Matematyka Dyskretna

4. Dowody indukcyjne

Twierdzenie o indukcji dla tezy $T(n), n \in \mathbb{N}$:

Jeżeli:

krok 1: $T(1)$ jest prawdziwe;

krok 2: dla dowolnego $n_0 \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest implikacja: $T(n_0) \Rightarrow T(n_0 + 1)$;

to teza $T(n)$ jest prawdziwa dla $n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie o indukcji dla tezy $T(n), n \geq k_0$:

Jeżeli:

krok 1: $T(k_0)$ jest prawdziwe;

krok 2: dla dowolnego $n_0 \geq k_0$ prawdziwa jest implikacja: $T(n_0) \Rightarrow T(n_0 + 1)$;

to teza $T(n)$ jest prawdziwa dla $n \geq k_0$.

Udowodnić indukcyjnie, że ciąg określony rekurencyjnie:

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 3 \end{cases}$$

ma wzór jawny:

$$a_n = 1 - 2 \cdot 4^{n-1}, n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 3 \end{cases}$$

$$T(n): a_n = 1 - 2 \cdot 4^{n-1}, n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 3 \end{cases}$$

$$T(n)\colon a_n = 1 - 2 \cdot 4^{n-1}, n \in \mathbb{N}$$

Krok 1:

$$T(1)\colon a_1 = 1 - 2 \cdot 4^{1-1} = 1 - 2 = -1$$

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 3 \end{cases}$$

$$T(n)\colon a_n = 1 - 2 \cdot 4^{n-1}, n \in \mathbb{N}$$

Krok 1:

$$T(1)\colon a_1 = 1 - 2 \cdot 4^{1-1} = 1 - 2 = -1$$

Krok 1 zachodzi.

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 3 \end{cases}$$

$T(n)$: $a_n = 1 - 2 \cdot 4^{n-1}, n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 3 \end{cases}$$

$T(n)$: $a_n = 1 - 2 \cdot 4^{n-1}, n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $a_{n_0} = 1 - 2 \cdot 4^{n_0 - 1}$

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 3 \end{cases}$$

$T(n)$: $a_n = 1 - 2 \cdot 4^{n-1}, n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $a_{n_0} = 1 - 2 \cdot 4^{n_0 - 1}$

Teza: $T(n_0 + 1)$: $a_{n_0+1} = 1 - 2 \cdot 4^{(n_0+1)-1} = 1 - 2 \cdot 4^{n_0}$

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 3 \end{cases}$$

$T(n)\colon a_n = 1 - 2 \cdot 4^{n-1}, n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)\colon a_{n_0} = 1 - 2 \cdot 4^{n_0-1}$

Teza: $T(n_0+1)\colon a_{n_0+1} = 1 - 2 \cdot 4^{(n_0+1)-1} = 1 - 2 \cdot 4^{n_0}$

Dowód: $L = a_{n_0+1}$

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 3 \end{cases}$$

$T(n)$: $a_n = 1 - 2 \cdot 4^{n-1}, n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $a_{n_0} = 1 - 2 \cdot 4^{n_0 - 1}$

Teza: $T(n_0 + 1)$: $a_{n_0+1} = 1 - 2 \cdot 4^{(n_0+1)-1} = 1 - 2 \cdot 4^{n_0}$

Dowód: $L = a_{n_0+1} = 4 \cdot a_{n_0} - 3$

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 3 \end{cases}$$

$T(n)$: $a_n = 1 - 2 \cdot 4^{n-1}, n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $a_{n_0} = 1 - 2 \cdot 4^{n_0 - 1}$

Teza: $T(n_0 + 1)$: $a_{n_0+1} = 1 - 2 \cdot 4^{(n_0+1)-1} = 1 - 2 \cdot 4^{n_0}$

Dowód: $L = a_{n_0+1} = 4 \cdot a_{n_0} - 3 = 4 \cdot (1 - 2 \cdot 4^{n_0 - 1}) - 3$

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 3 \end{cases}$$

$T(n)$: $a_n = 1 - 2 \cdot 4^{n-1}, n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $a_{n_0} = 1 - 2 \cdot 4^{n_0 - 1}$

Teza: $T(n_0 + 1)$: $a_{n_0+1} = 1 - 2 \cdot 4^{(n_0+1)-1} = 1 - 2 \cdot 4^{n_0}$

Dowód: $L = a_{n_0+1} = 4 \cdot a_{n_0} - 3 = 4 \cdot (1 - 2 \cdot 4^{n_0-1}) - 3 =$

$4 - 2 \cdot 4^{n_0} - 3$

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 3 \end{cases}$$

$T(n)$: $a_n = 1 - 2 \cdot 4^{n-1}, n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $a_{n_0} = 1 - 2 \cdot 4^{n_0 - 1}$

Teza: $T(n_0 + 1)$: $a_{n_0+1} = 1 - 2 \cdot 4^{(n_0+1)-1} = 1 - 2 \cdot 4^{n_0}$

Dowód: $L = a_{n_0+1} = 4 \cdot a_{n_0} - 3 = 4 \cdot (1 - 2 \cdot 4^{n_0-1}) - 3 =$

$4 - 2 \cdot 4^{n_0} - 3 = 1 - 2 \cdot 4^{n_0} = P$

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 3 \end{cases}$$

$T(n)$: $a_n = 1 - 2 \cdot 4^{n-1}, n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $a_{n_0} = 1 - 2 \cdot 4^{n_0 - 1}$

Teza: $T(n_0 + 1)$: $a_{n_0+1} = 1 - 2 \cdot 4^{(n_0+1)-1} = 1 - 2 \cdot 4^{n_0}$

Dowód: $L = a_{n_0+1} = 4 \cdot a_{n_0} - 3 = 4 \cdot (1 - 2 \cdot 4^{n_0-1}) - 3 =$

$4 - 2 \cdot 4^{n_0} - 3 = 1 - 2 \cdot 4^{n_0} = P$

Krok 2 zachodzi.

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 3 \end{cases}$$

$$T(n)\colon a_n = 1 - 2 \cdot 4^{n-1}, n \in \mathbb{N}$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej $T(n)$ zachodzi dla $n \in \mathbb{N}$.

Udowodnić indukcyjnie:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot (i+1) = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3}, n \in \mathbb{N}$$

$$T(n)\colon \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot (i+1) = \frac{(n-1)\cdot n \cdot (n+1)}{3}, n \in \mathbb{N}$$

$$T(n)\colon \sum_{i=1}^{n-1} i\cdot(i+1) = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{3}, n\in\mathbb{N}$$

Krok 1:

$T(1)$:

$$L = \sum_{i=1}^{1-1} i\cdot(i+1) = \sum_{i=1}^{0} i\cdot(i+1)$$

$$T(n): \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot (i+1) = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3}, n \in \mathbb{N}$$

Krok 1:

$T(1)$:

$$L = \sum_{i=1}^{1-1} i \cdot (i+1) = \sum_{i=1}^{0} i \cdot (i+1) = 0$$

$$T(n)\colon \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot (i+1) = \frac{(n-1)\cdot n\cdot (n+1)}{3}, n \in \mathbb{N}$$

Krok 1:

$T(1)$:

$$L = \sum_{i=1}^{1-1} i \cdot (i+1) = \sum_{i=1}^{0} i \cdot (i+1) = 0$$

$$P = \frac{(1-1)\cdot 1\cdot (1+1)}{3} = \frac{0\cdot 1\cdot 2}{3} = 0$$

$$T(n)\colon \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot (i+1) = \frac{(n-1)\cdot n \cdot (n+1)}{3}, n \in \mathbb{N}$$

Krok 1:

$T(1)$:

$$L = \sum_{i=1}^{1-1} i \cdot (i+1) = \sum_{i=1}^{0} i \cdot (i+1) = 0$$

$$P = \frac{(1-1)\cdot 1 \cdot (1+1)}{3} = \frac{0 \cdot 1 \cdot 2}{3} = 0$$

$$L = P$$

$$T(n)\colon \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot (i+1) = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3}, n \in \mathbb{N}$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)\colon \sum_{i=1}^{n_0-1} i \cdot (i+1) = \frac{(n_0-1) \cdot n_0 \cdot (n_0+1)}{3}$

$$T(n): \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot (i+1) = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3}, n \in \mathbb{N}$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0): \sum_{i=1}^{n_0-1} i \cdot (i+1) = \frac{(n_0-1) \cdot n_0 \cdot (n_0+1)}{3}$

Teza: $T(n_0+1): \sum_{i=1}^{n_0} i \cdot (i+1) = \frac{n_0 \cdot (n_0+1) \cdot (n_0+2)}{3}$

$$T(n)\colon \sum_{i=1}^{n-1} i\cdot(i+1) = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{3}, n\in\mathbb{N}$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)\colon \sum_{i=1}^{n_0-1} i\cdot(i+1) = \frac{(n_0-1)\cdot n_0\cdot(n_0+1)}{3}$

Teza: $T(n_0+1)\colon \sum_{i=1}^{n_0} i\cdot(i+1) = \frac{n_0\cdot(n_0+1)\cdot(n_0+2)}{3}$

Dowód: $L = \sum_{i=1}^{n_0} i\cdot(i+1)$

$$T(n): \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot (i+1) = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3}, n \in \mathbb{N}$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0): \sum_{i=1}^{n_0-1} i \cdot (i+1) = \frac{(n_0-1) \cdot n_0 \cdot (n_0+1)}{3}$

Teza: $T(n_0+1): \sum_{i=1}^{n_0} i \cdot (i+1) = \frac{n_0 \cdot (n_0+1) \cdot (n_0+2)}{3}$

Dowód: $L = \sum_{i=1}^{n_0} i \cdot (i+1) = \sum_{i=1}^{n_0-1} i \cdot (i+1) + n_0 \cdot (n_0+1)$

$$T(n)\colon \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot (i+1) = \frac{(n-1)\cdot n \cdot (n+1)}{3}, n \in \mathbb{N}$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)\colon \sum_{i=1}^{n_0-1} i \cdot (i+1) = \frac{(n_0-1)\cdot n_0 \cdot (n_0+1)}{3}$

Teza: $T(n_0+1)\colon \sum_{i=1}^{n_0} i \cdot (i+1) = \frac{n_0\cdot (n_0+1) \cdot (n_0+2)}{3}$

Dowód: $L = \sum_{i=1}^{n_0} i \cdot (i+1) = \sum_{i=1}^{n_0-1} i \cdot (i+1) + n_0 \cdot (n_0+1) = \frac{(n_0-1)\cdot n_0 \cdot (n_0+1)}{3} + n_0 \cdot (n_0+1)$

$$T(n)\colon \sum_{i=1}^{n-1} i\cdot(i+1) = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{3}, n\in\mathbb{N}$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)\colon \sum_{i=1}^{n_0-1} i\cdot(i+1) = \frac{(n_0-1)\cdot n_0\cdot(n_0+1)}{3}$

Teza: $T(n_0+1)\colon \sum_{i=1}^{n_0} i\cdot(i+1) = \frac{n_0\cdot(n_0+1)\cdot(n_0+2)}{3}$

Dowód: $L = \sum_{i=1}^{n_0} i\cdot(i+1) = \sum_{i=1}^{n_0-1} i\cdot(i+1) + n_0\cdot(n_0+1) = \frac{(n_0-1)\cdot n_0\cdot(n_0+1)}{3} + n_0\cdot(n_0+1) = n_0\cdot(n_0+1)\cdot\left(\frac{n_0-1}{3}+1\right)$

$$T(n)\colon \sum_{i=1}^{n-1} i\cdot(i+1)=\frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{3}, n\in\mathbb{N}$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)\colon \sum_{i=1}^{n_0-1} i\cdot(i+1)=\frac{(n_0-1)\cdot n_0\cdot(n_0+1)}{3}$

Teza: $T(n_0+1)\colon \sum_{i=1}^{n_0} i\cdot(i+1)=\frac{n_0\cdot(n_0+1)\cdot(n_0+2)}{3}$

Dowód: $L=\sum_{i=1}^{n_0} i\cdot(i+1)=\sum_{i=1}^{n_0-1} i\cdot(i+1)+n_0\cdot(n_0+1)=\frac{(n_0-1)\cdot n_0\cdot(n_0+1)}{3}+n_0\cdot(n_0+1)=n_0\cdot(n_0+1)\cdot\left(\frac{n_0-1}{3}+1\right)=n_0\cdot(n_0+1)\cdot\frac{n_0+2}{3}$

$$T(n)\colon \sum_{i=1}^{n-1} i\cdot(i+1) = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{3}, n\in\mathbb{N}$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)\colon \sum_{i=1}^{n_0-1} i\cdot(i+1) = \frac{(n_0-1)\cdot n_0\cdot(n_0+1)}{3}$

Teza: $T(n_0+1)\colon \sum_{i=1}^{n_0} i\cdot(i+1) = \frac{n_0\cdot(n_0+1)\cdot(n_0+2)}{3}$

Dowód: $L = \sum_{i=1}^{n_0} i\cdot(i+1) = \sum_{i=1}^{n_0-1} i\cdot(i+1) + n_0\cdot(n_0+1) = \frac{(n_0-1)\cdot n_0\cdot(n_0+1)}{3} + n_0\cdot(n_0+1) = n_0\cdot(n_0+1)\cdot\left(\frac{n_0-1}{3}+1\right) = n_0\cdot(n_0+1)\cdot\frac{n_0+2}{3} = \frac{n_0\cdot(n_0+1)\cdot(n_0+2)}{3} = P$

$$T(n)\colon \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot (i+1) = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3}, n \in \mathbb{N}$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej $T(n)$ zachodzi dla $n \in \mathbb{N}$.

Udowodnić indukcyjnie:

$$\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, n \geq 2$$

$$T(n)\colon \prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, n \geq 2$$

$$T(n): \prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, n \geq 2$$

Krok 1:

$T(2)$:

$$L=\prod_{i=2}^{2}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)$$

$$T(n): \prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, n \geq 2$$

Krok 1:

$T(2)$:

$$L=\prod_{i=2}^{2}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$$

$$T(n): \prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, n \geq 2$$

Krok 1:

$T(2)$:

$$L=\prod_{i=2}^{2}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$$

$$P=\frac{2+1}{2\cdot 2}=\frac{3}{4}$$

$$L=P$$

$$T(n): \prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, n \geq 2$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \geq 2$

Założenie: $T(n_0): \prod_{i=2}^{n_0}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n_0+1}{2n_0}$

Teza: $T(n_0+1): \prod_{i=2}^{n_0+1}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n_0+2}{2(n_0+1)}$

$$T(n): \prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, n \geq 2$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \geq 2$

Założenie: $T(n_0): \prod_{i=2}^{n_0}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n_0+1}{2n_0}$

Teza: $T(n_0+1): \prod_{i=2}^{n_0+1}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n_0+2}{2(n_0+1)}$

Dowód: $L=\prod_{i=2}^{n_0+1}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)$

$$T(n): \prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, n \geq 2$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \geq 2$

Założenie: $T(n_0): \prod_{i=2}^{n_0}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n_0+1}{2n_0}$

Teza: $T(n_0+1): \prod_{i=2}^{n_0+1}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n_0+2}{2(n_0+1)}$

Dowód: $L=\prod_{i=2}^{n_0+1}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\prod_{i=2}^{n_0}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n_0+1)^2}\right)$

$$T(n)\colon \prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, n \geq 2$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \geq 2$

Założenie: $T(n_0)\colon \prod_{i=2}^{n_0}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n_0+1}{2n_0}$

Teza: $T(n_0+1)\colon \prod_{i=2}^{n_0+1}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n_0+2}{2(n_0+1)}$

Dowód: $L=\prod_{i=2}^{n_0+1}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\prod_{i=2}^{n_0}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n_0+1)^2}\right)=\frac{n_0+1}{2n_0}\cdot$
$\left(1-\frac{1}{(n_0+1)^2}\right)$

$$T(n): \prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, n \geq 2$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \geq 2$

Założenie: $T(n_0): \prod_{i=2}^{n_0} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n_0+1}{2n_0}$

Teza: $T(n_0 + 1): \prod_{i=2}^{n_0+1} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n_0+2}{2(n_0+1)}$

Dowód: $L = \prod_{i=2}^{n_0+1} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \prod_{i=2}^{n_0} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(n_0+1)^2}\right) = \frac{n_0+1}{2n_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{(n_0+1)^2}\right) = \frac{n_0+1}{2n_0} - \frac{1}{2n_0(n_0+1)}$

$$T(n): \prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, n \geq 2$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \geq 2$

Założenie: $T(n_0): \prod_{i=2}^{n_0}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n_0+1}{2n_0}$

Teza: $T(n_0+1): \prod_{i=2}^{n_0+1}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n_0+2}{2(n_0+1)}$

Dowód: $L=\prod_{i=2}^{n_0+1}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\prod_{i=2}^{n_0}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n_0+1)^2}\right)=\frac{n_0+1}{2n_0}\cdot$
$\left(1-\frac{1}{(n_0+1)^2}\right)=\frac{n_0+1}{2n_0}-\frac{1}{2n_0(n_0+1)}=\frac{(n_0+1)^2}{2n_0(n_0+1)}-\frac{1}{2n_0(n_0+1)}=$
$\frac{(n_0+1)^2-1}{2n_0(n_0+1)}=\frac{{n_0}^2+2n_0+1-1}{2n_0(n_0+1)}$

$$T(n)\colon \prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, n\geq 2$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \geq 2$

Założenie: $T(n_0)\colon \prod_{i=2}^{n_0}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n_0+1}{2n_0}$

Teza: $T(n_0+1)\colon \prod_{i=2}^{n_0+1}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n_0+2}{2(n_0+1)}$

Dowód: $L=\prod_{i=2}^{n_0+1}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\prod_{i=2}^{n_0}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n_0+1)^2}\right)=\frac{n_0+1}{2n_0}\cdot$
$\left(1-\frac{1}{(n_0+1)^2}\right)=\frac{n_0+1}{2n_0}-\frac{1}{2n_0(n_0+1)}=\frac{(n_0+1)^2}{2n_0(n_0+1)}-\frac{1}{2n_0(n_0+1)}=$
$\frac{(n_0+1)^2-1}{2n_0(n_0+1)}=\frac{{n_0}^2+2n_0+1-1}{2n_0(n_0+1)}=\frac{{n_0}^2+2n_0}{2n_0(n_0+1)}=\frac{n_0(n_0+2)}{2n_0(n_0+1)}$

$$T(n): \prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, n \geq 2$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \geq 2$

Założenie: $T(n_0): \prod_{i=2}^{n_0}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n_0+1}{2n_0}$

Teza: $T(n_0+1): \prod_{i=2}^{n_0+1}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n_0+2}{2(n_0+1)}$

Dowód: $L=\prod_{i=2}^{n_0+1}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\prod_{i=2}^{n_0}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n_0+1)^2}\right)=\frac{n_0+1}{2n_0}\cdot$
$\left(1-\frac{1}{(n_0+1)^2}\right)=\frac{n_0+1}{2n_0}-\frac{1}{2n_0(n_0+1)}=\frac{(n_0+1)^2}{2n_0(n_0+1)}-\frac{1}{2n_0(n_0+1)}=$
$\frac{(n_0+1)^2-1}{2n_0(n_0+1)}=\frac{{n_0}^2+2n_0+1-1}{2n_0(n_0+1)}=\frac{{n_0}^2+2n_0}{2n_0(n_0+1)}=\frac{n_0(n_0+2)}{2n_0(n_0+1)}=\frac{n_0+2}{2(n_0+1)}=P$

$$T(n)\colon \prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, n \geq 2$$

Na mocy zasady indukcji matematycznej $T(n)$ zachodzi dla $n \geq 2$.

Udowodnić indukcyjnie:

$$3|(n^3 + 2n), n \in \mathbb{N}$$

$$T(n): 3|(n^3 + 2n), n \in \mathbb{N}$$

$T(n)\colon 3|(n^3 + 2n), n \in \mathbb{N}$

Krok 1:

$T(1)$:

$1^3 + 2 \cdot 1 = 3$

$T(n)\colon 3|(n^3 + 2n), n \in \mathbb{N}$

Krok 1:

$T(1)$:

$1^3 + 2 \cdot 1 = 3$

$3|3$

$T(n)$: $3|(n^3 + 2n), n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $3|({n_0}^3 + 2n_0)$

Teza: $T(n_0 + 1)$: $3|((n_0 + 1)^3 + 2(n_0 + 1))$

$T(n)\colon 3|(n^3+2n), n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)\colon 3|({n_0}^3+2n_0) \Longrightarrow {n_0}^3+2n_0 = 3k, k \in \mathbb{Z}$

Teza: $T(n_0+1)\colon 3|((n_0+1)^3+2(n_0+1))$

$T(n)$: $3|(n^3 + 2n), n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $3|({n_0}^3 + 2n_0) \Longrightarrow {n_0}^3 + 2n_0 = 3k, k \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow {n_0}^3 = 3k - 2n_0, k \in \mathbb{Z}$

Teza: $T(n_0 + 1)$: $3|((n_0 + 1)^3 + 2(n_0 + 1))$

$T(n)$: $3|(n^3 + 2n), n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $3|({n_0}^3 + 2n_0) \Longrightarrow {n_0}^3 + 2n_0 = 3k, k \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow {n_0}^3 = 3k - 2n_0, k \in \mathbb{Z}$

Teza: $T(n_0 + 1)$: $3|((n_0 + 1)^3 + 2(n_0 + 1))$

Dowód: $(n_0 + 1)^3 + 2(n_0 + 1)$

$T(n)\colon 3|(n^3 + 2n), n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)\colon 3|({n_0}^3 + 2n_0) \Longrightarrow {n_0}^3 + 2n_0 = 3k, k \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow {n_0}^3 = 3k - 2n_0, k \in \mathbb{Z}$

Teza: $T(n_0 + 1)\colon 3|((n_0 + 1)^3 + 2(n_0 + 1))$

Dowód: $(n_0 + 1)^3 + 2(n_0 + 1) = {n_0}^3 + 3{n_0}^2 + 3n_0 + 1 +$
$2n_0 + 2$

$T(n)\colon 3|(n^3 + 2n), n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)\colon 3|({n_0}^3 + 2n_0) \Longrightarrow {n_0}^3 + 2n_0 = 3k, k \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow {n_0}^3 = 3k - 2n_0, k \in \mathbb{Z}$

Teza: $T(n_0 + 1)\colon 3|((n_0 + 1)^3 + 2(n_0 + 1))$

Dowód: $(n_0 + 1)^3 + 2(n_0 + 1) = {n_0}^3 + 3{n_0}^2 + 3n_0 + 1 +$
$2n_0 + 2 = (3k - 2n_0) + 3{n_0}^2 + 5n_0 + 3$

$T(n)$: $3|(n^3 + 2n), n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $3|({n_0}^3 + 2n_0) \Longrightarrow {n_0}^3 + 2n_0 = 3k, k \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow {n_0}^3 = 3k - 2n_0, k \in \mathbb{Z}$

Teza: $T(n_0 + 1)$: $3|((n_0 + 1)^3 + 2(n_0 + 1))$

Dowód: $(n_0 + 1)^3 + 2(n_0 + 1) = {n_0}^3 + 3{n_0}^2 + 3n_0 + 1 + 2n_0 + 2 = (3k - 2n_0) + 3{n_0}^2 + 5n_0 + 3 = 3k + 3{n_0}^2 + 3n_0 + 3 = 3(k + {n_0}^2 + n_0 + 1) = 3l, l \in \mathbb{Z}$

$T(n)$: $3|(n^3 + 2n), n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $3|({n_0}^3 + 2n_0) \Longrightarrow {n_0}^3 + 2n_0 = 3k, k \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow {n_0}^3 = 3k - 2n_0, k \in \mathbb{Z}$

Teza: $T(n_0 + 1)$: $3|((n_0 + 1)^3 + 2(n_0 + 1))$

Dowód: $(n_0 + 1)^3 + 2(n_0 + 1) = {n_0}^3 + 3{n_0}^2 + 3n_0 + 1 + 2n_0 + 2 = (3k - 2n_0) + 3{n_0}^2 + 5n_0 + 3 = 3k + 3{n_0}^2 + 3n_0 + 3 = 3(k + {n_0}^2 + n_0 + 1) = 3l, l \in \mathbb{Z}$

Na mocy zasady indukcji matematycznej $T(n)$ zachodzi dla $n \in \mathbb{N}$.

Udowodnić indukcyjnie:

$$10|(3^{4n+2}+1), n \in \mathbb{N}$$

$$T(n)\colon 10 \mid (3^{4n+2} + 1), n \in \mathbb{N}$$

$T(n)$: $10|(3^{4n+2}+1), n \in \mathbb{N}$

Krok 1:

$T(1)$:

$3^{4\cdot 1+2}+1=3^6+1=729+1=730$

$T(n)\colon 10|(3^{4n+2}+1), n \in \mathbb{N}$

Krok 1:

$T(1)$:

$3^{4\cdot 1+2}+1 = 3^6+1 = 729+1 = 730$

$10|730$

$T(n)\colon 10|(3^{4n+2}+1), n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)\colon 10|(3^{4n_0+2}+1)$

Teza: $T(n_0+1)\colon 10|(3^{4(n_0+1)+2}+1)$

$T(n)\colon 10|(3^{4n+2}+1), n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)\colon 10|(3^{4n_0+2}+1) \Longrightarrow 3^{4n_0+2}+1 = 10k, k \in \mathbb{Z}$

Teza: $T(n_0+1)\colon 10|(3^{4(n_0+1)+2}+1)$

$T(n)\colon 10|(3^{4n+2}+1), n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)\colon 10|(3^{4n_0+2}+1) \Longrightarrow 3^{4n_0+2}+1 = 10k, k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow 3^{4n_0+2} = 10k-1, k \in \mathbb{Z}$

Teza: $T(n_0+1)\colon 10|(3^{4(n_0+1)+2}+1)$

$T(n)\colon 10|(3^{4n+2}+1), n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)\colon 10|(3^{4n_0+2}+1) \Longrightarrow 3^{4n_0+2}+1 = 10k, k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow 3^{4n_0+2} = 10k-1, k \in \mathbb{Z}$

Teza: $T(n_0+1)\colon 10|(3^{4(n_0+1)+2}+1)$

Dowód: $3^{4(n_0+1)+2}+1$

$T(n): 10|(3^{4n+2} + 1), n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0): 10|(3^{4n_0+2} + 1) \Longrightarrow 3^{4n_0+2} + 1 = 10k, k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow 3^{4n_0+2} = 10k - 1, k \in \mathbb{Z}$

Teza: $T(n_0 + 1): 10|(3^{4(n_0+1)+2} + 1)$

Dowód: $3^{4(n_0+1)+2} + 1 = 3^{4n_0+4+2} + 1 = 3^{4n_0+2} \cdot 3^4 + 1$

$T(n)\colon 10|(3^{4n+2} + 1), n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)\colon 10|(3^{4n_0+2} + 1) \Longrightarrow 3^{4n_0+2} + 1 = 10k, k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow 3^{4n_0+2} = 10k - 1, k \in \mathbb{Z}$

Teza: $T(n_0 + 1)\colon 10|(3^{4(n_0+1)+2} + 1)$

Dowód: $3^{4(n_0+1)+2} + 1 = 3^{4n_0+4+2} + 1 = 3^{4n_0+2} \cdot 3^4 + 1 = (10k - 1) \cdot 3^4 + 1$

$T(n)$: $10|(3^{4n+2}+1), n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $10|(3^{4n_0+2}+1) \Longrightarrow 3^{4n_0+2}+1 = 10k, k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow 3^{4n_0+2} = 10k-1, k \in \mathbb{Z}$

Teza: $T(n_0+1)$: $10|(3^{4(n_0+1)+2}+1)$

Dowód: $3^{4(n_0+1)+2}+1 = 3^{4n_0+4+2}+1 = 3^{4n_0+2}\cdot 3^4+1 = (10k-1)\cdot 3^4+1 = 810k-81+1 = 810k-80 = 10(81k-8) = 10l, l \in \mathbb{Z}$

$T(n)$: $10|(3^{4n+2}+1), n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $10|(3^{4n_0+2}+1) \Longrightarrow 3^{4n_0+2}+1 = 10k, k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow 3^{4n_0+2} = 10k-1, k \in \mathbb{Z}$

Teza: $T(n_0+1)$: $10|(3^{4(n_0+1)+2}+1)$

Dowód: $3^{4(n_0+1)+2}+1 = 3^{4n_0+4+2}+1 = 3^{4n_0+2}\cdot 3^4+1 = (10k-1)\cdot 3^4+1 = 810k-81+1 = 810k-80 = 10(81k-8) = 10l, l \in \mathbb{Z}$

Na mocy zasady indukcji matematycznej $T(n)$ zachodzi dla $n \in \mathbb{N}$.

Udowodnić indukcyjnie:

$$n! > 3^{n-1}, n \geq 5$$

$$T(n): n! > 3^{n-1}, n \geq 5$$

$T(n)\colon n! > 3^{n-1}, n \geq 5$

Krok 1:

$T(5)$:

$L = 5! = 120$

$T(n): n! > 3^{n-1}, n \geq 5$

Krok 1:

$T(5)$:

$L = 5! = 120$

$P = 3^{5-1} = 3^4 = 81$

$T(n): n! > 3^{n-1}, n \geq 5$

Krok 1:

$T(5)$:

$L = 5! = 120$

$P = 3^{5-1} = 3^4 = 81$

$L > P$

$T(n)\colon n! > 3^{n-1}, n \geq 5$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \geq 5$

Założenie: $T(n_0)\colon n_0! > 3^{n_0-1}$

Teza: $T(n_0+1)\colon (n_0+1)! > 3^{n_0}$

$T(n)\colon n! > 3^{n-1}, n \geq 5$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \geq 5$

Założenie: $T(n_0)\colon n_0! > 3^{n_0-1}$

Teza: $T(n_0+1)\colon (n_0+1)! > 3^{n_0}$

Dowód: $L = (n_0+1)!$

$T(n)\colon n! > 3^{n-1}, n \geq 5$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \geq 5$

Założenie: $T(n_0)\colon n_0! > 3^{n_0-1}$

Teza: $T(n_0+1)\colon (n_0+1)! > 3^{n_0}$

Dowód: $L = (n_0+1)! = (n_0+1) \cdot n_0!$

$T(n)\colon n! > 3^{n-1}, n \geq 5$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \geq 5$

Założenie: $T(n_0)\colon n_0! > 3^{n_0-1}$

Teza: $T(n_0+1)\colon (n_0+1)! > 3^{n_0}$

Dowód: $L = (n_0+1)! = (n_0+1) \cdot n_0! > (n_0+1) \cdot 3^{n_0-1}$

$T(n)\colon n! > 3^{n-1}, n \geq 5$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \geq 5$

Założenie: $T(n_0)\colon n_0! > 3^{n_0-1}$

Teza: $T(n_0+1)\colon (n_0+1)! > 3^{n_0}$

Dowód: $L = (n_0+1)! = (n_0+1) \cdot n_0! > (n_0+1) \cdot 3^{n_0-1} >$

$3 \cdot 3^{n_0-1} = 3^{n_0} = P$ ($n_0 + 1 > 3$, bo $n_0 \geq 5$)

$T(n)$: $n! > 3^{n-1}, n \geq 5$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \geq 5$

Założenie: $T(n_0)$: $n_0! > 3^{n_0-1}$

Teza: $T(n_0+1)$: $(n_0+1)! > 3^{n_0}$

Dowód: $L = (n_0+1)! = (n_0+1) \cdot n_0! > (n_0+1) \cdot 3^{n_0-1} >$

$3 \cdot 3^{n_0-1} = 3^{n_0} = P$ ($n_0 + 1 > 3$, bo $n_0 \geq 5$)

Na mocy zasady indukcji matematycznej $T(n)$ zachodzi dla $n \geq 5$.

Udowodnić indukcyjnie:

$$4^n \geq n^2 + 3n, n \in \mathbb{N}$$

$$T(n): 4^n \geq n^2 + 3n, n \in \mathbb{N}$$

$T(n)$: $4^n \geq n^2 + 3n, n \in \mathbb{N}$

Krok 1:

$T(1)$:

$L = 4^1 = 4$

$T(n): 4^n \geq n^2 + 3n, n \in \mathbb{N}$

Krok 1:

$T(1)$:

$L = 4^1 = 4$

$P = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4$

$T(n): 4^n \geq n^2 + 3n, n \in \mathbb{N}$

Krok 1:

$T(1)$:

$L = 4^1 = 4$

$P = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4$

$L \geq P$

$T(n)$: $4^n \geq n^2 + 3n, n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $4^{n_0} \geq {n_0}^2 + 3n_0$

Teza: $T(n_0 + 1)$: $4^{n_0+1} \geq (n_0 + 1)^2 + 3(n_0 + 1)$

$T(n)$: $4^n \geq n^2 + 3n, n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $4^{n_0} \geq {n_0}^2 + 3n_0$

Teza: $T(n_0 + 1)$: $4^{n_0+1} \geq (n_0 + 1)^2 + 3(n_0 + 1)$

Dowód: $L = 4^{n_0+1}$

$T(n)$: $4^n \geq n^2 + 3n, n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $4^{n_0} \geq {n_0}^2 + 3n_0$

Teza: $T(n_0 + 1)$: $4^{n_0+1} \geq (n_0 + 1)^2 + 3(n_0 + 1)$

Dowód: $L = 4^{n_0+1} = 4^{n_0} \cdot 4$

$T(n)$: $4^n \geq n^2 + 3n, n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $4^{n_0} \geq {n_0}^2 + 3n_0$

Teza: $T(n_0 + 1)$: $4^{n_0+1} \geq (n_0 + 1)^2 + 3(n_0 + 1)$

Dowód: $L = 4^{n_0+1} = 4^{n_0} \cdot 4 \geq \left({n_0}^2 + 3n_0\right) \cdot 4$

$T(n)$: $4^n \geq n^2 + 3n, n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $4^{n_0} \geq {n_0}^2 + 3n_0$

Teza: $T(n_0 + 1)$: $4^{n_0+1} \geq (n_0 + 1)^2 + 3(n_0 + 1)$

Dowód: $L = 4^{n_0+1} = 4^{n_0} \cdot 4 \geq \left({n_0}^2 + 3n_0\right) \cdot 4$

Chcemy pokazać, że:

$({n_0}^2 + 3n_0) \cdot 4 \geq (n_0 + 1)^2 + 3(n_0 + 1), n_0 \in \mathbb{N}$

Chcemy pokazać, że:

$$({n_0}^2 + 3n_0) \cdot 4 \geq (n_0 + 1)^2 + 3(n_0 + 1), n_0 \in \mathbb{N}$$

Przypuśćmy, że:

$$({n_0}^2 + 3n_0) \cdot 4 < (n_0 + 1)^2 + 3(n_0 + 1), n_0 \in \mathbb{N}$$

Chcemy pokazać, że:

$$({n_0}^2 + 3n_0) \cdot 4 \geq (n_0 + 1)^2 + 3(n_0 + 1), n_0 \in \mathbb{N}$$

Przypuśćmy, że:

$$({n_0}^2 + 3n_0) \cdot 4 < (n_0 + 1)^2 + 3(n_0 + 1), n_0 \in \mathbb{N}$$

$$4{n_0}^2 + 12n_0 < {n_0}^2 + 2n_0 + 1 + 3n_0 + 3$$

Chcemy pokazać, że:

$$({n_0}^2 + 3n_0) \cdot 4 \geq (n_0 + 1)^2 + 3(n_0 + 1), n_0 \in \mathbb{N}$$

Przypuśćmy, że:

$$({n_0}^2 + 3n_0) \cdot 4 < (n_0 + 1)^2 + 3(n_0 + 1), n_0 \in \mathbb{N}$$

$$4{n_0}^2 + 12n_0 < {n_0}^2 + 2n_0 + 1 + 3n_0 + 3$$

$$3{n_0}^2 + 7n_0 - 4 < 0$$

Chcemy pokazać, że:

$$({n_0}^2 + 3n_0) \cdot 4 \geq (n_0 + 1)^2 + 3(n_0 + 1), n_0 \in \mathbb{N}$$

Przypuśćmy, że:

$$({n_0}^2 + 3n_0) \cdot 4 < (n_0 + 1)^2 + 3(n_0 + 1), n_0 \in \mathbb{N}$$

$$4{n_0}^2 + 12n_0 < {n_0}^2 + 2n_0 + 1 + 3n_0 + 3$$

$$3{n_0}^2 + 7n_0 - 4 < 0$$

$$n_0 \in \left(\frac{-7 - \sqrt{97}}{6}, \frac{-7 + \sqrt{97}}{6}\right)$$

Chcemy pokazać, że:

$$({n_0}^2 + 3n_0) \cdot 4 \geq (n_0 + 1)^2 + 3(n_0 + 1), n_0 \in \mathbb{N}$$

Przypuśćmy, że:

$$({n_0}^2 + 3n_0) \cdot 4 < (n_0 + 1)^2 + 3(n_0 + 1), n_0 \in \mathbb{N}$$

$$4{n_0}^2 + 12n_0 < {n_0}^2 + 2n_0 + 1 + 3n_0 + 3$$

$$3{n_0}^2 + 7n_0 - 4 < 0$$

$$n_0 \in \left(\frac{-7 - \sqrt{97}}{6}, \frac{-7 + \sqrt{97}}{6}\right)$$

sprzeczność z założeniem ($n_0 \in \mathbb{N}$), zatem:

$$({n_0}^2 + 3n_0) \cdot 4 \geq (n_0 + 1)^2 + 3(n_0 + 1), n_0 \in \mathbb{N}$$

$T(n)$: $4^n \geq n^2 + 3n, n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $4^{n_0} \geq {n_0}^2 + 3n_0$

Teza: $T(n_0 + 1)$: $4^{n_0+1} \geq (n_0 + 1)^2 + 3(n_0 + 1)$

Dowód: $L = 4^{n_0+1} = 4^{n_0} \cdot 4 \geq \left({n_0}^2 + 3n_0\right) \cdot 4$

$T(n)$: $4^n \geq n^2 + 3n, n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $4^{n_0} \geq {n_0}^2 + 3n_0$

Teza: $T(n_0 + 1)$: $4^{n_0+1} \geq (n_0 + 1)^2 + 3(n_0 + 1)$

Dowód: $L = 4^{n_0+1} = 4^{n_0} \cdot 4 \geq \left({n_0}^2 + 3n_0\right) \cdot 4 \geq (n_0 + 1)^2 + 3(n_0 + 1) = P$

$T(n)\colon 4^n \geq n^2 + 3n, n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)\colon 4^{n_0} \geq {n_0}^2 + 3n_0$

Teza: $T(n_0 + 1)\colon 4^{n_0+1} \geq (n_0 + 1)^2 + 3(n_0 + 1)$

Dowód: $L = 4^{n_0+1} = 4^{n_0} \cdot 4 \geq \left({n_0}^2 + 3n_0\right) \cdot 4 \geq (n_0 + 1)^2 + 3(n_0 + 1) = P$

Na mocy zasady indukcji matematycznej $T(n)$ zachodzi dla $n \in \mathbb{N}$.

Udowodnić indukcyjnie:

$$\binom{2n}{n} \leq 2^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$$

$$T(n)\colon \binom{2n}{n} \leq 2^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

$$T(n): \binom{2n}{n} \leq 2^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

$$T(n): \frac{(2n)!}{n!\,n!} \leq 2^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$$

$$T(n)\colon \frac{(2n)!}{n!\,n!} \leq 2^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$$

Krok 1:

$T(1)$:

$$L = \frac{(2 \cdot 1)!}{1!\,1!} = 2$$

$$T(n)\colon \frac{(2n)!}{n!\,n!} \leq 2^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$$

Krok 1:

$T(1)$:

$$L = \frac{(2 \cdot 1)!}{1!\,1!} = 2$$

$$P = 2^{2\cdot 1-1} = 2^1 = 2$$

$$T(n): \frac{(2n)!}{n!\,n!} \leq 2^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$$

Krok 1:

$T(1)$:

$$L = \frac{(2 \cdot 1)!}{1!\,1!} = 2$$

$$P = 2^{2 \cdot 1 - 1} = 2^1 = 2$$

$$L \leq P$$

$$T(n): \frac{(2n)!}{n!\,n!} \le 2^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0): \frac{(2n_0)!}{n_0!n_0!} \le 2^{2n_0-1}$

Teza: $T(n_0+1): \frac{\left(2(n_0+1)\right)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} \le 2^{2n_0+1}$

$$T(n):\ \frac{(2n)!}{n!\,n!} \leq 2^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0):\ \frac{(2n_0)!}{n_0!n_0!} \leq 2^{2n_0-1}$

Teza: $T(n_0+1):\ \frac{\big(2(n_0+1)\big)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} \leq 2^{2n_0+1}$

Dowód: $L = \frac{\big(2(n_0+1)\big)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} = \frac{(2n_0+2)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!}$

$$T(n): \frac{(2n)!}{n!\,n!} \leq 2^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0): \frac{(2n_0)!}{n_0!n_0!} \leq 2^{2n_0-1}$

Teza: $T(n_0+1): \frac{\big(2(n_0+1)\big)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} \leq 2^{2n_0+1}$

Dowód: $L = \frac{\big(2(n_0+1)\big)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} = \frac{(2n_0+2)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} = \frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)\cdot(2n_0)!}{(n_0+1)n_0!(n_0+1)n_0!}$

$$T(n): \frac{(2n)!}{n!\,n!} \leq 2^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0): \frac{(2n_0)!}{n_0!n_0!} \leq 2^{2n_0-1}$

Teza: $T(n_0+1): \frac{\left(2(n_0+1)\right)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} \leq 2^{2n_0+1}$

Dowód: $L = \frac{\left(2(n_0+1)\right)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} = \frac{(2n_0+2)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} = \frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)\cdot(2n_0)!}{(n_0+1)n_0!(n_0+1)n_0!} =$
$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot \frac{(2n_0)!}{n_0!n_0!}$

$$T(n): \frac{(2n)!}{n!\,n!} \leq 2^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0): \frac{(2n_0)!}{n_0!n_0!} \leq 2^{2n_0-1}$

Teza: $T(n_0 + 1): \frac{\left(2(n_0+1)\right)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} \leq 2^{2n_0+1}$

Dowód: $L = \frac{\left(2(n_0+1)\right)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} = \frac{(2n_0+2)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} = \frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)\cdot(2n_0)!}{(n_0+1)n_0!(n_0+1)n_0!} =$
$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot \frac{(2n_0)!}{n_0!n_0!} \leq \frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot 2^{2n_0-1}$

$$T(n): \frac{(2n)!}{n!\,n!} \leq 2^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0): \frac{(2n_0)!}{n_0!n_0!} \leq 2^{2n_0-1}$

Teza: $T(n_0+1): \frac{\big(2(n_0+1)\big)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} \leq 2^{2n_0+1}$

Dowód: $L = \frac{\big(2(n_0+1)\big)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} = \frac{(2n_0+2)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} = \frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)\cdot(2n_0)!}{(n_0+1)n_0!(n_0+1)n_0!} =$
$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot \frac{(2n_0)!}{n_0!n_0!} \leq \frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot 2^{2n_0-1}$

Chcemy pokazać, że:

$$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot 2^{2n_0-1} \leq 2^{2n_0+1}, n_0 \in \mathbb{N}$$

Chcemy pokazać, że:

$$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2}\cdot 2^{2n_0-1}\leq 2^{2n_0+1}, n_0\in\mathbb{N}$$

Przypuśćmy, że:

$$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2}\cdot 2^{2n_0-1}> 2^{2n_0+1}, n_0\in\mathbb{N}$$

Chcemy pokazać, że:

$$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot 2^{2n_0-1} \leq 2^{2n_0+1}, n_0 \in \mathbb{N}$$

Przypuśćmy, że:

$$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot 2^{2n_0-1} > 2^{2n_0+1}, n_0 \in \mathbb{N}$$

$$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot 2^{2n_0-1} > 2^{2n_0+1} \quad |: 2^{2n_0-1}$$

Chcemy pokazać, że:

$$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot 2^{2n_0-1} \leq 2^{2n_0+1}, n_0 \in \mathbb{N}$$

Przypuśćmy, że:

$$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot 2^{2n_0-1} > 2^{2n_0+1}, n_0 \in \mathbb{N}$$

$$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot 2^{2n_0-1} > 2^{2n_0+1} \quad |: 2^{2n_0-1}$$

$$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} > 2^2 \quad | \cdot (n_0+1)^2$$

Chcemy pokazać, że:

$$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2}\cdot 2^{2n_0-1} \leq 2^{2n_0+1}, n_0 \in \mathbb{N}$$

Przypuśćmy, że:

$$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2}\cdot 2^{2n_0-1} > 2^{2n_0+1}, n_0 \in \mathbb{N}$$

$$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2}\cdot 2^{2n_0-1} > 2^{2n_0+1} \quad |: 2^{2n_0-1}$$

$$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} > 2^2 \quad | \cdot (n_0+1)^2$$

$$(2n_0+2)\cdot(2n_0+1) > 4\cdot(n_0+1)^2$$

Chcemy pokazać, że:

$$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot 2^{2n_0-1} \leq 2^{2n_0+1}, n_0 \in \mathbb{N}$$

Przypuśćmy, że:

$$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot 2^{2n_0-1} > 2^{2n_0+1}, n_0 \in \mathbb{N}$$

$$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot 2^{2n_0-1} > 2^{2n_0+1} \quad |: 2^{2n_0-1}$$

$$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} > 2^2 \quad | \cdot (n_0+1)^2$$

$$(2n_0+2)\cdot(2n_0+1) > 4\cdot(n_0+1)^2$$

$$4{n_0}^2 + 2n_0 + 4n_0 + 2 > 4\cdot({n_0}^2 + 2n_0 + 1)$$

Chcemy pokazać, że:

$$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot 2^{2n_0-1} \leq 2^{2n_0+1}, n_0 \in \mathbb{N}$$

Przypuśćmy, że:

$$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot 2^{2n_0-1} > 2^{2n_0+1}, n_0 \in \mathbb{N}$$

$$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot 2^{2n_0-1} > 2^{2n_0+1} \quad |: 2^{2n_0-1}$$

$$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} > 2^2 \quad | \cdot (n_0+1)^2$$

$$(2n_0+2)\cdot(2n_0+1) > 4\cdot(n_0+1)^2$$

$$4{n_0}^2 + 2n_0 + 4n_0 + 2 > 4\cdot({n_0}^2 + 2n_0 + 1)$$

$$4{n_0}^2 + 2n_0 + 4n_0 + 2 > 4{n_0}^2 + 8n_0 + 4$$

$$4{n_0}^2 + 2n_0 + 4n_0 + 2 > 4{n_0}^2 + 8n_0 + 4$$

$$-2n_0 - 2 > 0$$

$$4{n_0}^2 + 2n_0 + 4n_0 + 2 > 4{n_0}^2 + 8n_0 + 4$$

$$-2n_0 - 2 > 0$$

$$2n_0 + 2 < 0$$

$$4{n_0}^2 + 2n_0 + 4n_0 + 2 > 4{n_0}^2 + 8n_0 + 4$$

$$-2n_0 - 2 > 0$$

$$2n_0 + 2 < 0$$

$$n_0 < -1$$

$$4{n_0}^2 + 2n_0 + 4n_0 + 2 > 4{n_0}^2 + 8n_0 + 4$$

$$-2n_0 - 2 > 0$$

$$2n_0 + 2 < 0$$

$$n_0 < -1$$

sprzeczność z założeniem ($n_0 \in \mathbb{N}$), zatem:

$$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot 2^{2n_0-1} \leq 2^{2n_0+1}, n_0 \in \mathbb{N}$$

$$T(n)\colon \frac{(2n)!}{n!\,n!} \leq 2^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)\colon \frac{(2n_0)!}{n_0!n_0!} \leq 2^{2n_0-1}$

Teza: $T(n_0+1)\colon \frac{\big(2(n_0+1)\big)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} \leq 2^{2n_0+1}$

Dowód: $L = \frac{\big(2(n_0+1)\big)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} = \frac{(2n_0+2)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} = \frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)\cdot(2n_0)!}{(n_0+1)n_0!(n_0+1)n_0!} =$
$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot \frac{(2n_0)!}{n_0!n_0!} \leq \frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot 2^{2n_0-1}$

$$T(n): \frac{(2n)!}{n!\,n!} \leq 2^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0): \frac{(2n_0)!}{n_0!n_0!} \leq 2^{2n_0-1}$

Teza: $T(n_0+1): \frac{\big(2(n_0+1)\big)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} \leq 2^{2n_0+1}$

Dowód: $L = \frac{\big(2(n_0+1)\big)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} = \frac{(2n_0+2)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} = \frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)\cdot(2n_0)!}{(n_0+1)n_0!(n_0+1)n_0!} =$
$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot \frac{(2n_0)!}{n_0!n_0!} \leq \frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot 2^{2n_0-1} \leq 2^{2n_0+1} = P$

$T(n)\colon \dfrac{(2n)!}{n!\,n!} \leq 2^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)\colon \frac{(2n_0)!}{n_0!n_0!} \leq 2^{2n_0-1}$

Teza: $T(n_0+1)\colon \frac{\left(2(n_0+1)\right)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} \leq 2^{2n_0+1}$

Dowód: $L = \frac{\left(2(n_0+1)\right)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} = \frac{(2n_0+2)!}{(n_0+1)!(n_0+1)!} = \frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)\cdot(2n_0)!}{(n_0+1)n_0!(n_0+1)n_0!} =$
$\frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot \frac{(2n_0)!}{n_0!n_0!} \leq \frac{(2n_0+2)\cdot(2n_0+1)}{(n_0+1)^2} \cdot 2^{2n_0-1} \leq 2^{2n_0+1} = P$

Na mocy zasady indukcji matematycznej $T(n)$ zachodzi dla $n \in \mathbb{N}$.