# Matematyka Dyskretna

## 5. Teoria grafów

*Drzewa, grafy dwudzielne, drogi i cykle Hamiltona*

Funkcja $f: X \to Y$ jest „na” (jest **surjekcją**), jeśli $f(X) = Y$.

Funkcja $f: X \to Y$ jest „różnowartościowa” (jest **iniekcją**), jeśli:

$$\forall_{a,b \in X}\, a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b).$$

Funkcja $f: X \to Y$ jest **bijekcją**, jeśli jest różnowartościowa i „na”.

# Grafy:

- $G_1 = (V(G_1), E(G_1), \gamma_1(G_1))$
- $G_2 = (V(G_2), E(G_2), \gamma_2(G_2))$

są **izomorficzne**, jeśli istnieją bijekcje:

$$f: V(G_1) \to V(G_2),\ g: E(G_1) \to E(G_2)$$

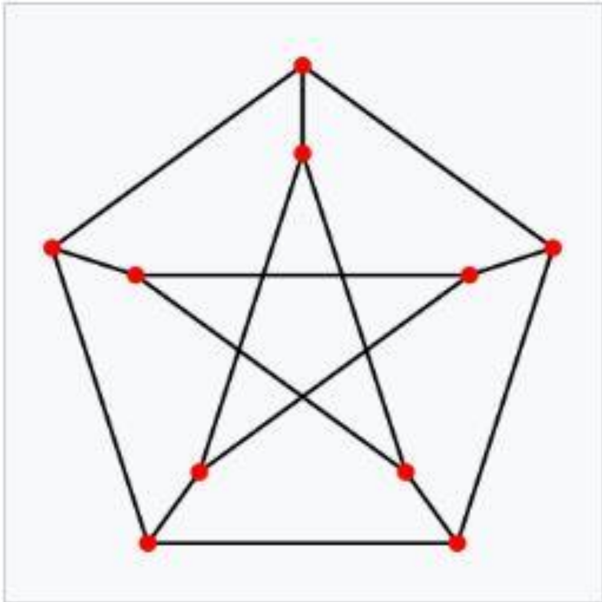
takie, że:

$$\gamma_1(e) = \{v_l, v_k\} \Leftrightarrow \gamma_2\big(g(e)\big) = \{f(v_l), f(v_k)\}$$

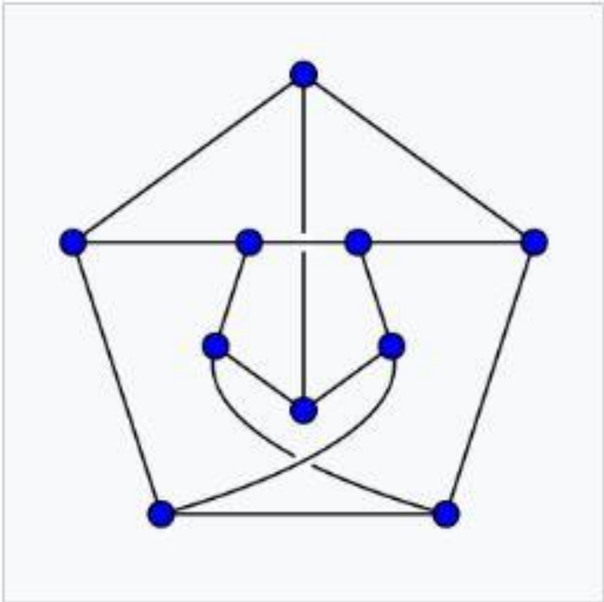
Izomorfizm grafów zachowuje wszystkie cechy grafu, tj.:

- liczbę wierzchołków,
- liczbę krawędzi,
- liczbę krawędzi wielokrotnych,
- liczbę pętli,
- stopnie wierzchołków.

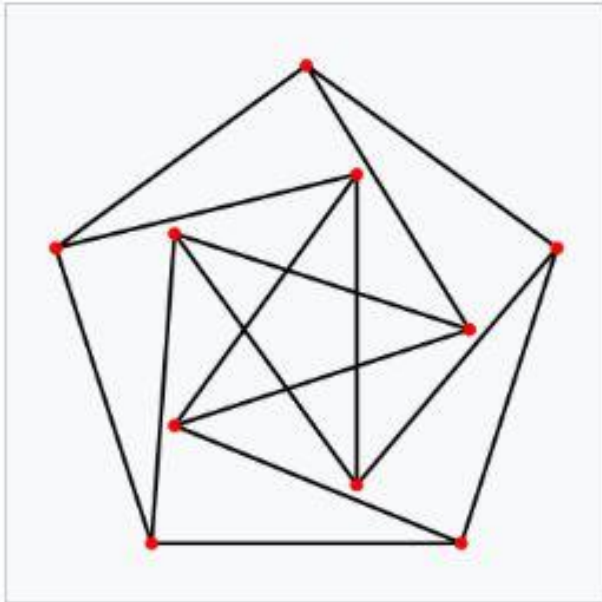
- **Graf Petersena** Nazwa pochodzi od nazwiska duńskiego matematyka J. Petersena, któremu przypisuje się pierwszą publikację na temat grafu w 1898 roku.



Graf Petersena



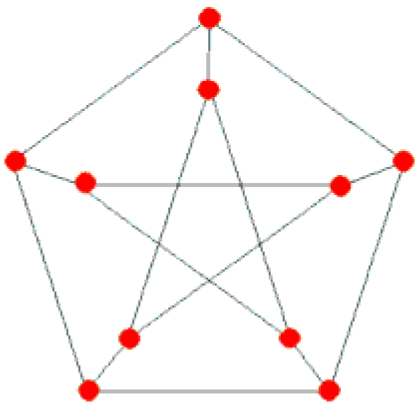
Graf Petersena narysowany z dwoma przecięciami.



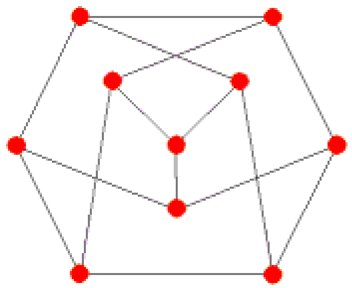
Graf Petersena narysowany tak, że wszystkie krawędzie są tej samej długości.

# Który z grafów jest izomorficzny z grafem A ?

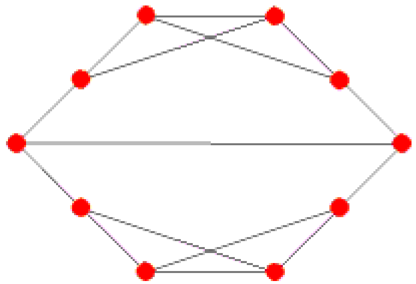
A:



B:

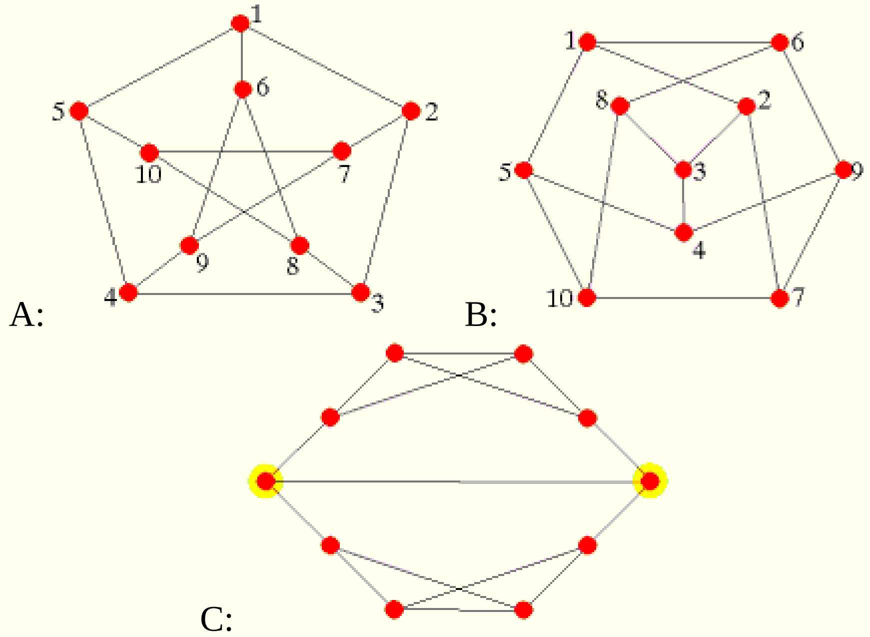


C:



**Graf B jest izomorficzny z grafem A. Na rysunku podano bijekcję między wierzchołkami obu grafów.**

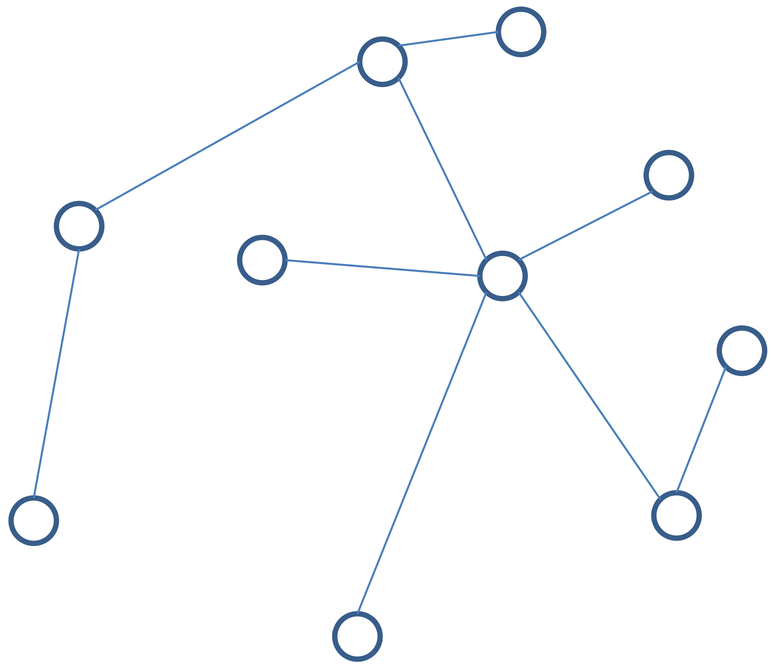
**Graf C nie jest izomorficzny z grafem A, gdyż usunięcie dwóch zaznaczonych wierzchołków spowoduje, że graf przestanie być spójny. W grafie A takie wierzchołki nie istnieją.**



**Drzewem** $T$ nazywamy każdy graf spójny i acykliczny.

Z acykliczności wynika brak krawędzi wielokrotnych i pętli w każdym drzewie.

Wierzchołki stopnia 1 w drzewie nazywamy **liśćmi**.



# Drzewo

Jeśli graf $G$ jest drzewem, to:

- każde dwa wierzchołki grafu $G$ połączone są dokładnie jedną drogą prostą,
- graf $G$ przestaje być spójny po usunięciu dowolnej krawędzi,
- graf $G$ przestaje być acykliczny po dodaniu jakiejkolwiek krawędzi.

1. Jeśli graf $G$ jest drzewem, to każde dwa wierzchołki grafu $G$ połączone są dokładnie jedną drogą prostą.

Dowód:

1. Jeśli graf $G$ jest drzewem, to każde dwa wierzchołki grafu $G$ połączone są dokładnie jedną drogą prostą.

Dowód: Niech graf $G$ będzie drzewem. Przypuśćmy, że:

- istnieją dwa wierzchołki, które nie są połączone drogą prostą.

1. Jeśli graf $G$ jest drzewem, to każde dwa wierzchołki grafu $G$ połączone są dokładnie jedną drogą prostą.

Dowód: Niech graf $G$ będzie drzewem. Przypuśćmy, że:

- istnieją dwa wierzchołki, które nie są połączone drogą prostą. Zatem graf $G$ nie jest spójny. Sprzeczność, bo graf $G$ jest drzewem.

1. Jeśli graf $G$ jest drzewem, to każde dwa wierzchołki grafu $G$ połączone są dokładnie jedną drogą prostą.

Dowód: Niech graf $G$ będzie drzewem. Przypuśćmy, że:

- istnieją dwa wierzchołki, które nie są połączone drogą prostą. Zatem graf $G$ nie jest spójny. Sprzeczność, bo graf $G$ jest drzewem.
- istnieją dwa wierzchołki połączone dwoma drogami prostymi.

1. Jeśli graf $G$ jest drzewem, to każde dwa wierzchołki grafu $G$ połączone są dokładnie jedną drogą prostą.

Dowód: Niech graf $G$ będzie drzewem. Przypuśćmy, że:

- istnieją dwa wierzchołki, które nie są połączone drogą prostą. Zatem graf $G$ nie jest spójny. Sprzeczność, bo graf $G$ jest drzewem.
- istnieją dwa wierzchołki połączone dwoma drogami prostymi. Zatem istnieje cykl prosty w grafie $G$. Sprzeczność, bo graf $G$ jest drzewem.

2. Jeśli graf $G$ jest drzewem, to przestaje być spójny po usunięciu dowolnej krawędzi.

Dowód:

2. Jeśli graf $G$ jest drzewem, to przestaje być spójny po usunięciu dowolnej krawędzi.

Dowód: Niech graf $G$ będzie drzewem. Przypuśćmy, że po usunięciu dowolnej krawędzi $e_k$ pomiędzy dowolnymi wierzchołkami $v_i$ i $v_j$ jest spójny.

2. Jeśli graf $G$ jest drzewem, to przestaje być spójny po usunięciu dowolnej krawędzi.

Dowód: Niech graf $G$ będzie drzewem. Przypuśćmy, że po usunięciu dowolnej krawędzi $e_k$ pomiędzy dowolnymi wierzchołkami $v_i$ i $v_j$ jest spójny. Czyli pomiędzy $v_i$ i $v_j$ istnieje droga prosta. Zatem przed usunięciem krawędzi $e_k$ istniał cykl prosty w grafie $G$. Sprzeczność, bo graf $G$ jest drzewem.

3. Jeśli graf $G$ jest drzewem, to przestaje być acykliczny po dodaniu jakiejkolwiek krawędzi.

Dowód:

3. Jeśli graf $G$ jest drzewem, to przestaje być acykliczny po dodaniu jakiejkolwiek krawędzi.

Dowód: Niech graf $G$ będzie drzewem. Weźmy dwa dowolne wierzchołki $v_i$ i $v_j$. Istnieje pomiędzy nimi droga prosta. Po dodaniu pomiędzy nimi krawędzi …

3. Jeśli graf $G$ jest drzewem, to przestaje być acykliczny po dodaniu jakiejkolwiek krawędzi.

Dowód: Niech graf $G$ będzie drzewem. Weźmy dwa dowolne wierzchołki $v_i$ i $v_j$. Istnieje pomiędzy nimi droga prosta. Po dodaniu pomiędzy nimi krawędzi powstaje cykl prosty,
a zatem graf $G$ przestaje być acykliczny.

Drzewo o $n$ wierzchołkach ma dokładnie $n - 1$ krawędzi.

$T(n)$: Drzewo o $n$ wierzchołkach ma dokładnie $n-1$ krawędzi, $n \in \mathbb{N}$.

Krok 1:

$T(1)$:

$T(n)$: Drzewo o $n$ wierzchołkach ma dokładnie $n-1$ krawędzi, $n \in \mathbb{N}$.

Krok 1:

$T(1)$:

Weźmy drzewo o $1$ wierzchołku. Drzewo takie ma $0$ krawędzi.

$T(n)$: Drzewo o $n$ wierzchołkach ma dokładnie $n - 1$ krawędzi, $n \in \mathbb{N}$.

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

$T(n)$: Drzewo o $n$ wierzchołkach ma dokładnie $n - 1$ krawędzi, $n \in \mathbb{N}$.

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: Drzewo o $n_0$ wierzchołkach ma dokładnie $n_0 - 1$ krawędzi.

$T(n)$: Drzewo o $n$ wierzchołkach ma dokładnie $n-1$ krawędzi, $n \in \mathbb{N}$.

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: Drzewo o $n_0$ wierzchołkach ma dokładnie $n_0 - 1$ krawędzi.

Teza: $T(n_0 + 1)$: Drzewo o $n_0 + 1$ wierzchołkach ma dokładnie $n_0$ krawędzi.

$T(n)$: Drzewo o $n$ wierzchołkach ma dokładnie $n-1$ krawędzi, $n \in \mathbb{N}$.

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: Drzewo o $n_0$ wierzchołkach ma dokładnie $n_0 - 1$ krawędzi.

Teza: $T(n_0 + 1)$: Drzewo o $n_0 + 1$ wierzchołkach ma dokładnie $n_0$ krawędzi.

Dowód: Przy dodawaniu wierzchołka do istniejącego drzewa, dodajemy też dokładnie jedną krawędź. Drzewo o $n_0$

wierzchołkach ma dokładnie $n_0 - 1$ krawędzi. Po dodaniu wierzchołka będzie miało $n_0$ krawędzi.

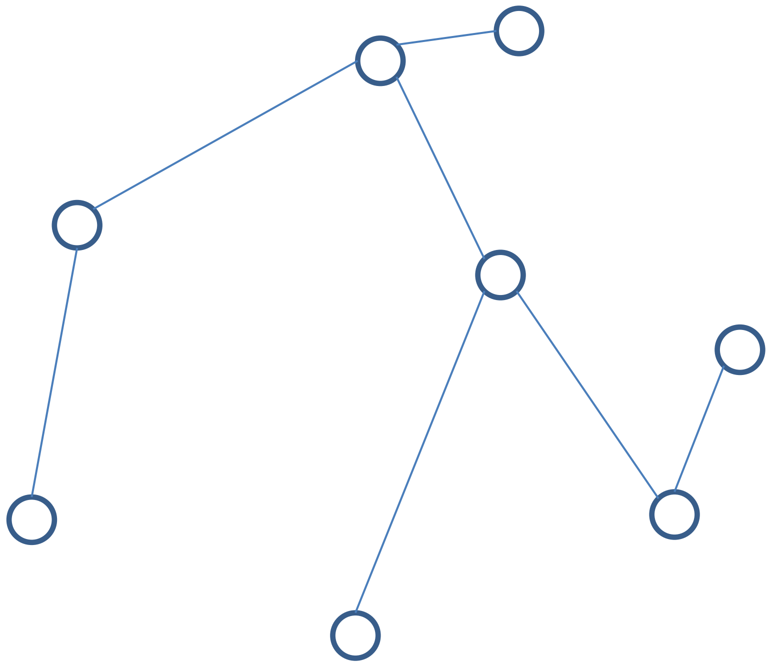
$T(n)$: Drzewo o $n$ wierzchołkach ma dokładnie $n-1$ krawędzi, $n \in \mathbb{N}$.

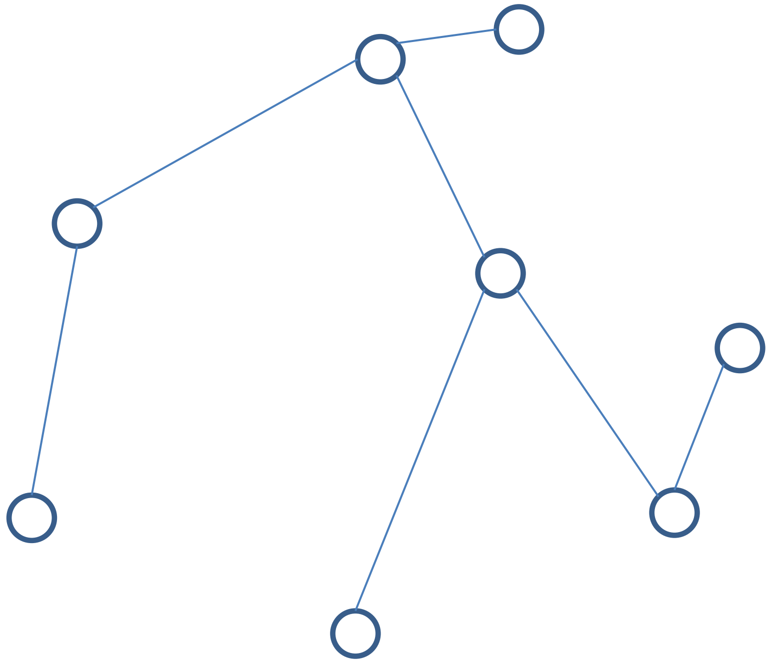
Na mocy zasady indukcji matematycznej $T(n)$ zachodzi dla $n \in \mathbb{N}$.

**Drzewo binarne** to drzewo, w którym wszystkie wierzchołki są co najwyżej $3$ stopnia.

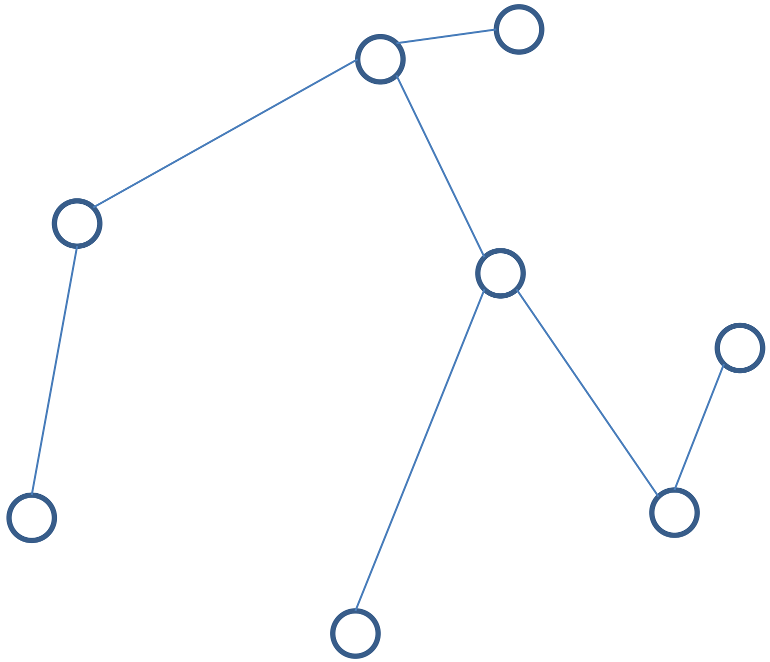
**Ukorzenione drzewo binarne** to drzewo binarne, w którym został wyróżniony jeden wierzchołek stopnia $2$ (zwany korzeniem).

**Drzewo regularne** to ukorzenione drzewo binarne, w którym wszystkie wierzchołki (oprócz korzenia) mają stopień $3$ lub $1$.

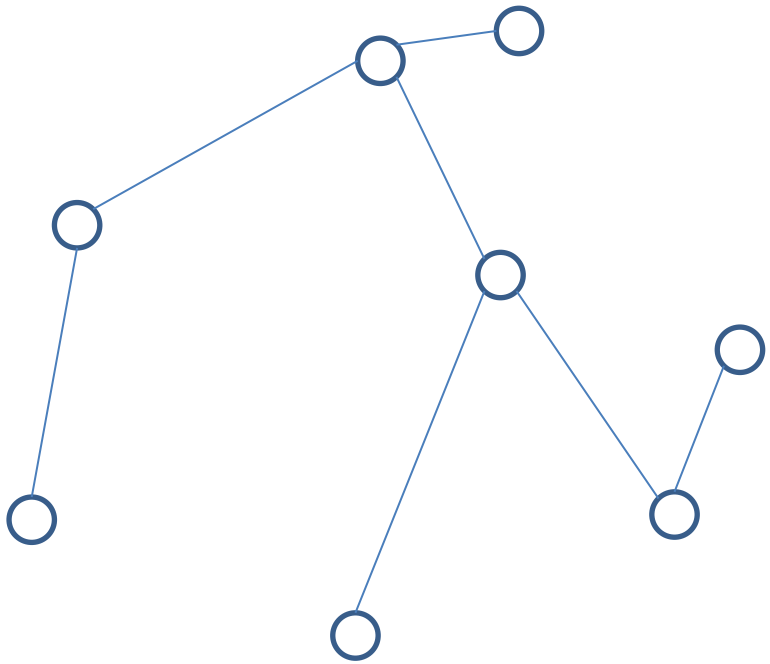




Drzewo binarne?

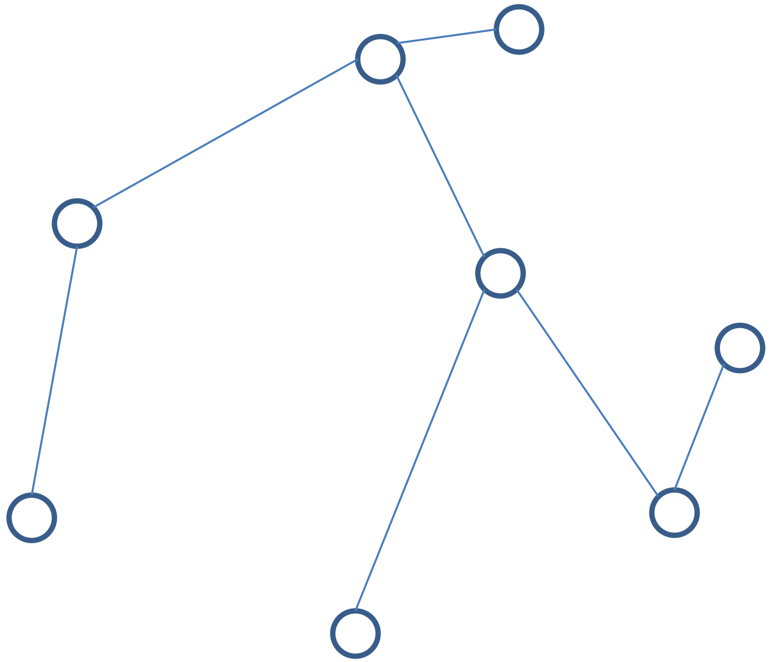


Drzewo binarne? TAK



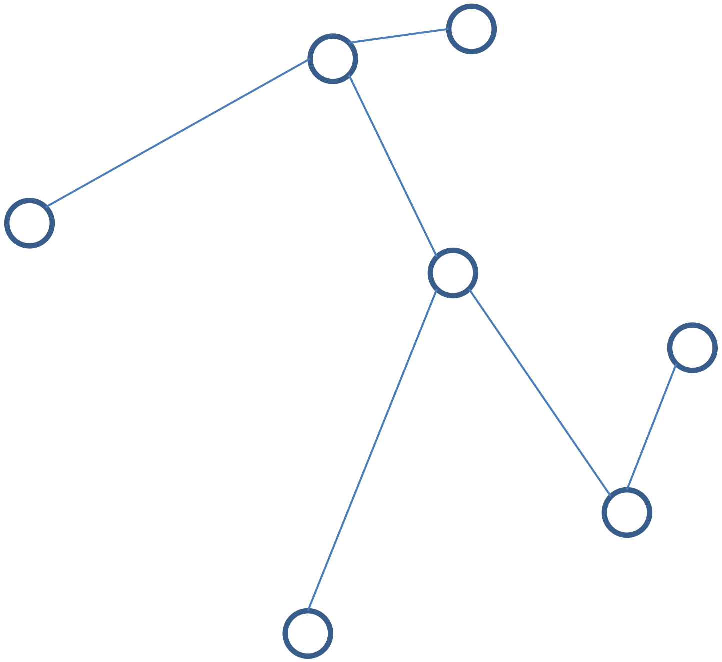
Drzewo binarne? TAK

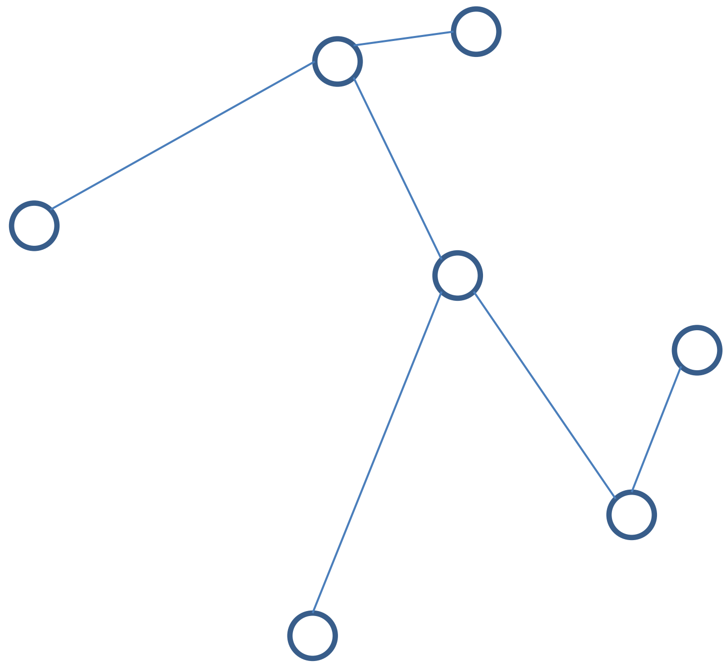
Drzewo regularne?



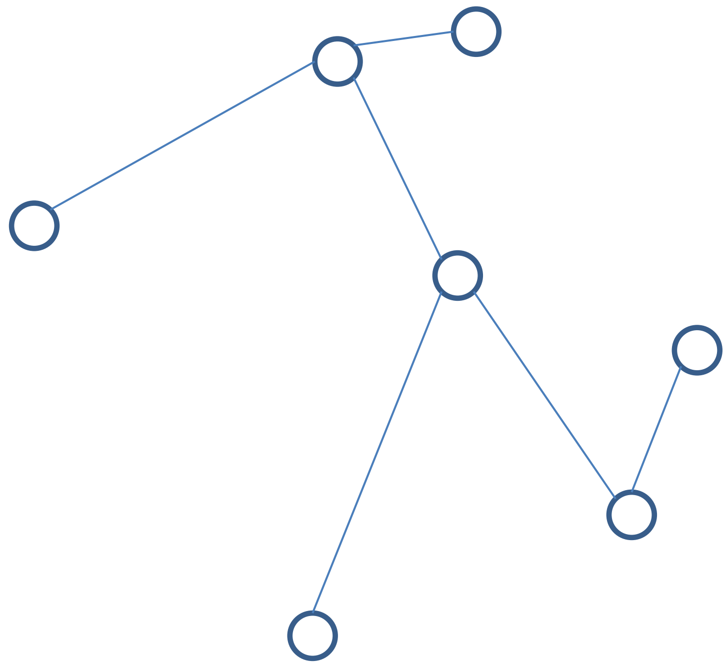
Drzewo binarne? TAK

Drzewo regularne? NIE

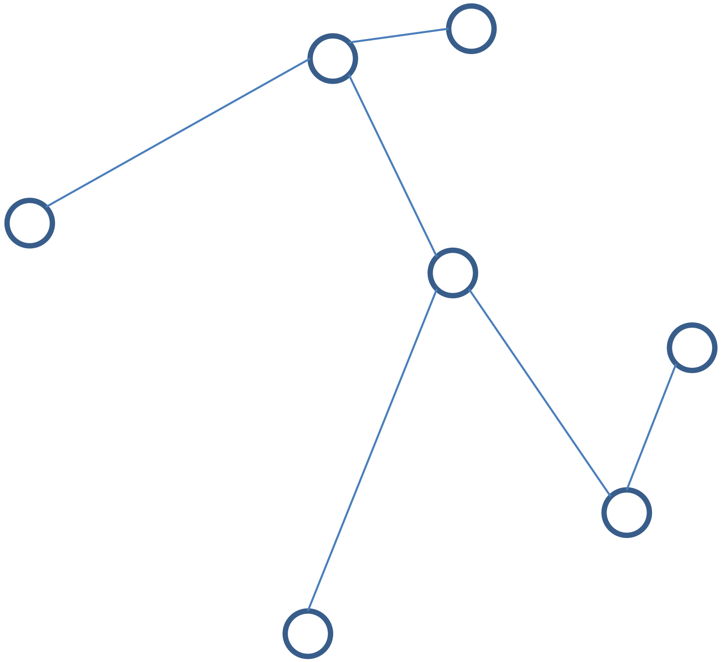




Drzewo binarne?

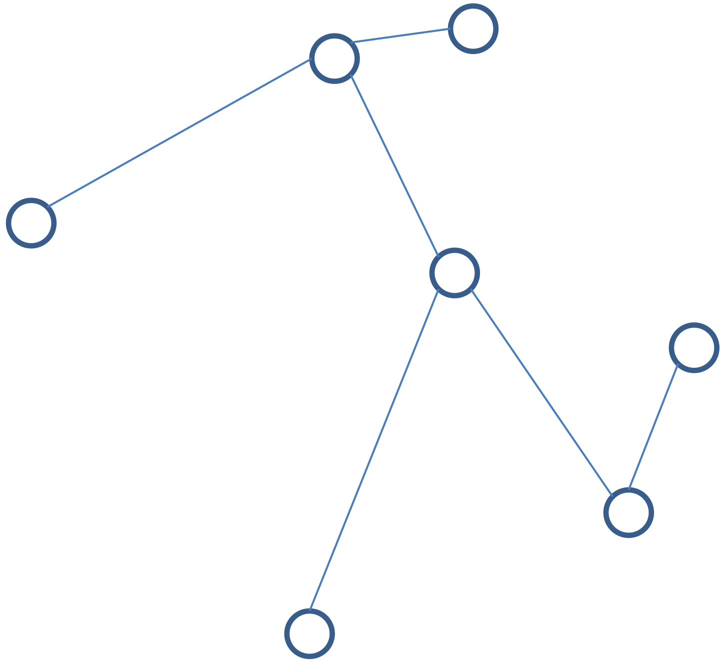


Drzewo binarne? TAK



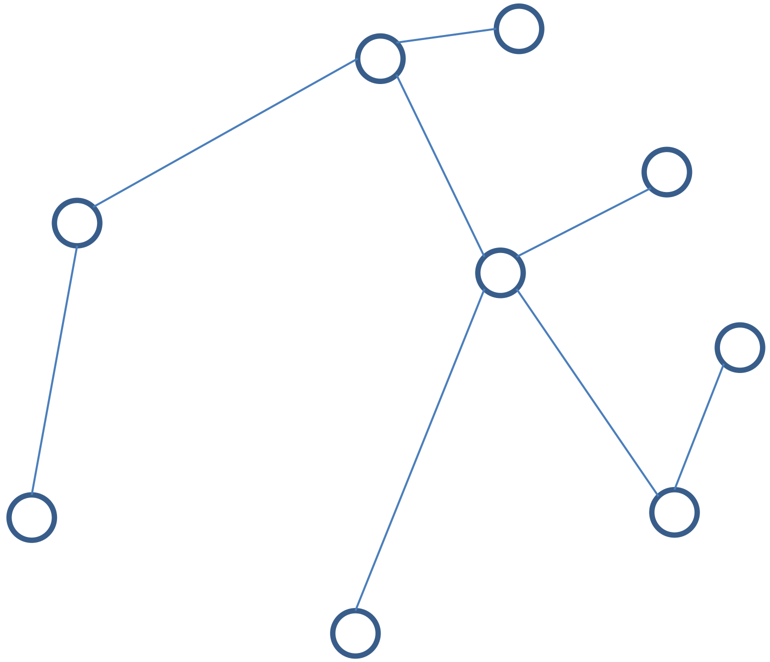
Drzewo binarne? TAK

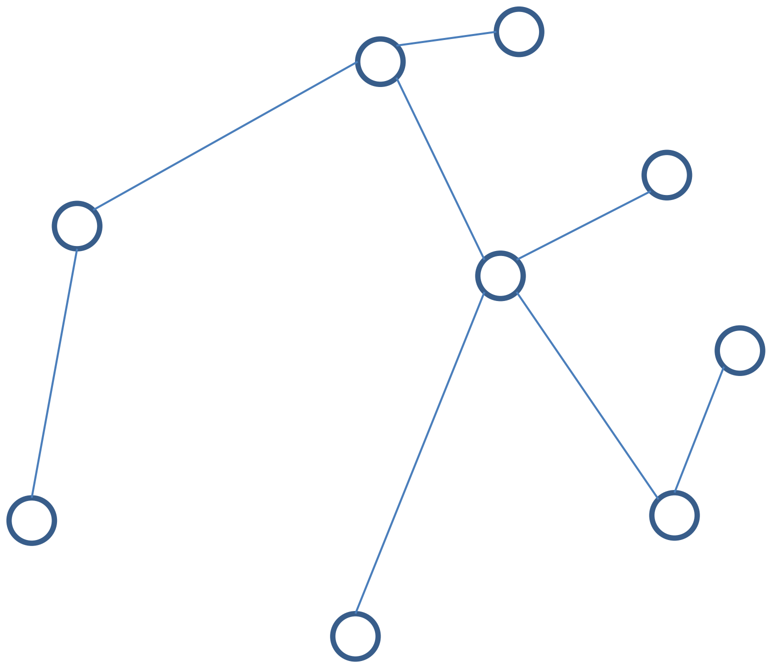
Drzewo regularne?



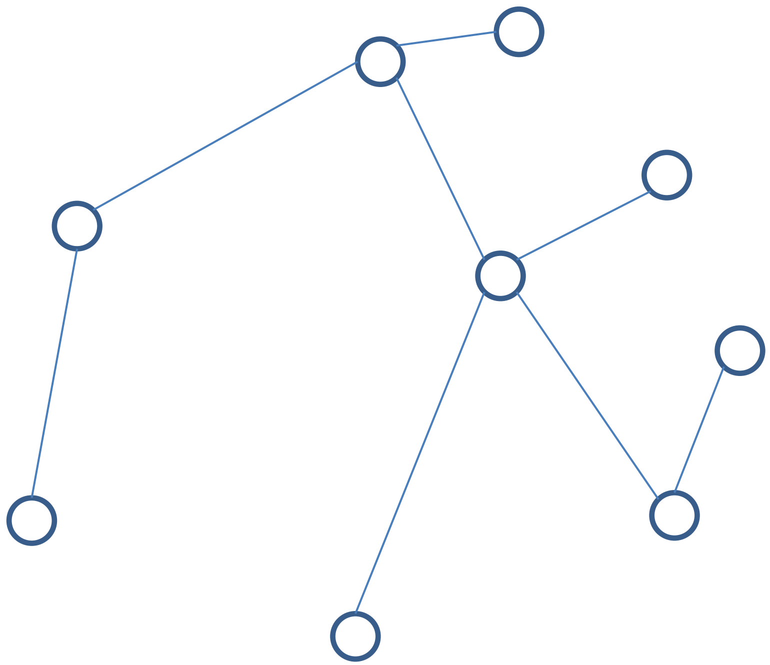
Drzewo binarne? TAK

Drzewo regularne? TAK

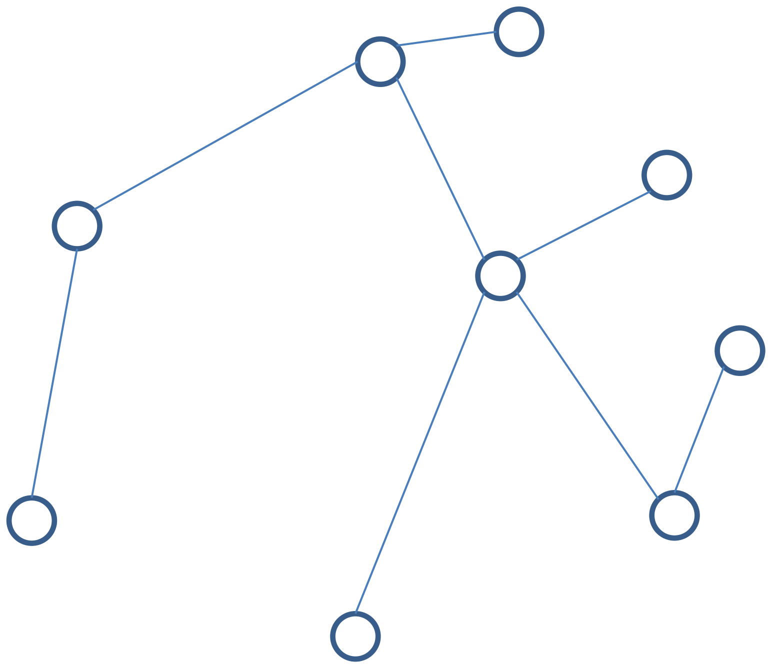




Drzewo binarne?

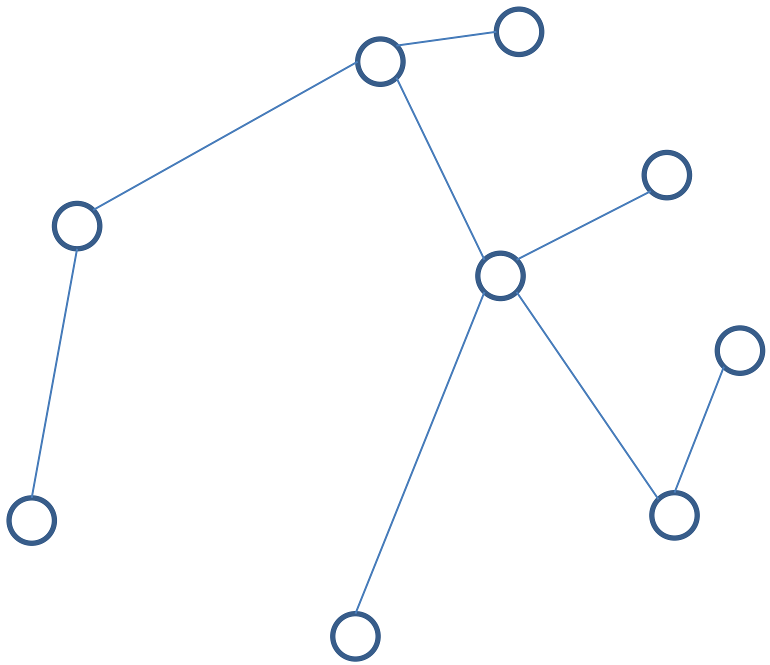


Drzewo binarne? NIE



Drzewo binarne? NIE

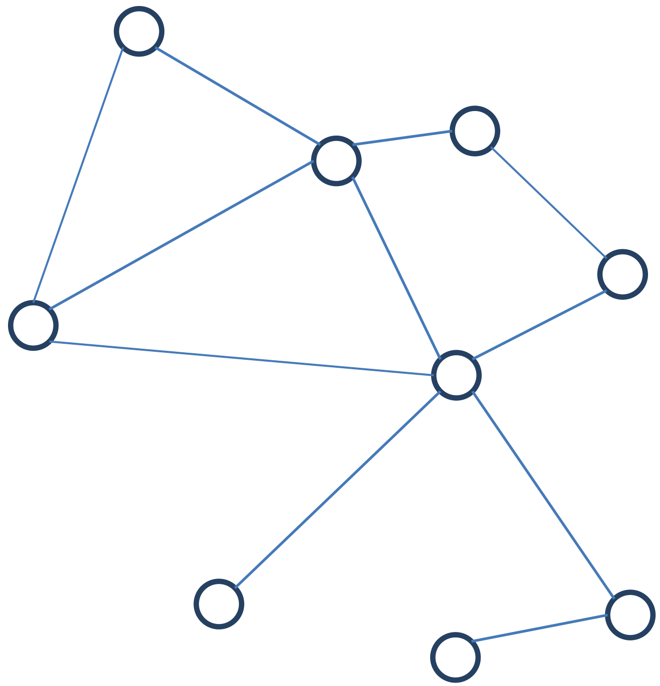
Drzewo regularne?

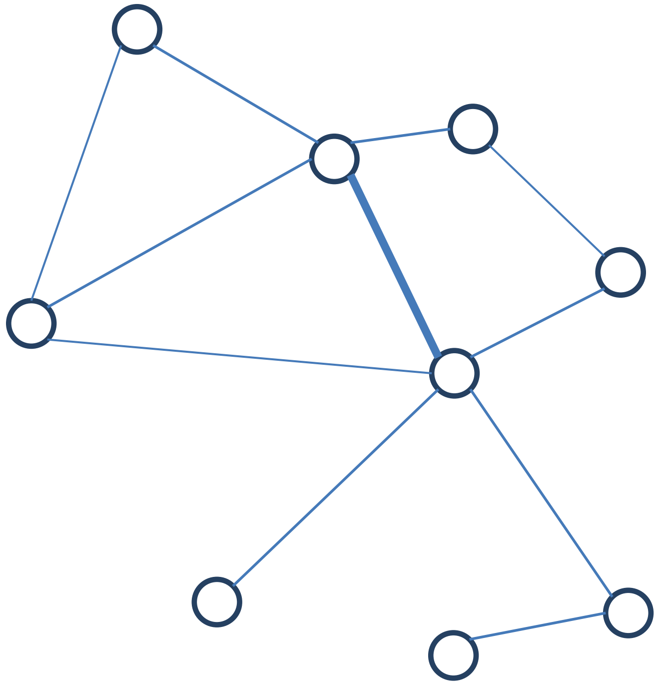


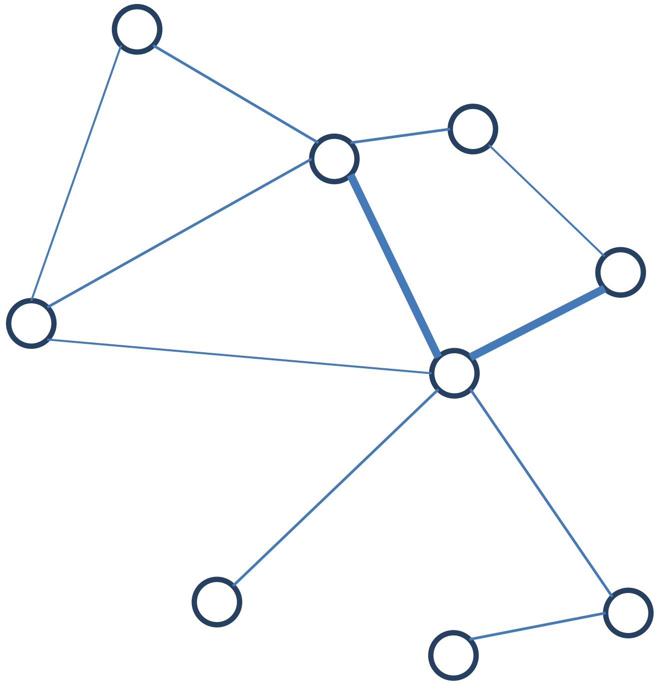
Drzewo binarne? NIE

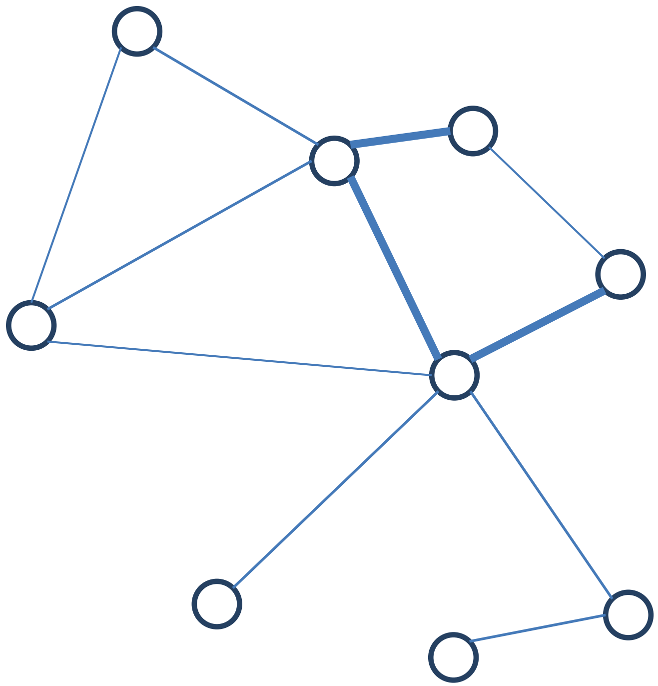
Drzewo regularne? NIE

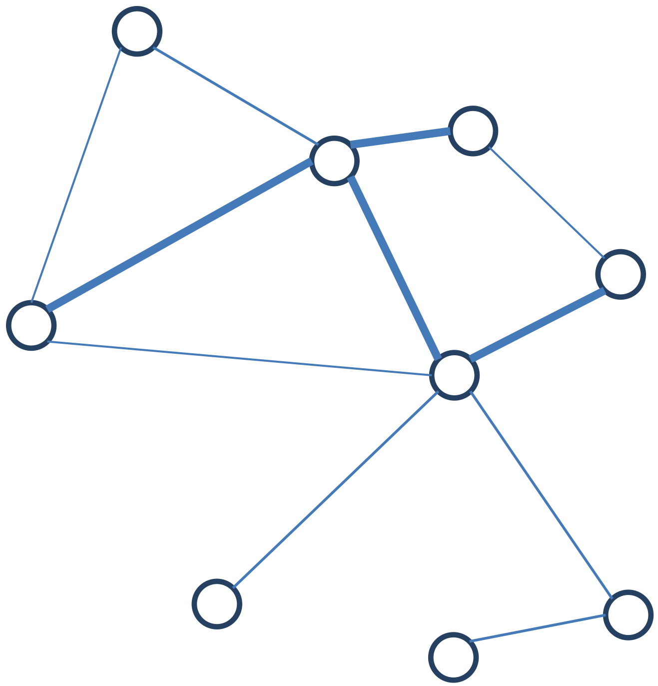
**Drzewem spinającym (rozpinającym)** $\boldsymbol{T}$ **grafu** $\boldsymbol{G}$ nazywamy podgraf grafu $G$, który jest drzewem i zawiera każdy wierzchołek grafu $G$, czyli $V(G) = V(T)$.

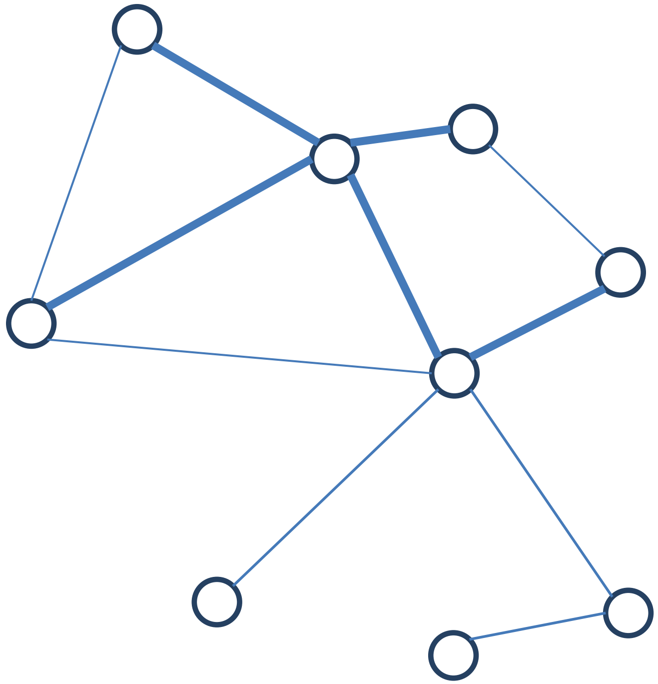


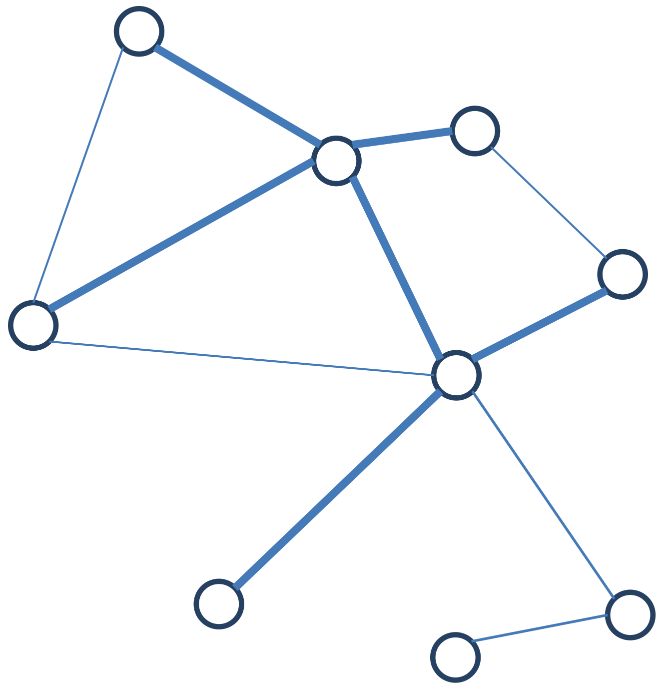


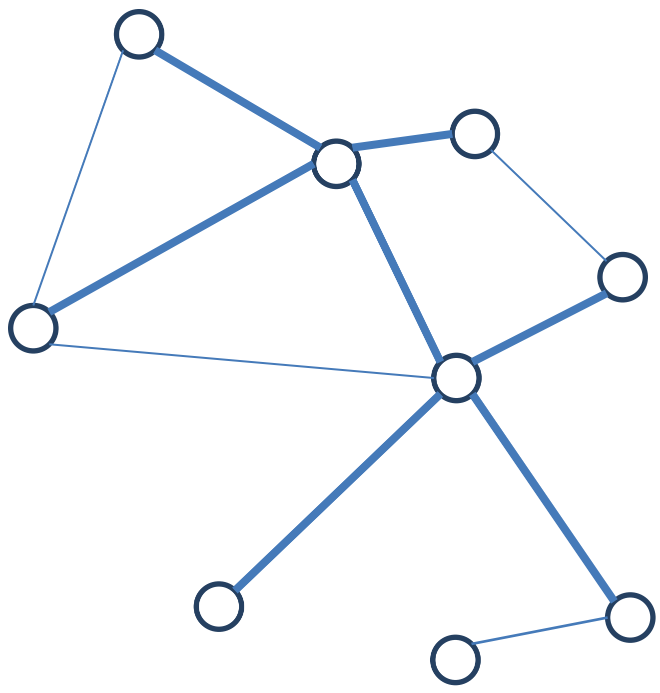


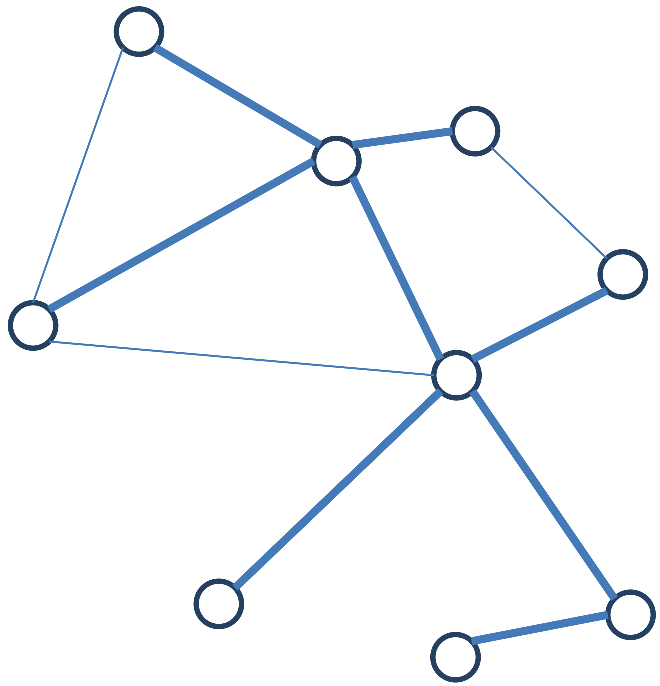


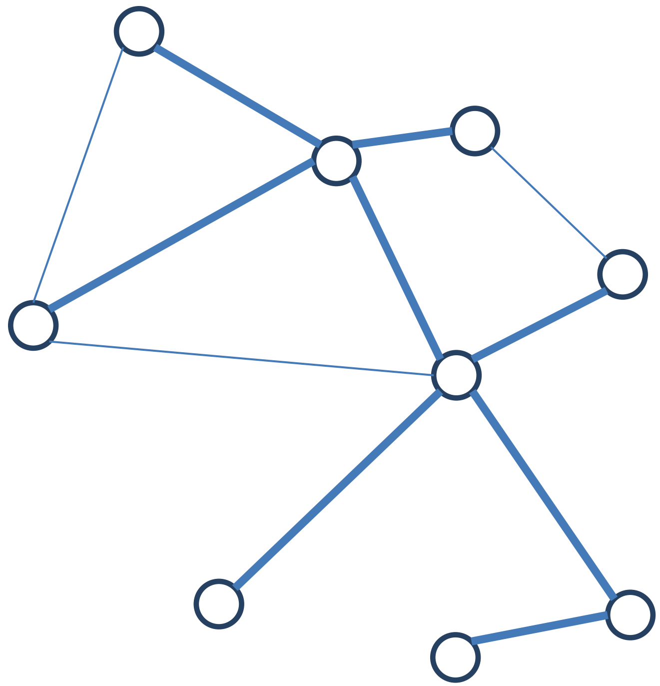












# Drzewo spinające

Graf $G$ jest spójny $\Leftrightarrow$ graf $G$ ma drzewo spinające.

Graf $K_n$ ma $n^{n-2}$ drzew spinających.

Drogę nazywamy **drogą Hamiltona** jeśli przechodzi przez każdy wierzchołek grafu dokładnie jeden raz.

Cykl, który przechodzi przez każdy wierzchołek grafu dokładnie jeden raz, z wyjątkiem ostatniego wierzchołka, którym ponownie jest pierwszy wierzchołek, nazywamy **cyklem Hamiltona**.

Graf mający cykl Hamiltona nazywamy **grafem hamiltonowskim**.

Graf hamiltonowski po dodaniu nowych krawędzi nie przestaje być grafem hamiltonowskim.

**Kodem Gray'a** długości n nazywamy takie uporządkowanie wszystkich $2^n$ ciągów n cyfr binarnych, że kolejne ciągi różnią się dokładnie jedną cyfrą. To samo dotyczy pierwszego i ostatniego ciągu.

Na przykład dla n = 2 uporządkowanie 00, 01, 10, 11 jest złe bo pomiędzy 01 a 10 jest różnica dwóch pozycji, również pomiędzy 11 (ostatnim) a 00 (pierwszym) jest różnica na dwóch pozycjach. Natomiast ciąg 01, 11, 10, 00

jest dobrym ciągiem kodów Gray’a.

Znajdowanie kodów Gray’a jest równoważne znajdowaniu cyklu Hamiltona w grafach $G_n$ gdzie $V(G) = \{0, 1\}^n$, $E(G) = \{\{u,v\} : u, v \in V(G) \wedge$ u i v różnią się dokładnie 1 cyfrą$\}$.

0 | 0 0 0

1 | 0 0 1

2 | 0 1 0

3 | 0 1 1

4 | 1 0 0

5 | 1 0 1

6 | 1 1 0

7 | 1 1 1

Cyklem Hamiltona jest np. ciąg wierzchołków:

{ 0, 1, 3, 7, 5, 4, 6, 2, 0} lub {0, 2, 3, 1, 5, 7, 6, 4, 0}

# Każdy graf $K_n$ dla $n \geq 3$ jest hamiltonowski.

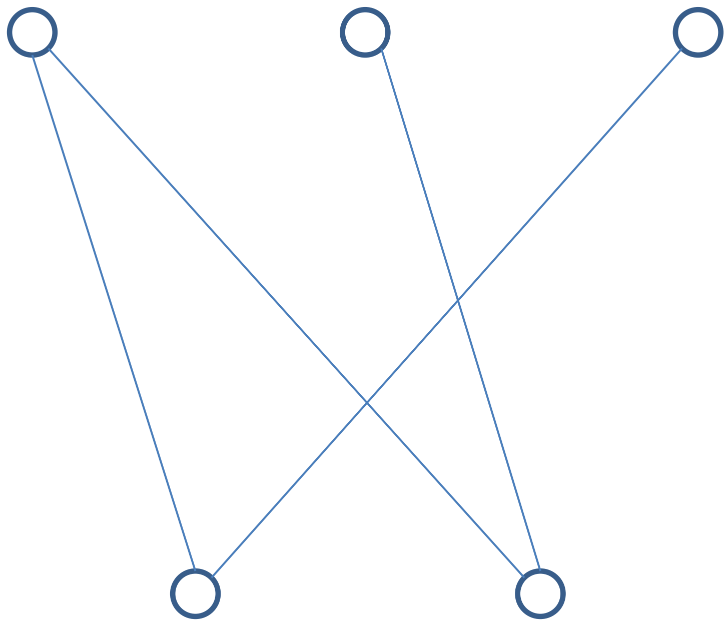
Graf prosty $G$ o co najmniej trzech wierzchołkach jest hamiltonowski jeśli:

$$\bigwedge_{v \in V(G)} \deg(v) \geq \frac{|V(G)|}{2}$$

Graf prosty $G$ jest hamiltonowski jeśli:

$$|E(G)| \geq \frac{1}{2}(|V(G)| - 1)(|V(G)| - 2) + 2$$

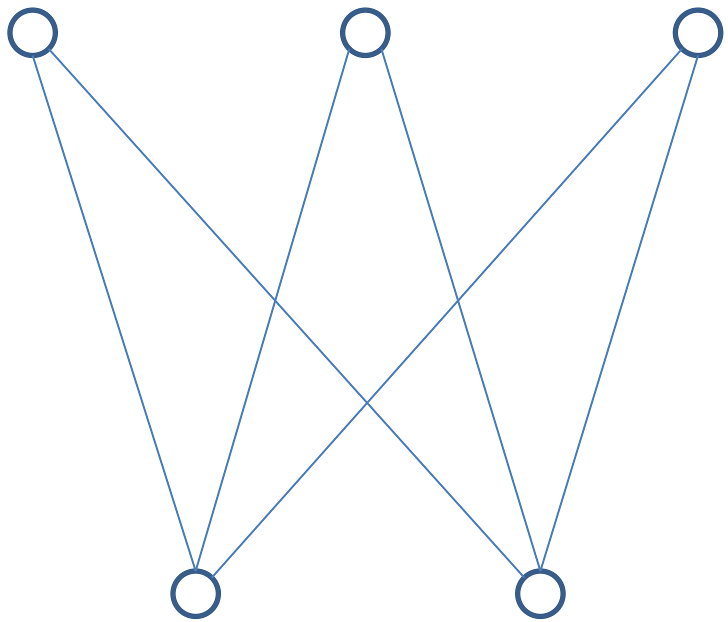
Graf $G$ nazywamy **grafem dwudzielnym** jeśli zbiór $V(G)$ jest sumą dwóch niepustych zbiorów rozłącznych $V_1$ i $V_2$ takich, że każda krawędź w grafie $G$ łączy wierzchołek ze zbioru $V_1$ z wierzchołkiem ze zbioru $V_2$.



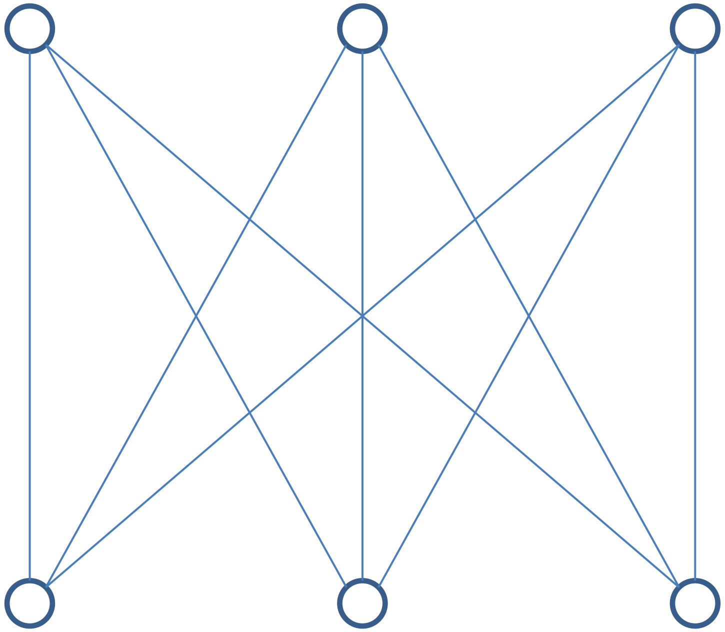
# Graf dwudzielny

Graf dwudzielny $G$ nazywamy **pełnym grafem dwudzielnym** $K_{n,m}$ jeśli $|V_1| = n$ i $|V_2| = m$ oraz każdy wierzchołek zbioru $V_1$ jest połączony **dokładnie jedną** krawędzią z każdym wierzchołkiem zbioru $V_2$.

Grafy $K_{n,m}$ i $K_{m,n}$ są izomorficzne.



Graf pełny dwudzielny $K_{3,2}$



Graf pełny dwudzielny $K_{3,3}$

Załóżmy, że $n + m \geq 3$.

Graf $K_{n,m}$ ma cykl Hamiltona $\Leftrightarrow n = m$.

Graf $K_{n,m}$ ma drogę Hamiltona $\Leftrightarrow |n - m| \leq 1$.

# Kolorowanie

Graf bez pętli G jest **k -kolorowalny** prawidłowo, jeśli każdemu wierzchołkowi można przyporządkować jeden z k kolorów w taki sposób, że wierzchołki sąsiednie mają różne kolory. Przez $\boldsymbol{\chi(G)}$ oznaczamy liczbę chromatyczną grafu G, czyli minimalną wartość k, dla której graf jest k – kolorowalny.

Dla grafu pełnego n – wierzchołkowego

$\chi(K_n) = n$

Graf dwudzielny jest 2 – kolorowalny (bichromatyczny).

Każde drzewo o $n \geq 2$ wierzchołkach jest 2 – kolorowalne.

# Problem 4 barw na przykładzie mapy USA

W1852r. Francis Guthrie zauważył,żemapę hrabstwAnglii można pokolorować 4 barwami i zastanawiał się czy jest to prawdziwe dla każdej mapy. Arthur Cayley w 1878 pierwszy opisał problem. W XIX wieku nie udało się udowodnić tego stwierdzenia.

Poprawny dowód opracowali Kenneth Appel i Wolfgang Haken w 1977r., ale był on poważnie wspierany programem komputerowym. W 1997 roku pojawił się nowy dowód tego wyniku, również wykorzystujący komputer, ale w sposób istotnie mniej skomplikowany. Jego autorami są: Robertson, Sanders, Seymour i Thomas z Atlanty.