2^{2n-4} \cdot 4 \cdot a_{n-1}$$

$$a_n = (-3)^{n+2} \cdot 2^{2n-4} \cdot 4 \cdot a_{n-1}$$

$$a_{n-1} = (-3)^{(n-1)+2} \cdot 2^{2(n-1)-4} \cdot 4 \cdot a_{(n-1)-1}$$

$$a_n = (-3)^{n+2} \cdot 2^{2n-4} \cdot 4 \cdot a_{n-1}$$

$$a_{n-1} = (-3)^{(n-1)+2} \cdot 2^{2(n-1)-4} \cdot 4 \cdot a_{(n-1)-1}$$

$$a_{n-1} = (-3)^{n+1} \cdot 2^{2n-6} \cdot 4 \cdot a_{n-2}$$

$$a_n = (-3)^{n+2} \cdot 2^{2n-4} \cdot 4 \cdot a_{n-1}$$

$$a_{n-1} = (-3)^{(n-1)+2} \cdot 2^{2(n-1)-4} \cdot 4 \cdot a_{(n-1)-1}$$

$$a_{n-1} = (-3)^{n+1} \cdot 2^{2n-6} \cdot 4 \cdot a_{n-2}$$

$$a_{n-2} = (-3)^{(n-2)+2} \cdot 2^{2(n-2)-4} \cdot 4 \cdot a_{(n-2)-1}$$

$$a_n = (-3)^{n+2} \cdot 2^{2n-4} \cdot 4 \cdot a_{n-1}$$

$$a_{n-1} = (-3)^{(n-1)+2} \cdot 2^{2(n-1)-4} \cdot 4 \cdot a_{(n-1)-1}$$

$$a_{n-1} = (-3)^{n+1} \cdot 2^{2n-6} \cdot 4 \cdot a_{n-2}$$

$$a_{n-2} = (-3)^{(n-2)+2} \cdot 2^{2(n-2)-4} \cdot 4 \cdot a_{(n-2)-1}$$

$$a_{n-2} = (-3)^{n} \cdot 2^{2n-8} \cdot 4 \cdot a_{n-3}$$

$$a_n = (-3)^{n+2} \cdot 2^{2n-4} \cdot 4 \cdot a_{n-1}$$

$$a_{n-1} = (-3)^{(n-1)+2} \cdot 2^{2(n-1)-4} \cdot 4 \cdot a_{(n-1)-1}$$

$$a_{n-1} = (-3)^{n+1} \cdot 2^{2n-6} \cdot 4 \cdot a_{n-2}$$

$$a_{n-2} = (-3)^{(n-2)+2} \cdot 2^{2(n-2)-4} \cdot 4 \cdot a_{(n-2)-1}$$

$$a_{n-2} = (-3)^{n} \cdot 2^{2n-8} \cdot 4 \cdot a_{n-3}$$

$$a_2 = (-3)^{2+2} \cdot 2^{2\cdot 2-4} \cdot 4 \cdot a_{2-1}$$

$$a_n = (-3)^{n+2} \cdot 2^{2n-4} \cdot 4 \cdot a_{n-1}$$

$$a_{n-1} = (-3)^{(n-1)+2} \cdot 2^{2(n-1)-4} \cdot 4 \cdot a_{(n-1)-1}$$

$$a_{n-1} = (-3)^{n+1} \cdot 2^{2n-6} \cdot 4 \cdot a_{n-2}$$

$$a_{n-2} = (-3)^{(n-2)+2} \cdot 2^{2(n-2)-4} \cdot 4 \cdot a_{(n-2)-1}$$

$$a_{n-2} = (-3)^{n} \cdot 2^{2n-8} \cdot 4 \cdot a_{n-3}$$

$$a_2 = (-3)^{2+2} \cdot 2^{2\cdot 2-4} \cdot 4 \cdot a_{2-1}$$

$$a_2 = (-3)^4 \cdot 2^0 \cdot 4 \cdot a_1 = (-3)^4 \cdot 2^0 \cdot 4 \cdot (-2)$$

$$a_n = (-3)^{n+2} \cdot 2^{2n-4} \cdot 4 \cdot a_{n-1}$$

$$a_{n-1} = (-3)^{n+1} \cdot 2^{2n-6} \cdot 4 \cdot a_{n-2}$$

$$a_{n-2} = (-3)^{n} \cdot 2^{2n-8} \cdot 4 \cdot a_{n-3}$$

$$a_2 = (-3)^4 \cdot 4 \cdot 2^0 \cdot (-2)$$

$$a_n = (-3)^{n+2} \cdot 2^{2n-4} \cdot 4 \cdot a_{n-1}$$

$$a_n = (-3)^{n+2} \cdot 2^{2n-4} \cdot 4 \cdot a_{n-1}$$

$$a_{n-1} = (-3)^{n+1} \cdot 2^{2n-6} \cdot 4 \cdot a_{n-2}$$

$$a_{n-2} = (-3)^{n} \cdot 2^{2n-8} \cdot 4 \cdot a_{n-3}$$

$$a_2 = (-3)^4 \cdot 4 \cdot 2^0 \cdot (-2)$$

$$a_n = (-3)^{n+2} \cdot 2^{2n-4} \cdot 4 \cdot a_{n-1}$$

$$a_n = (-3)^{n+2} \cdot 2^{2n-4} \cdot 4 \cdot (-3)^{n+1} \cdot 2^{2n-6} \cdot 4 \cdot a_{n-2}$$

$$a_n = (-3)^{n+2} \cdot 2^{2n-4} \cdot 4 \cdot a_{n-1}$$

$$a_{n-1} = (-3)^{n+1} \cdot 2^{2n-6} \cdot 4 \cdot a_{n-2}$$

$$a_{n-2} = (-3)^{n} \cdot 2^{2n-8} \cdot 4 \cdot a_{n-3}$$

$$a_2 = (-3)^4 \cdot 4 \cdot 2^0 \cdot (-2)$$

$$a_n = (-3)^{n+2} \cdot 2^{2n-4} \cdot 4 \cdot a_{n-1}$$

$$a_n = (-3)^{n+2} \cdot 2^{2n-4} \cdot 4 \cdot (-3)^{n+1} \cdot 2^{2n-6} \cdot 4 \cdot a_{n-2}$$

$$a_n = (-3)^{n+2} \cdot 2^{2n-4} \cdot 4 \cdot (-3)^{n+1} \cdot 2^{2n-6} \cdot 4 \cdot (-3)^{n} \cdot 2^{2n-8} \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (-3)^4 \cdot 4 \cdot 2^0 \cdot (-2)$$

$$a_n = (-3)^{n+2} \cdot 2^{2n-4} \cdot 4 \cdot (-3)^{n+1} \cdot 2^{2n-6} \cdot 4 \cdot (-3)^{n} \cdot 2^{2n-8} \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (-3)^{4} \cdot 4 \cdot 2^{0} \cdot (-2)$$

$$a_n = (-3)^{(n+2)+(n+1)+n+\cdots+4} \cdot 2^{(2n-4)+(2n-6)+(2n-8)+\cdots+0} \cdot 4^{n-1} \cdot (-2)$$

$$a_n = (-3)^{n+2} \cdot 2^{2n-4} \cdot 4 \cdot (-3)^{n+1} \cdot 2^{2n-6} \cdot 4 \cdot (-3)^{n} \cdot 2^{2n-8} \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (-3)^{4} \cdot 4 \cdot 2^{0} \cdot (-2)$$

$$a_n = (-3)^{(n+2)+(n+1)+n+\cdots+4} \cdot 2^{(2n-4)+(2n-6)+(2n-8)+\cdots+0} \cdot 4^{n-1} \cdot (-2)$$

$$(n+2)+(n+1)+n+\cdots+4 = \frac{(n+2)+4}{2} \cdot (n-1) = \frac{(n+6)(n-1)}{2}$$

$$a_n = (-3)^{n+2} \cdot 2^{2n-4} \cdot 4 \cdot (-3)^{n+1} \cdot 2^{2n-6} \cdot 4 \cdot (-3)^{n} \cdot 2^{2n-8} \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (-3)^{4} \cdot 4 \cdot 2^{0} \cdot (-2)$$

$$a_n = (-3)^{(n+2)+(n+1)+n+\cdots+4} \cdot 2^{(2n-4)+(2n-6)+(2n-8)+\cdots+0} \cdot 4^{n-1} \cdot (-2)$$

$$(n+2)+(n+1)+n+\cdots+4 = \frac{(n+2)+4}{2} \cdot (n-1) = \frac{(n+6)(n-1)}{2}$$

$$(2n-4)+(2n-6)+(2n-8)+\cdots+0 = \frac{(2n-4)+0}{2} \cdot (n-1) =$$

$$(n-2)(n-1)$$

$$a_n = (-3)^{n+2} \cdot 2^{2n-4} \cdot 4 \cdot (-3)^{n+1} \cdot 2^{2n-6} \cdot 4 \cdot (-3)^n \cdot 2^{2n-8} \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (-3)^4 \cdot 4 \cdot 2^0 \cdot (-2)$$

$$a_n = (-3)^{(n+2)+(n+1)+n+\cdots+4} \cdot 2^{(2n-4)+(2n-6)+(2n-8)+\cdots+0} \cdot 4^{n-1} \cdot (-2)$$

$$(n+2)+(n+1)+n+\cdots+4 = \frac{(n+2)+4}{2} \cdot (n-1) = \frac{(n+6)(n-1)}{2}$$

$$(2n-4)+(2n-6)+(2n-8)+\cdots+0 = \frac{(2n-4)+0}{2} \cdot (n-1) =$$

$$(n-2)(n-1)$$

$$a_n = (-3)^{\frac{(n+6)(n-1)}{2}} \cdot 2^{(n-2)(n-1)} \cdot 4^{n-1} \cdot (-2)$$

Znajdź wzór jawny na n-ty wyraz ciągu:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = \dfrac{1}{n(n-1)} + a_{n-1} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{n(n-1)} + a_{n-1}$$

$$a_n = \frac{1}{n(n-1)} + a_{n-1}$$

$$a_{n-1} = \frac{1}{(n-1)(n-2)} + a_{n-2}$$

$$a_n = \frac{1}{n(n-1)} + a_{n-1}$$

$$a_{n-1} = \frac{1}{(n-1)(n-2)} + a_{n-2}$$

$$a_3 = \frac{1}{3 \cdot 2} + a_2$$

$$a_n = \frac{1}{n(n-1)} + a_{n-1}$$

$$a_{n-1} = \frac{1}{(n-1)(n-2)} + a_{n-2}$$

$$a_3 = \frac{1}{3 \cdot 2} + a_2$$

$$a_2 = \frac{1}{2 \cdot 1} + a_1 = \frac{1}{2 \cdot 1} + 4$$

$$a_n = \frac{1}{n(n-1)} + a_{n-1}$$

$$a_{n-1} = \frac{1}{(n-1)(n-2)} + a_{n-2}$$

$$a_3 = \frac{1}{3 \cdot 2} + a_2$$

$$a_2 = \frac{1}{2 \cdot 1} + a_1 = \frac{1}{2 \cdot 1} + 4$$

$$a_n = \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} + \cdots + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 1} + 4$$

Zauważmy, że:

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n}{n(n-1)} - \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$a_n = \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} + \cdots + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 1} + 4$$

$$a_n = \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + 4$$

$$a_n = \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} + \cdots + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 1} + 4$$

$$a_n = \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + 4$$

$$a_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{1} + 4 = 5 - \frac{1}{n}$$

Niech x będzie liczbą rzeczywistą. Wtedy:

$\lfloor x \rfloor$ to największa liczba całkowita nie większa od x (podłoga x, część całkowita x), czyli

$$\lfloor x \rfloor = \max \{a \in Z : a \leq x\};$$

$\lceil x \rceil$ to najmniejsza liczba całkowita nie mniejsza od x (sufit x, część całkowita x), czyli

$$\lceil x \rceil = \min \{a \in Z : a \geq x\};$$

Ciąg S zdefiniowany jest przez warunki:

$$S(n) = 2S\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)\ dla\, n \geq 2,$$

Obliczmy na przykład $S(99) = 2S\left(\left\lfloor \frac{99}{2} \right\rfloor\right) =$

$$2S(49) = 2 * 2S(24) = 2 * 2 * 2S(12) =$$

$$2 * 2 * 2 * 2S(6) = 2 * 2 * 2 * 2 * 2S(3) =$$

$$2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * S(1) = 2^6 * 1 = 2^6$$

$$S(n) = 2S\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \ dla\, n \geq 2$$

Ogólnie S(n) jest największą liczbą całkowitą postaci 2^k, gdzie $2^k \leq n$.

Równanie charakterystyczne

$$a_n = A \cdot a_{n-1} + B \cdot a_{n-2} \; (*)$$

gdzie:

$$B \neq 0$$

Równaniem charakterystycznym powyższej zależności nazywamy:

$$r^2 - A \cdot r - B = 0$$

Jeśli r_1, r_2 są pojedynczymi rozwiązaniami równania charakterystycznego, to wzór jawny rekurencji

$$a_n = A \cdot a_{n-1} + B \cdot a_{n-2}$$

jest postaci:

$$a_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n$$

Jeśli r_0 jest podwójnym rozwiązaniem równania charakterystycznego, to wzór jawny rekurencji (*) jest postaci:

$$a_n = (C_1 + C_2 \cdot n) \cdot r_0^n$$

Wartości stałych C_1, C_2 obliczamy wykorzystując warunki początkowe (startowe) rekurencji.

Znajdź wzór jawny na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego:

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

$r^2 = r + 1$

$$r^2 - r - 1 = 0$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$r^2 = r + 1$$

$$r^2 - r - 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$r^2 = r + 1$$

$$r^2 - r - 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$$

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$r^2 = r + 1$$

$$r^2 - r - 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$$

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$F_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$$

$$F_n = C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$F_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$$

$$F_n = C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$$

$$F_n = C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_0 = C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 = C_1 + C_2 = 0$$

$$F_1 = C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

…

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$F_n = C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$C_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$F_n = C_1 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$C_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$F_n = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Złota liczba (liczba „fi”):

$$\varphi = \lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

Złota liczba (liczba „fi”):

$$\varphi = \lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

$$\varphi = \lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n}$$

Złota liczba (liczba „fi"):

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}\right)$$

Złota liczba (liczba „fi”):

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}\right) =$$

$$1 + \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

Złota liczba (liczba „fi”):

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}\right) =$$

$$1 + \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}}$$

Złota liczba (liczba „fi”):

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}\right) =$$

$$1 + \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

φ to jedyna liczba dodatnia o tej własności, że jej odwrotność jest o 1 od niej mniejsza i jedyna taka, której kwadrat jest o 1 od niej większy.

$$\varphi = \frac{1}{\varphi} + 1$$

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618$$

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$$

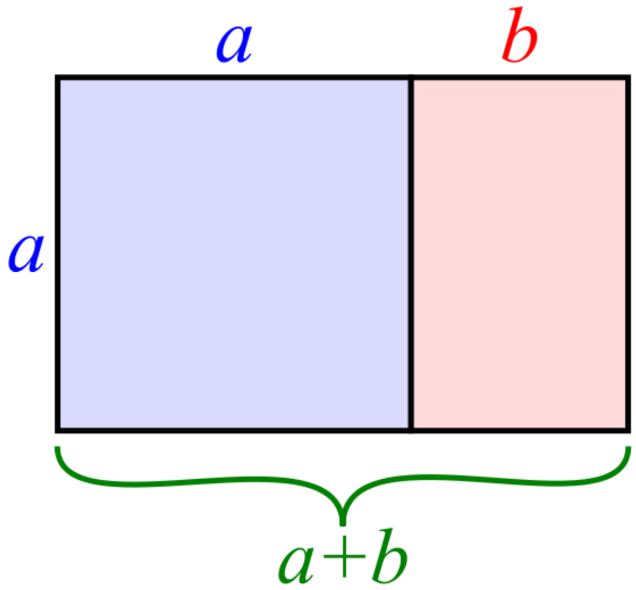
Wzór jawny ciągu Fibonacciego:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

$$F_n = \frac{\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Złoty podział:



$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \varphi$$

Złoty podział fascynował artystów. Można go spotkać w architekturze, malarstwie, muzyce.

Niech:

$$a_n = A \cdot a_{n-1} + B \cdot a_{n-2} + C \cdot a_{n-3} (**)$$

gdzie:

$$C \neq 0$$

Równaniem charakterystycznym powyższej zależności nazywamy:

$$r^3 - A \cdot r^2 - B \cdot r - C = 0$$

Jeśli r_1, r_2, r_3 są pojedynczymi rozwiązaniami równania charakterystycznego, to wzór jawny rekurencji (**) jest postaci:

$$a_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n + C_3 \cdot r_3^n$$

Jeśli r_0, r_1 są odpowiednio podwójnym i pojedynczym rozwiązaniem równania charakterystycznego, to wzór jawny rekurencji (**) jest postaci:

$$a_n = (C_1 + C_2 \cdot n) \cdot r_0^n + C_3 \cdot r_1^n$$

Jeśli r_0 jest potrójnym rozwiązaniem równania charakterystycznego, to wzór jawny rekurencji (**) jest postaci:

$$a_n = (C_1 + C_2 \cdot n + C_3 \cdot n^2) \cdot r_0^n$$

Wartości stałych C_1, C_2, C_3 obliczamy wykorzystując warunki początkowe (startowe) rekurencji.

Znajdź wzór jawny na n-ty wyraz ciągu:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 4 \\ a_3 = -2 \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 7 \cdot a_{n-2} + 4 \cdot a_{n-3} \end{cases}$$

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 7 \cdot a_{n-2} + 4 \cdot a_{n-3}$$

$$r^3 = 2r^2 + 7r + 4$$

$$r^3 - 2r^2 - 7r - 4 = 0 \quad (r_1 = -1)$$

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 7 \cdot a_{n-2} + 4 \cdot a_{n-3}$$

$$r^3 = 2r^2 + 7r + 4$$

$$r^3 - 2r^2 - 7r - 4 = 0 \quad (r_1 = -1)$$

$$r^3 + r^2 - 3r^2 - 3r - 4r - 4 = 0$$

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 7 \cdot a_{n-2} + 4 \cdot a_{n-3}$$

$$r^3 = 2r^2 + 7r + 4$$

$$r^3 - 2r^2 - 7r - 4 = 0 \quad (r_1 = -1)$$

$$r^3 + r^2 - 3r^2 - 3r - 4r - 4 = 0$$

$$r^2(r+1) - 3r(r+1) - 4(r+1) = 0$$

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 7 \cdot a_{n-2} + 4 \cdot a_{n-3}$$

$$r^3 = 2r^2 + 7r + 4$$

$$r^3 - 2r^2 - 7r - 4 = 0 \quad (r_1 = -1)$$

$$r^3 + r^2 - 3r^2 - 3r - 4r - 4 = 0$$

$$r^2(r + 1) - 3r(r + 1) - 4(r + 1) = 0$$

$$(r + 1)(r^2 - 3r - 4) = 0$$

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 7 \cdot a_{n-2} + 4 \cdot a_{n-3}$$

$$r^3 = 2r^2 + 7r + 4$$

$$r^3 - 2r^2 - 7r - 4 = 0 \quad (r_1 = -1)$$

$$r^3 + r^2 - 3r^2 - 3r - 4r - 4 = 0$$

$$r^2(r+1) - 3r(r+1) - 4(r+1) = 0$$

$$(r+1)(r^2 - 3r - 4) = 0$$

$$(r+1)(r+1)(r-4) = 0$$

$r_1 = -1$ (rozwiązanie podwójne)

$r_2 = 4$ (rozwiązanie pojedyncze)

$$a_n = (C_1 + nC_2)r_1^n + C_3 r_2^n$$

$$a_n = (C_1 + nC_2)(-1)^n + C_3 \cdot 4^n$$

$$a_n = (C_1 + nC_2)r_1^n + C_3 r_2^n$$

$$a_n = (C_1 + nC_2)(-1)^n + C_3 \cdot 4^n$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 4$$

$$a_3 = -2$$

$$a_n = (C_1 + nC_2)r_1^n + C_3 r_2^n$$

$$a_n = (C_1 + nC_2)(-1)^n + C_3 \cdot 4^n$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 4$$

$$a_3 = -2$$

$$a_1 = (C_1 + C_2)(-1)^1 + C_3 \cdot 4^1 = 2$$

$$a_2 = (C_1 + 2C_2)(-1)^2 + C_3 \cdot 4^2 = 4$$

$$a_3 = (C_1 + 3C_2)(-1)^3 + C_3 \cdot 4^3 = -2$$

$$\begin{cases} -C_1 - C_2 + 4C_3 = 2 \\ C_1 + 2C_2 + 16C_3 = 4 \\ -C_1 - 3C_2 + 64C_3 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -C_1 - C_2 + 4C_3 = 2 \\ C_1 + 2C_2 + 16C_3 = 4 \\ -C_1 - 3C_2 + 64C_3 = -2 \end{cases}$$

…

$$\begin{cases} C_1 = -\dfrac{152}{25} \\ C_2 = \dfrac{22}{5} \\ C_3 = \dfrac{2}{25} \end{cases}$$

$$a_n = (C_1 + nC_2)(-1)^n + C_3 \cdot 4^n$$

$$C_1 = -\frac{152}{25}, C_2 = \frac{22}{5}, C_3 = \frac{2}{25}$$

$$a_n = (C_1 + nC_2)(-1)^n + C_3 \cdot 4^n$$

$$C_1 = -\frac{152}{25}, C_2 = \frac{22}{5}, C_3 = \frac{2}{25}$$

$$a_n = \left(-\frac{152}{25} + \frac{22}{5}n\right)(-1)^n + \frac{2}{25} \cdot 4^n$$

Jednorodna liniowa zależność rekurencyjna:

$$a_n = B_1 \cdot a_{n-1} + B_2 \cdot a_{n-2} + \ldots + B_l \cdot a_{n-l}$$

gdzie:

$$B_l \neq 0$$

Równaniem charakterystycznym powyższej zależności nazywamy:

$$r^l - B_1 \cdot r^{l-1} - B_2 \cdot r^{l-2} - \ldots - B_l = 0$$

Jeśli:

$$r^l - B_1 \cdot r^{l-1} - B_2 \cdot r^{l-2} - \ldots - B_l =$$
$$(r - r_1)^{m_1} \cdot (r - r_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (r - r_k)^{m_k}$$

gdzie:

$$\bigwedge_{i=1,2,\ldots,k} m_i \geq 1, \quad \sum_{i=1}^{k} m_i = l$$

to:

$$a_n = \left(C_1 + C_2 \cdot n + \ldots + C_{m_1} \cdot n^{m_1 - 1}\right) \cdot {r_1}^n +$$

$$\left(D_1 + D_2 \cdot n + \ldots + D_{m_2} \cdot n^{m_2 - 1}\right) \cdot {r_2}^n +$$

$$\ldots$$

$$+\left(Z_1 + Z_2 \cdot n + \ldots + Z_{m_k} \cdot n^{m_k - 1}\right) \cdot {r_k}^n$$

Silnia:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k,$$

gdzie: $n \in \mathbb{N}$.

Dodatkowo określamy:

$$0! = 1$$

Silnia – wzór rekurencyjny:

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \cdot (n-1)! \end{cases}$$

gdzie: $n \in \mathbb{N}$.

Symbol Newtona:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

gdzie: $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$.

Na przykład:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6!}{2!\,4!}$$

Na przykład:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!}$$

Na przykład:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Na przykład:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\,(8-5)!} = \frac{8!}{5!\,3!}$$

Na przykład:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{2\cdot 4!} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$$

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\,(8-5)!} = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 6}$$

Na przykład:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\,(8-5)!} = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 6} = 8 \cdot 7 = 56$$

Własności symbolu Newtona:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Ad.1.

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$$

Ad.2.

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\,(n-(n-1))!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!\,1!} = n$$

Ad.3.

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \binom{n}{k}$$

Symbol Newtona – wzór rekurencyjny:

$$\begin{cases} \binom{n}{0} = 1 \\ \binom{n}{n} = 1 \\ \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \end{cases}$$

Dowód $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}$$

Dowód $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} =$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}$$

Dowód $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} =$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,k}{k(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,k}{k!\,(n-k)!}$$

Dowód $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} =$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,k}{k(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,k}{k!\,(n-k)!}$$

$$\frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} = \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k-1)!\,(n-k)} = \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!}$$

Dowód $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!} =$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,k}{k(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,k}{k!\,(n-k)!}$$

$$\frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} = \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k-1)!\,(n-k)} = \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!\,k}{k!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!}$$

Dowód $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!\,k}{k!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!} =$$

$$\frac{(n-1)!\,k + (n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!}$$

Dowód $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!\,k}{k!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!} =$$

$$\frac{(n-1)!\,k + (n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,(k+n-k)}{k!\,(n-k)!}$$

Dowód $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!\,k}{k!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!} =$$

$$\frac{(n-1)!\,k + (n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,(k+n-k)}{k!\,(n-k)!} =$$

$$\frac{(n-1)!\,n}{k!\,(n-k)!}$$

Dowód $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!\,k}{k!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!} =$$

$$\frac{(n-1)!\,k + (n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,(k+n-k)}{k!\,(n-k)!} =$$

$$\frac{(n-1)!\,n}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Dwumian Newtona:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Na przykład:

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} a^1 (-b)^1 + \binom{2}{2} (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} b^3 =$$

$$a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^7 = \binom{7}{0} a^7 + \binom{7}{1} a^6 b^1 + \binom{7}{2} a^5 b^2 + \binom{7}{3} a^4 b^3 +$$

$$\binom{7}{4} a^3 b^4 + \binom{7}{5} a^2 b^5 + \binom{7}{6} a^1 b^6 + \binom{7}{7} b^7$$

Dwumian Newtona (przypadek dla $b = 1$):

$$(a+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}$$

Trójkąt Pascala:

```
0                      1
1                    1   1
2                  1   2   1
3                1   3   3   1
4              1   4   6   4   1
5            1   5   10  10   5   1
6          1   6   15  20  15   6   1
7        1   7   21  35  35   21  7   1
8      1   8   28  56  70  56   28  8   1
9    1   9  36   84  126 126  84  36  9   1
        . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
```

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Na przykład:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b^1 + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6a^1b^5 + b^6$$

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b^1 + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7a^1b^6 + b^7$$

$$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b^1 + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7a^1b^6 - b^7$$

```
0                      1
1                   1     1
2                1     2     1
3             1     3     3     1
4          1     4     6     4     1
5       1     5    10    10     5     1
6    1     6    15    20    15     6     1
7  1    7    21    35    35    21    7     1
8 1   8    28    56    70    56    28    8    1
9 1   9   36    84   126  126   84   36   9   1
   . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
```