Matematyka Dyskretna

7. Dyskretna teoria prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo, prawdopodobieństwo warunkowe, niezależność zdarzeń

Podstawowym narzędziem badawczym nauk przyrodniczych, a także nauk społecznych, jak ekonomia, socjologia, psychologia jest **eksperyment.**

Eksperyment polega na wyizolowaniu zespołu interesujących nas czynników X, przy ustalonym poziomie wszystkich innych, mogących mieć wpływ na wynik doświadczenia, a następnie zbadaniu, jaka jest odpowiedź (reakcja) Y badanego obiektu na zadany poziom czynników X.

Ze względu na odpowiedź obiektu wyróżnia się dwa rodzaje eksperymentów:

1) Eksperyment o odpowiedzi zdeterminowanej – gdy tej samej wartości X (może to być liczba, wektor, funkcja itp.) odpowiada zawsze ta sama, oczywiście z zadaną dokładnością, wartość Y;

2) eksperyment o odpowiedzi niezdeterminowanej – gdy przy powtórzeniach eksperymentu tej samej wartości X odpowiadają różne wartości Y.

Wśród eksperymentów drugiego rodzaju wyróżniamy **eksperymenty losowe**, odznaczające się tzw. **statystyczną regularnością**, która polega na tym, że częstość pojawiania się danej odpowiedzi stabilizuje się ze wzrostem liczby powtórzeń eksperymentu.

W poniższej tabeli przedstawiono wyniki długich serii rzutów monetą.

Nazwisko eksperymentatora	Liczba rzutów	Częstość wyrzucania orła
G.I.I. Buffon (1707-1788)	4092	0,5069
A.De Morgan (1806-1871)	4040	0,5005
W.S. Jevons (1835-1882)	20480	0,5068
W.I.Romanowski (1879-1954)	80640	0,4923
K. Pearson (1857-1936)	12000	0,5016
J.E.Kerrich (1950)	10000	0,5069
W.Feller (1963)	3000	0,5027

Eksperyment (doświadczenie losowe) to każda czynność, która może się zakończyć nie przewidzianym z góry (losowym) wynikiem.

Przestrzeń wszystkich możliwych wyników ustalonego doświadczenia losowego to tzw. **przestrzeń zdarzeń elementarnych**.

W przypadku jednokrotnego rzutu monetą możliwe wyniki eksperymentu to orzeł lub reszka. W przypadku 100-krotnego rzutu monetą zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia składa się ze wszystkich ciągów 100-elementowych, jakie można utworzyć za pomocą orła i reszki, czyli $2^{100} \approx 1{,}268 * 10^{30}$.

Skończona przestrzeń zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

ω_i – **zdarzenie elementarne** – pojedynczy wynik doświadczenia losowego

Zdarzeniem losowym (krócej zdarzeniem) A nazywamy dowolny podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych.

Dla skończonej przestrzeni zdarzeń elementarnych **funkcją prawdopodobieństwa** (**prawdopodobieństwem**) nazywamy dowolną funkcję $P: 2^{\Omega} \to [0,1]$ spełniającą warunki:

1. $P(\Omega) = 1$
2. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własności prawdopodobieństwa:

- $P(\emptyset) = 0$ ($\emptyset$ – zdarzenie niemożliwe)
- $P(A') = 1 - P(A)$ (A' – zdarzenie przeciwne do zdarzenia A)
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

- $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ – parami rozłączne $\Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,, n \geq 2$

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $P(\emptyset) = 0$

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $P(\emptyset) = 0$

Dowód: $A \cap \emptyset = \emptyset$, zatem z w.2:

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $P(\emptyset) = 0$

Dowód: $A \cap \emptyset = \emptyset$, zatem z w.2: $P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $P(\emptyset) = 0$

Dowód: $A \cap \emptyset = \emptyset$, zatem z w.2: $P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$

$P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $P(\emptyset) = 0$

Dowód: $A \cap \emptyset = \emptyset$, zatem z w.2: $P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$

$P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$

$P(A) = P(A) + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0$

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $P(A') = 1 - P(A)$

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $P(A') = 1 - P(A)$

Dowód: $A \cap A' = \emptyset$, zatem z w.2:

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $P(A') = 1 - P(A)$

Dowód: $A \cap A' = \emptyset$, zatem z w.2: $P(A \cup A') = P(A) + P(A')$

z w.1:

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $P(A') = 1 - P(A)$

Dowód: $A \cap A' = \emptyset$, zatem z w.2: $P(A \cup A') = P(A) + P(A')$

z w.1: $1 = P(\Omega) = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $P(A') = 1 - P(A)$

Dowód: $A \cap A' = \emptyset$, zatem z w.2: $P(A \cup A') = P(A) + P(A')$

z w.1: $1 = P(\Omega) = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$

$1 = P(A) + P(A') \Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Dowód: $B = A \cup (B \setminus A)$ oraz $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, zatem z w.2:

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Dowód: $B = A \cup (B \backslash A)$ oraz $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$, zatem z w.2:
$P(A \cup (B \backslash A)) = P(A) + P(B \backslash A)$

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Dowód: $B = A \cup (B \setminus A)$ oraz $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, zatem z w.2:
$P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A)$

$P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A)$

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Dowód: $B = A \cup (B \backslash A)$ oraz $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$, zatem z w.2:

$P(A \cup (B \backslash A)) = P(A) + P(B \backslash A)$

$P(B) = P(A \cup (B \backslash A)) = P(A) + P(B \backslash A)$

$P(B) = P(A) + P(B \backslash A) \Rightarrow$

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Dowód: $B = A \cup (B \backslash A)$ oraz $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$, zatem z w.2:
$P(A \cup (B \backslash A)) = P(A) + P(B \backslash A)$

$P(B) = P(A \cup (B \backslash A)) = P(A) + P(B \backslash A)$

$P(B) = P(A) + P(B \backslash A) \Rightarrow P(B) \geq P(A)$ (bo $P(B \backslash A) \geq 0$)

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$

Dowód: $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$ oraz $(A \backslash B) \cap (A \cap B) = \emptyset$,
zatem z w.2:

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$

Dowód: $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$ oraz $(A \backslash B) \cap (A \cap B) = \emptyset$,
zatem z w.2: $P((A \backslash B) \cup (A \cap B)) = P(A \backslash B) + P(A \cap B)$

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$

Dowód: $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$ oraz $(A \backslash B) \cap (A \cap B) = \emptyset$,
zatem z w.2: $P((A \backslash B) \cup (A \cap B)) = P(A \backslash B) + P(A \cap B)$

$P(A) = P((A \backslash B) \cup (A \cap B)) = P(A \backslash B) + P(A \cap B)$

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$

Dowód: $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$ oraz $(A \backslash B) \cap (A \cap B) = \emptyset$,
zatem z w.2: $P((A \backslash B) \cup (A \cap B)) = P(A \backslash B) + P(A \cap B)$

$P(A) = P((A \backslash B) \cup (A \cap B)) = P(A \backslash B) + P(A \cap B)$

$P(A) = P(A \backslash B) + P(A \cap B)$

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$

Dowód: $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$ oraz $(A \backslash B) \cap (A \cap B) = \emptyset$,
zatem z w.2: $P((A \backslash B) \cup (A \cap B)) = P(A \backslash B) + P(A \cap B)$

$P(A) = P((A \backslash B) \cup (A \cap B)) = P(A \backslash B) + P(A \cap B)$

$P(A) = P(A \backslash B) + P(A \cap B)$

$P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Dowód: $A \cup B = A \cup (B \backslash A)$ oraz $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$,

zatem z w.2:

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Dowód: $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ oraz $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$,

zatem z w.2: $P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A)$

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Dowód: $A \cup B = A \cup (B \backslash A)$ oraz $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$,

zatem z w.2: $P(A \cup (B \backslash A)) = P(A) + P(B \backslash A)$

$P(A \cup B) = P(A \cup (B \backslash A)) = P(A) + P(B \backslash A)$

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Dowód: $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ oraz $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$,

zatem z w.2: $P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A)$

$P(A \cup B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A)$

$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$ (poprzednia własność)

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Dowód: $A \cup B = A \cup (B \backslash A)$ oraz $A \cap (B \backslash A) = \emptyset$,

zatem z w.2: $P(A \cup (B \backslash A)) = P(A) + P(B \backslash A)$

$P(A \cup B) = P(A \cup (B \backslash A)) = P(A) + P(B \backslash A)$

$P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B)$ (poprzednia własność)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Warunki z definicji:

w.1: $P(\Omega) = 1$

w.2: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Własność: $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ – parami rozłączne $\Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,, n \geq 2$

$\{A_i\}_{i=1}^{n}$ – parami rozłączne

$T(n)$: $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,, n \geq 2$

Krok 1:

$T(2)$: $P(A_1 \cup A_2) =$

$\{A_i\}_{i=1}^{n}$ – parami rozłączne

$T(n)$: $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,, n \geq 2$

Krok 1:

$T(2)$: $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ (z w.2)

Krok 1 zachodzi.

$\{A_i\}_{i=1}^{n}$ – parami rozłączne

$T(n)\colon P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,, n \geq 2$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)\colon P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0}\right) = \sum_{i=1}^{n_0} P(A_i)$

Teza: $T(n_0 + 1)\colon P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0+1}\right) = \sum_{i=1}^{n_0+1} P(A_i)$

$\{A_i\}_{i=1}^{n}$ – parami rozłączne

$T(n)$: $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,, n \geq 2$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0}\right) = \sum_{i=1}^{n_0} P(A_i)$

Teza: $T(n_0 + 1)$: $P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0+1}\right) = \sum_{i=1}^{n_0+1} P(A_i)$

Dowód: $L = P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0+1}\right) =$

$\{A_i\}_{i=1}^{n}$ – parami rozłączne

$T(n)$: $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,, n \geq 2$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0}\right) = \sum_{i=1}^{n_0} P(A_i)$

Teza: $T(n_0 + 1)$: $P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0+1}\right) = \sum_{i=1}^{n_0+1} P(A_i)$

Dowód: $L = P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0+1}\right) = P\left((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0}) \cup A_{n_0+1}\right) =$

$\{A_i\}_{i=1}^{n}$ – parami rozłączne

$T(n)$: $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,, n \geq 2$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0}\right) = \sum_{i=1}^{n_0} P(A_i)$

Teza: $T(n_0 + 1)$: $P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0+1}\right) = \sum_{i=1}^{n_0+1} P(A_i)$

Dowód: $L = P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0+1}\right) = P\left((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0}) \cup A_{n_0+1}\right) = P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0}\right) + P\left(A_{n_0+1}\right) =$

$\{A_i\}_{i=1}^{n}$ – parami rozłączne

$T(n)\colon P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,, n \geq 2$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)\colon P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0}\right) = \sum_{i=1}^{n_0} P(A_i)$

Teza: $T(n_0 + 1)\colon P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0+1}\right) = \sum_{i=1}^{n_0+1} P(A_i)$

Dowód: $L = P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0+1}\right) = P\left((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0}) \cup A_{n_0+1}\right) = P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0}\right) + P\left(A_{n_0+1}\right) = \sum_{i=1}^{n_0} P(A_i) + P\left(A_{n_0+1}\right) =$

$\{A_i\}_{i=1}^{n}$ – parami rozłączne

$T(n)$: $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,, n \geq 2$

Krok 2: weźmy dowolne $n_0 \in \mathbb{N}$

Założenie: $T(n_0)$: $P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0}\right) = \sum_{i=1}^{n_0} P(A_i)$

Teza: $T(n_0 + 1)$: $P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0+1}\right) = \sum_{i=1}^{n_0+1} P(A_i)$

Dowód: $L = P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0+1}\right) = P\left((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0}) \cup A_{n_0+1}\right) = P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n_0}\right) + P\left(A_{n_0+1}\right) = \sum_{i=1}^{n_0} P(A_i) + P\left(A_{n_0+1}\right) = \sum_{i=1}^{n_0+1} P(A_i) = P$

Krok 2 zachodzi.

$\{A_i\}_{i=1}^{n}$ – parami rozłączne

$T(n)$: $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,, n \geq 2$

Na mocy zasady indukcji matematycznej $T(n)$ zachodzi dla $n \geq 2$.

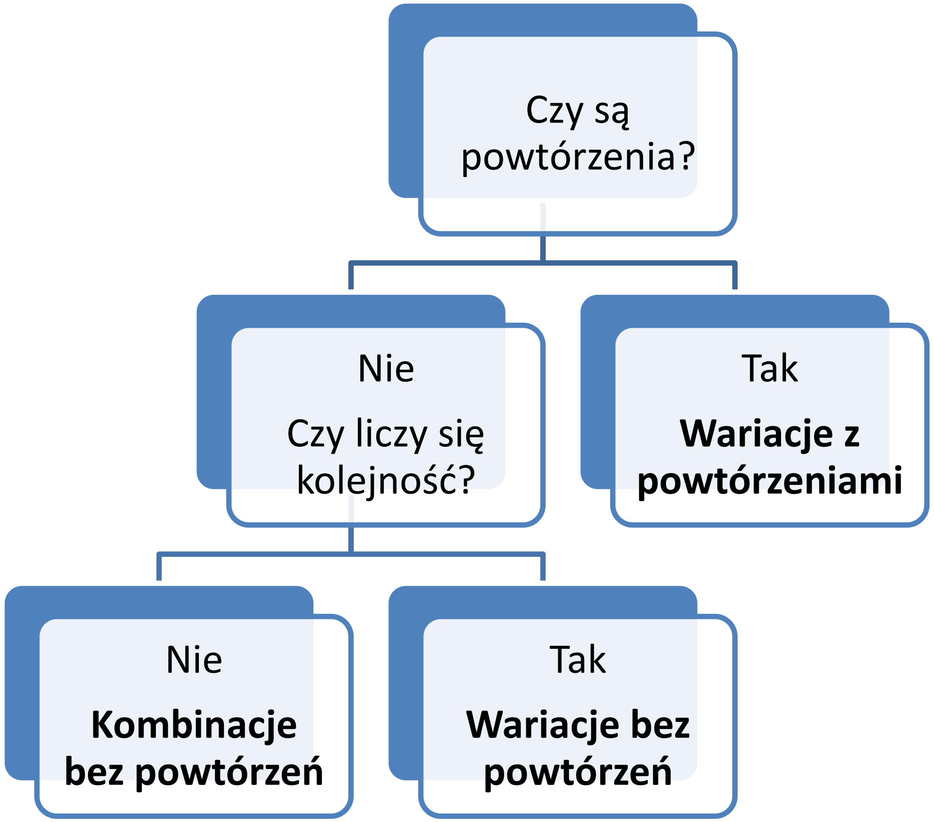
Definicja klasyczna prawdopodobieństwa:

Założenie: wszystkie zdarzenia elementarne **jednakowo prawdopodobne**.

Wtedy:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Zliczanie zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych:



Przykład:

W urnie są dwie kule: biała i czarna. Losujemy dwie kule ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy dwie kule białe.

A – wylosowanie dwóch kul białych

Kombinacje z powtórzeniami:

A – wylosowanie dwóch kul białych

Kombinacje z powtórzeniami:

$\Omega =$

A – wylosowanie dwóch kul białych

Kombinacje z powtórzeniami:

$$\Omega = \{\{b, b\}, \{c, c\}, \{b, c\}\}, A =$$

A – wylosowanie dwóch kul białych

Kombinacje z powtórzeniami:

$\Omega = \{\{b, b\}, \{c, c\}, \{b, c\}\}, A = \{\{b, b\}\}$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} =$$

A – wylosowanie dwóch kul białych

Kombinacje z powtórzeniami:

$\Omega = \{\{b, b\}, \{c, c\}, \{b, c\}\}, A = \{\{b, b\}\}$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{3}$$

Wariacje z powtórzeniami:

$\Omega =$

A – wylosowanie dwóch kul białych

Kombinacje z powtórzeniami:

$$\Omega = \{\{b, b\}, \{c, c\}, \{b, c\}\}, A = \{\{b, b\}\}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{3}$$

Wariacje z powtórzeniami:

$$\Omega = \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, A =$$

A – wylosowanie dwóch kul białych

Kombinacje z powtórzeniami:

$$\Omega = \{\{b,b\},\{c,c\},\{b,c\}\},\ A = \{\{b,b\}\}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{3}$$

Wariacje z powtórzeniami:

$$\Omega = \{(b,b),(c,c),(b,c),(c,b)\},\ A = \{(b,b)\}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} =$$

A – wylosowanie dwóch kul białych

Kombinacje z powtórzeniami:

$$\Omega = \{\{b, b\}, \{c, c\}, \{b, c\}\}, A = \{\{b, b\}\}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{3}$$

Wariacje z powtórzeniami:

$$\Omega = \{(b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\}, A = \{(b, b)\}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$$

A – wylosowanie dwóch kul białych

Kombinacje z powtórzeniami:

$$\Omega = \{\{b,b\},\{c,c\},\{b,c\}\},\ A = \{\{b,b\}\}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{3}$$

Zdarzenia elementarne nie są jednakowo prawdopodobne!

Wariacje z powtórzeniami:

$$\Omega = \{(b,b),(c,c),(b,c),(c,b)\},\ A = \{(b,b)\}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$$

Jeśli są powtórzenia to chcąc skorzystać z definicji klasycznej prawdopodobieństwa **musimy** zdarzenia elementarne zliczać z **wariacji z powtórzeniami**.

Przykład:

Wyciągamy 4 karty z talii 52 kart. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyciągniemy co najmniej jednego asa, jeśli:

a) wyciągamy wszystkie karty jednocześnie.

b) wyciągamy po jednej karcie ze zwracaniem.

a) wyciągamy wszystkie karty jednocześnie

$|\Omega| =$

a) wyciągamy wszystkie karty jednocześnie

$$|\Omega| = \left|C_{52}^{4}\right| = \binom{52}{4} = \frac{52!}{4! \cdot 48!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48!}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 48!} = 270725$$

A – co najmniej jeden as

a) wyciągamy wszystkie karty jednocześnie

$$|\Omega| = \left|C_{52}^{4}\right| = \binom{52}{4} = \frac{52!}{4! \cdot 48!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48!}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 48!} = 270725$$

A – co najmniej jeden as, A'- nie ma asa

$|A'| =$

a) wyciągamy wszystkie karty jednocześnie

$$|\Omega| = \left|C_{52}^{4}\right| = \binom{52}{4} = \frac{52!}{4! \cdot 48!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48!}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 48!} = 270725$$

A – co najmniej jeden as, A'- nie ma asa

$$|A'| = \left|C_{48}^{4}\right| = \binom{48}{4} = \frac{48!}{4! \cdot 44!} = \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44!}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 44!} = 194580$$

a) wyciągamy wszystkie karty jednocześnie

$$|\Omega| = \left|C_{52}^{4}\right| = \binom{52}{4} = \frac{52!}{4! \cdot 48!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48!}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 48!} = 270725$$

A – co najmniej jeden as, A'- nie ma asa

$$|A'| = \left|C_{48}^{4}\right| = \binom{48}{4} = \frac{48!}{4! \cdot 44!} = \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44!}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 44!} = 194580$$

$$P(A') = \frac{|A'|}{|\Omega|} = \frac{194580}{270725} = \frac{38916}{54145}$$

a) wyciągamy wszystkie karty jednocześnie

$$|\Omega| = \left|C_{52}^{4}\right| = \binom{52}{4} = \frac{52!}{4! \cdot 48!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48!}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 48!} = 270725$$

A – co najmniej jeden as, A'- nie ma asa

$$|A'| = \left|C_{48}^{4}\right| = \binom{48}{4} = \frac{48!}{4! \cdot 44!} = \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44!}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 44!} = 194580$$

$$P(A') = \frac{|A'|}{|\Omega|} = \frac{194580}{270725} = \frac{38916}{54145}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{38916}{54145} = \frac{15229}{54145}$$

b) wyciągamy po jednej karcie ze zwracaniem

$|\Omega| =$

b) wyciągamy po jednej karcie ze zwracaniem

$|\Omega| = \left|W_{52}^{4}\right| = 52^4$

A – co najmniej jeden as, A'- nie ma asa

$|A'| =$

b) wyciągamy po jednej karcie ze zwracaniem

$$|\Omega| = \left|W_{52}^4\right| = 52^4$$

A – co najmniej jeden as, A'- nie ma asa

$$|A'| = \left|W_{48}^4\right| = 48^4$$

$$P(A') = \frac{|A'|}{|\Omega|} = \frac{48^4}{52^4} = \left(\frac{48}{52}\right)^4 = \left(\frac{12}{13}\right)^4$$

b) wyciągamy po jednej karcie ze zwracaniem

$$|\Omega| = \left|W_{52}^{4}\right| = 52^4$$

A – co najmniej jeden as, A'- nie ma asa

$$|A'| = \left|W_{48}^{4}\right| = 48^4$$

$$P(A') = \frac{|A'|}{|\Omega|} = \frac{48^4}{52^4} = \left(\frac{48}{52}\right)^4 = \left(\frac{12}{13}\right)^4$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^4$$

Przykład:

Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyrzucimy 1 oczko lub 6 oczek.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

$$|\Omega| =$$

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

$$|\Omega| = \left|W_6^2\right| = 6^2 = 36$$

$A -$ 1 oczko lub 6 oczek

$$|A| =$$

	1	2	3	4	5	6
1	X	X	X	X	X	X
2	X					X
3	X					X
4	X					X
5	X					X
6	X	X	X	X	X	X

$$|\Omega| = \left|W_6^2\right| = 6^2 = 36$$

$A - 1$ oczko lub 6 oczek

$$|A| =$$

	1	2	3	4	5	6
1	X	X	X	X	X	X
2	X					X
3	X					X
4	X					X
5	X					X
6	X	X	X	X	X	X

$$|\Omega| = \left|W_6^2\right| = 6^2 = 36$$

A – 1 oczko lub 6 oczek

$$|A| = 20$$

	1	2	3	4	5	6
1	X	X	X	X	X	X
2	X					X
3	X					X
4	X					X
5	X					X
6	X	X	X	X	X	X

$$|\Omega| = \left|W_6^2\right| = 6^2 = 36$$

A – 1 oczko lub 6 oczek

$$|A| = 20$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

Co w przypadku gdy Ω jest nieskończona?

Definicja σ-ciała:

Niech X będzie niepustym zbiorem. Mówimy, że rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów X jest σ-ciałem jeśli:

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A' \in \mathcal{F}$
- $\bigwedge_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$

Niech $\mathcal{F}$ będzie σ-ciałem na Ω.

Prawdopodobieństwem nazywamy funkcję $P: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ spełniającą następujące warunki:

- $\bigwedge_{A \in \mathcal{F}} P(A) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- jeśli $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ jest dowolnym ciągiem podzbiorów $\mathcal{F}$ parami rozłącznych, to $P(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Najczęściej będziemy przyjmować $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ (zbiór wszystkich podzbiorów Ω).

Trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazywamy **przestrzenią probabilistyczną**.

Przykład:

Rzucamy symetryczną monetą aż do momentu, kiedy po raz pierwszy wypadnie orzeł. Oblicz prawdopodobieństwo, że rzucimy co najmniej 4 razy.

A_i – wyrzucenie orła za i-tym razem

A_i – wyrzucenie orła za i-tym razem

A – rzucimy co najmniej 4 razy

A_i – wyrzucenie orła za i-tym razem

A – rzucimy co najmniej 4 razy, A' – rzucimy co najwyżej 3 razy

A_i – wyrzucenie orła za i-tym razem

A – rzucimy co najmniej 4 razy, A' – rzucimy co najwyżej 3 razy

$A' = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

A_i – wyrzucenie orła za i-tym razem

A – rzucimy co najmniej 4 razy, A' – rzucimy co najwyżej 3 razy

$A' = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

A_1, A_2, A_3 – parami rozłączne

A_i – wyrzucenie orła za i-tym razem

A – rzucimy co najmniej 4 razy, A' – rzucimy co najwyżej 3 razy

$A' = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

A_1, A_2, A_3 – parami rozłączne

$P(A') = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$

A_i – wyrzucenie orła za i-tym razem

A – rzucimy co najmniej 4 razy, A' – rzucimy co najwyżej 3 razy

$A' = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

A_1, A_2, A_3 – parami rozłączne

$P(A') = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) =$

A_i – wyrzucenie orła za i-tym razem

A – rzucimy co najmniej 4 razy, A' – rzucimy co najwyżej 3 razy

$A' = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

A_1, A_2, A_3 – parami rozłączne

$$P(A') = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8}$$

A_i – wyrzucenie orła za i-tym razem

A – rzucimy co najmniej 4 razy, A' – rzucimy co najwyżej 3 razy

$A' = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

A_1, A_2, A_3 – parami rozłączne

$$P(A') = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

Przykład:

Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyrzuciliśmy na drugiej kostce co najmniej 5 oczek, jeśli wiemy, że iloczyn wyrzuconych oczek jest nie większy jak 6.

Prawdopodobieństwo warunkowe:

- „… jeśli …”
- „… jeśli wiadomo, że …”
- „… pod warunkiem, że …”

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ gdzie: } P(B) > 0$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, |\Omega| = 36$$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $|\Omega| = 36$

A – na drugiej kostce co najmniej 5 oczek

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $|\Omega| = 36$

A – na drugiej kostce co najmniej 5 oczek

B – iloczyn wyrzuconych oczek nie większy jak 6

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $|\Omega| = 36$

A – na drugiej kostce co najmniej 5 oczek

B – iloczyn wyrzuconych oczek nie większy jak 6

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $|\Omega| = 36$

A – na drugiej kostce co najmniej 5 oczek

B – iloczyn wyrzuconych oczek nie większy jak 6

	1	2	3	4	5	6
1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2	**2**	**4**	**6**	8	10	12
3	**3**	**6**	9	12	15	18
4	**4**	8	12	16	20	24
5	**5**	10	15	20	25	30
6	**6**	12	18	24	30	36

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $|\Omega| = 36$

A – na drugiej kostce co najmniej 5 oczek

B – iloczyn wyrzuconych oczek nie większy jak 6

	1	2	3	4	5	6
1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2	**2**	**4**	**6**	8	10	12
3	**3**	**6**	9	12	15	18
4	**4**	8	12	16	20	24
5	**5**	10	15	20	25	30
6	**6**	12	18	24	30	36

$|B| = 14$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $|\Omega| = 36$

A – na drugiej kostce co najmniej 5 oczek

B – iloczyn wyrzuconych oczek nie większy jak 6

	1	2	3	4	5	6
1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2	**2**	**4**	**6**	8	10	12
3	**3**	**6**	9	12	15	18
4	**4**	8	12	16	20	24
5	**5**	10	15	20	25	30
6	**6**	12	18	24	30	36

$|B| = 14$, $|A \cap B| = 2$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, |\Omega| = 36$

A – na drugiej kostce co najmniej 5 oczek

B – iloczyn wyrzuconych oczek nie większy jak 6

	1	2	3	4	5	6
1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2	**2**	**4**	**6**	8	10	12
3	**3**	**6**	9	12	15	18
4	**4**	8	12	16	20	24
5	**5**	10	15	20	25	30
6	**6**	12	18	24	30	36

$|B| = 14, |A \cap B| = 2, P(B) = \frac{14}{36}\ , P(A \cap B) = \frac{2}{36}$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $|\Omega| = 36$

A – na drugiej kostce co najmniej 5 oczek

B – iloczyn wyrzuconych oczek nie większy jak 6

	1	2	3	4	5	6
1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2	**2**	**4**	**6**	8	10	12
3	**3**	**6**	9	12	15	18
4	**4**	8	12	16	20	24
5	**5**	10	15	20	25	30
6	**6**	12	18	24	30	36

$|B| = 14$, $|A \cap B| = 2$, $P(B) = \frac{14}{36}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{36}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{14}{36}} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$$

UWAGA!

Przy tej samej przestrzeni zdarzeń Ω dla zdarzeń A i B:

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

Jeśli warunek B potraktujemy jako nową Ω_w, to:

$$P(A|\Omega_w) = \frac{|A \cap \Omega_w|}{|\Omega_w|} = \frac{|A|}{|\Omega_w|}$$

$$P(A|\Omega_w) = \frac{|A|}{|\Omega_w|}$$

A – na drugiej kostce co najmniej 5 oczek

Ω_w – iloczyn wyrzuconych oczek nie większy jak 6

	1	2	3	4	5	6
1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2	**2**	**4**	**6**	8	10	12
3	**3**	**6**	9	12	15	18
4	**4**	8	12	16	20	24
5	**5**	10	15	20	25	30
6	**6**	12	18	24	30	36

$|\Omega_w| = 14$

$$P(A|\Omega_w) = \frac{|A|}{|\Omega_w|}$$

A – na drugiej kostce co najmniej 5 oczek

Ω_w – iloczyn wyrzuconych oczek nie większy jak 6

	1	2	3	4	5	6
1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2	**2**	**4**	**6**	8	10	12
3	**3**	**6**	9	12	15	18
4	**4**	8	12	16	20	24
5	**5**	10	15	20	25	30
6	**6**	12	18	24	30	36

$|\Omega_w| = 14, |A| = 2$

$$P(A|\Omega_w) = \frac{|A|}{|\Omega_w|}$$

A – na drugiej kostce co najmniej 5 oczek

Ω_w – iloczyn wyrzuconych oczek nie większy jak 6

	1	2	3	4	5	6
1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2	**2**	**4**	**6**	8	10	12
3	**3**	**6**	9	12	15	18
4	**4**	8	12	16	20	24
5	**5**	10	15	20	25	30
6	**6**	12	18	24	30	36

$|\Omega_w| = 14$, $|A| = 2$

$$P(A|\Omega_w) = \frac{|A|}{|\Omega_w|} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$$

Niezależność dwóch zdarzeń losowych:

Zdarzenia A i B nazywamy niezależnymi jeśli $P(A|B) = P(A)$.

Warunek $P(A|B) = P(A)$ na niezależność A i B można zapisać równoważnie:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Czy zdarzenia niezależne muszą być rozłączne?

Czy zdarzenia niezależne muszą być rozłączne?

NIE, na przykład:

Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry.

A – na pierwszej kostce 1

B – na drugiej kostce 6

Czy zdarzenia niezależne muszą być rozłączne?

NIE, na przykład:

Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry.

A – na pierwszej kostce 1

B – na drugiej kostce 6

$$P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{6}$$

Czy zdarzenia niezależne muszą być rozłączne?

NIE, na przykład:

Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry.

A – na pierwszej kostce 1

B – na drugiej kostce 6

$$P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{6}, P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

Czy zdarzenia niezależne muszą być rozłączne?

NIE, na przykład:

Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry.

A – na pierwszej kostce 1

B – na drugiej kostce 6

$P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{6}, P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Czyli A i B – niezależne, ale $A \cap B =$

Czy zdarzenia niezależne muszą być rozłączne?

NIE, na przykład:

Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry.

A – na pierwszej kostce 1

B – na drugiej kostce 6

$$P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{6}, P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Czyli A i B – niezależne, ale $A \cap B = \{(1,6)\} \neq \emptyset$.

Czy zdarzenia rozłączne muszą być niezależne?

Czy zdarzenia rozłączne muszą być niezależne?

NIE, na przykład:

Rzucamy sześcienną kostką do gry.

A – wyrzuciliśmy 1

B – wyrzuciliśmy 6

Czy zdarzenia rozłączne muszą być niezależne?

NIE, na przykład:

Rzucamy sześcienną kostką do gry.

A – wyrzuciliśmy 1

B – wyrzuciliśmy 6

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

Czy zdarzenia rozłączne muszą być niezależne?

NIE, na przykład:

Rzucamy sześcienną kostką do gry.

A – wyrzuciliśmy 1

B – wyrzuciliśmy 6

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

$P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{6}$

Czy zdarzenia rozłączne muszą być niezależne?

NIE, na przykład:

Rzucamy sześcienną kostką do gry.

A – wyrzuciliśmy 1

B – wyrzuciliśmy 6

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

$P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{6}$

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

Czy zdarzenia rozłączne muszą być niezależne?

NIE, na przykład:

Rzucamy sześcienną kostką do gry.

A – wyrzuciliśmy 1

B – wyrzuciliśmy 6

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

$P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{6}$

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

Czyli A i B – zależne pomimo, że $A \cap B = \emptyset$.

Kiedy zdarzenia są rozłączne i niezależne?

Kiedy zdarzenia są rozłączne i niezależne?

Niezależność: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Rozłączność: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

Zatem:

Kiedy zdarzenia są rozłączne i niezależne?

Niezależność: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Rozłączność: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

Zatem:

$P(A) \cdot P(B) = 0$

Kiedy zdarzenia są rozłączne i niezależne?

Niezależność: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Rozłączność: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

Zatem:

$P(A) \cdot P(B) = 0$

$P(A) = 0$ lub $P(B) = 0$

Kiedy zdarzenia są rozłączne i niezależne?

Niezależność: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Rozłączność: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

Zatem:

$P(A) \cdot P(B) = 0$

$P(A) = 0$ lub $P(B) = 0$

Dwa zdarzenia są rozłączne i niezależne, gdy co najmniej jedno z nich ma zerowe prawdopodobieństwo.

Jeśli zdarzenia A i B są niezależne to niezależne są również zdarzenia:

- A i B'
- A' i B'
- A' i B

Dowód:

Niech A i B – niezależne, czyli:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Dowód:

Niech A i B – niezależne, czyli:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pokażemy, że A i B' – niezależne:

Dowód:

Niech A i B – niezależne, czyli:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pokażemy, że A i B' – niezależne:

$$P(A \cap B') =$$

Dowód:

Niech A i B – niezależne, czyli:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pokażemy, że A i B' – niezależne:

$$P(A \cap B') = P(A \backslash B) =$$

Dowód:

Niech A i B – niezależne, czyli:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pokażemy, że A i B' – niezależne:

$$P(A \cap B') = P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B) =$$

Dowód:

Niech A i B – niezależne, czyli:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pokażemy, że A i B' – niezależne:

$$P(A \cap B') = P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B) =$$
$$P(A) - P(A) \cdot P(B) =$$

Dowód:

Niech A i B – niezależne, czyli:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pokażemy, że A i B' – niezależne:

$$P(A \cap B') = P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B) =$$
$$P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot \big(1 - P(B)\big) =$$

Dowód:

Niech A i B – niezależne, czyli:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pokażemy, że A i B' – niezależne:

$$P(A \cap B') = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) =$$
$$P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot \big(1 - P(B)\big) = P(A) \cdot P(B')$$

Niezależność n zdarzeń losowych:

Zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$ $(n \geq 2)$ nazywamy niezależnymi zespołowo (albo wzajemnie) jeśli:

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

gdzie: I jest dowolnym, co najmniej dwuelementowym podzbiorem $\{1, 2, \dots, n\}$.

Niezależność trzech zdarzeń losowych:

Zdarzenia A_1, A_2, A_3 nazywamy niezależnymi jeśli:

- $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$
- $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3)$
- $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$
- $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$

Przykład

Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ i niech zdarzenia elementarne będą jednakowo prawdopo-dobne. Określmy zdarzenia

A=$\{\omega_1, \omega_2\}$, B=$\{\omega_1, \omega_3\}$, C=$\{\omega_1, \omega_4\}$.

Zdarzenia A i B są niezależne gdyż

$$P(A \cap B) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(A)P(B) = \frac{2}{4} * \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

Podobnie pokazujemy niezależność zdarzeń A i C oraz B i C.
Zdarzenia A, B, C są parami niezależne, lecz nie są niezależne zespołowo, ponieważ

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$$

Przykład

Losowanie karty z talii 52 kart. Przyjmijmy oznaczenia:

A: karta jest kierem

B: karta jest figurą (tzn. królem, damą lub waletem)

Wówczas $P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$.

$$P(A \cap B) = \frac{3}{52} = \frac{1}{4} * \frac{3}{13} = P(A)P(B)$$