Matematyka Dyskretna

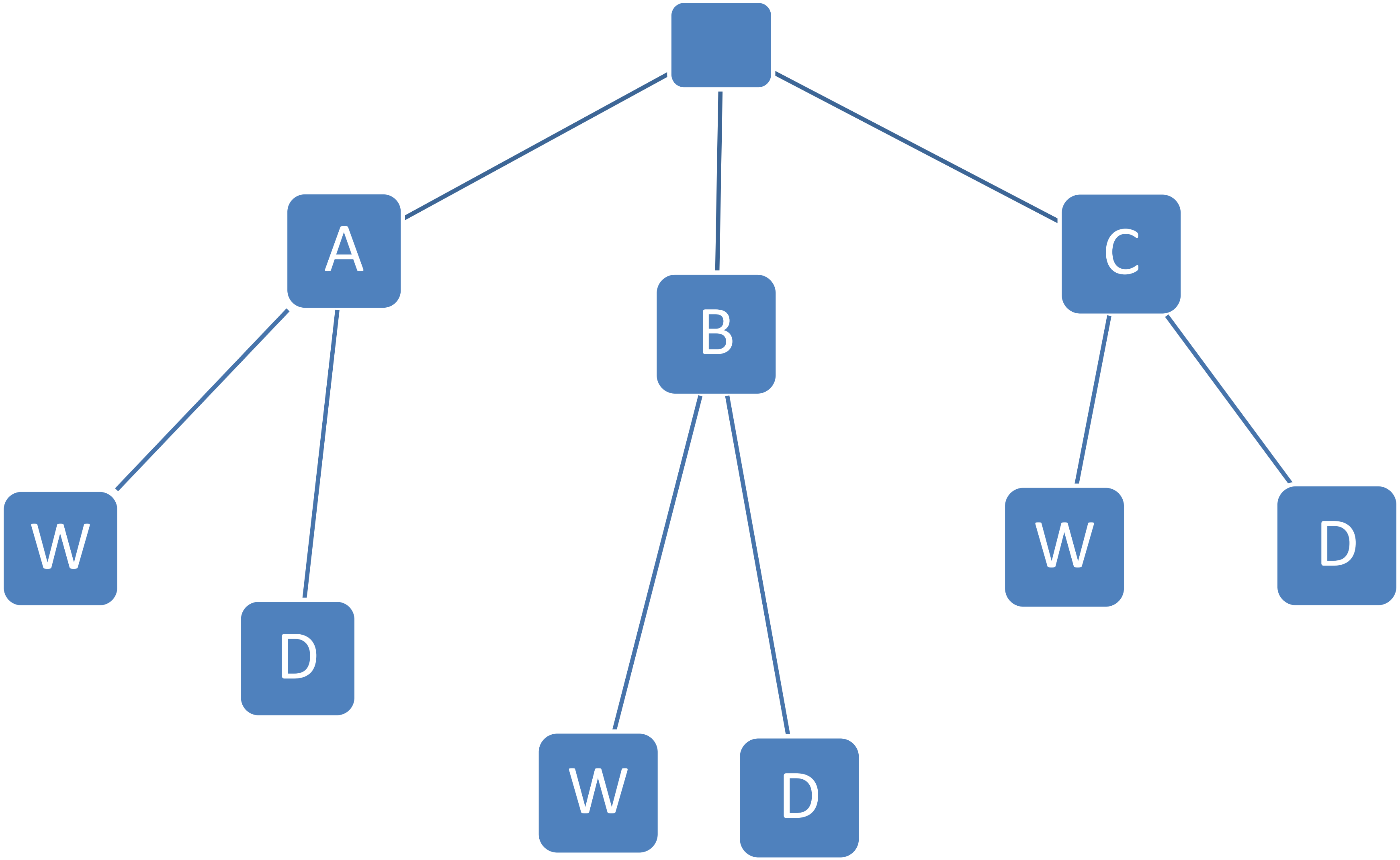
7. Dyskretna teoria prawdopodobieństwa

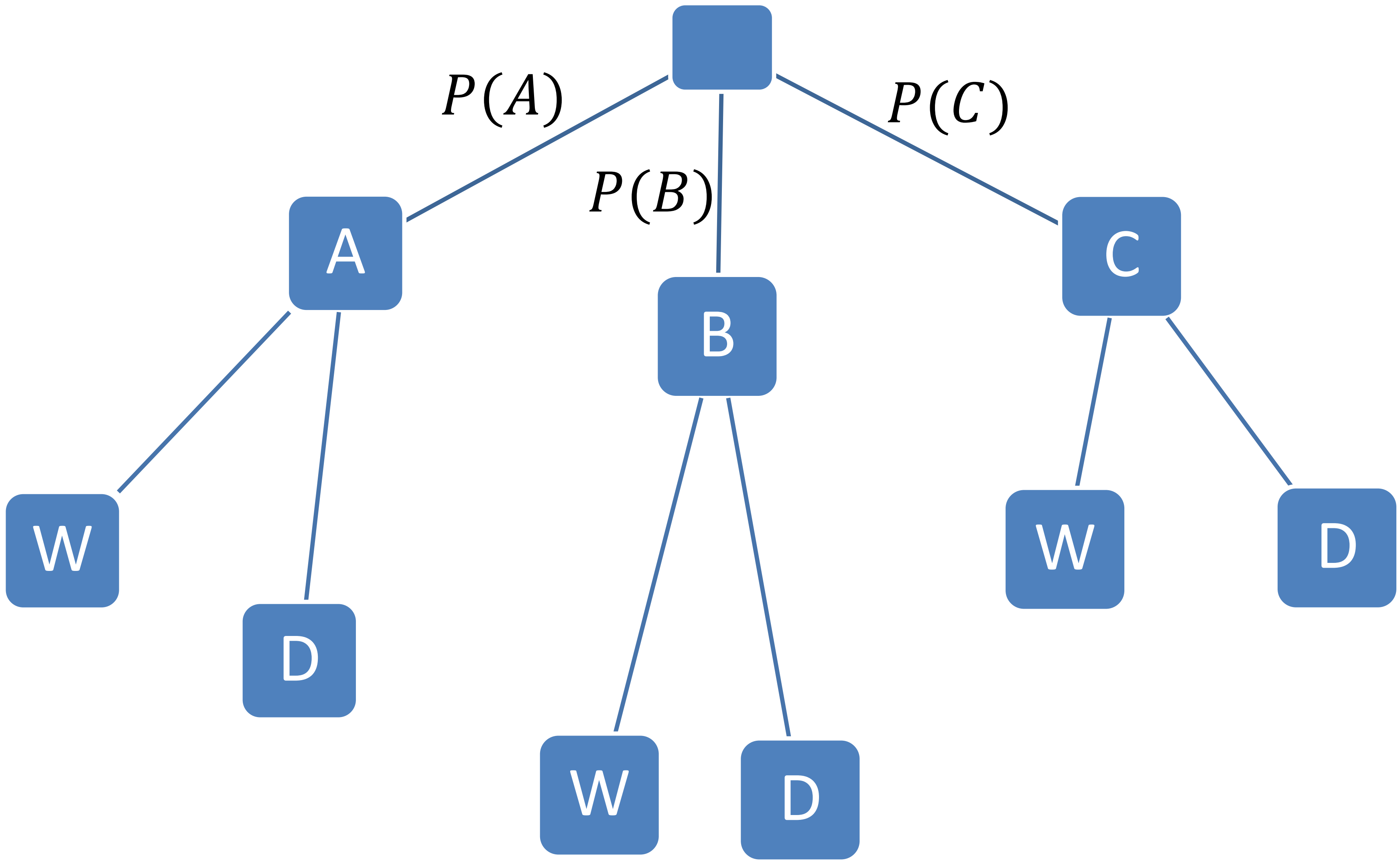
Prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa, zmienna losowa

Przykład:

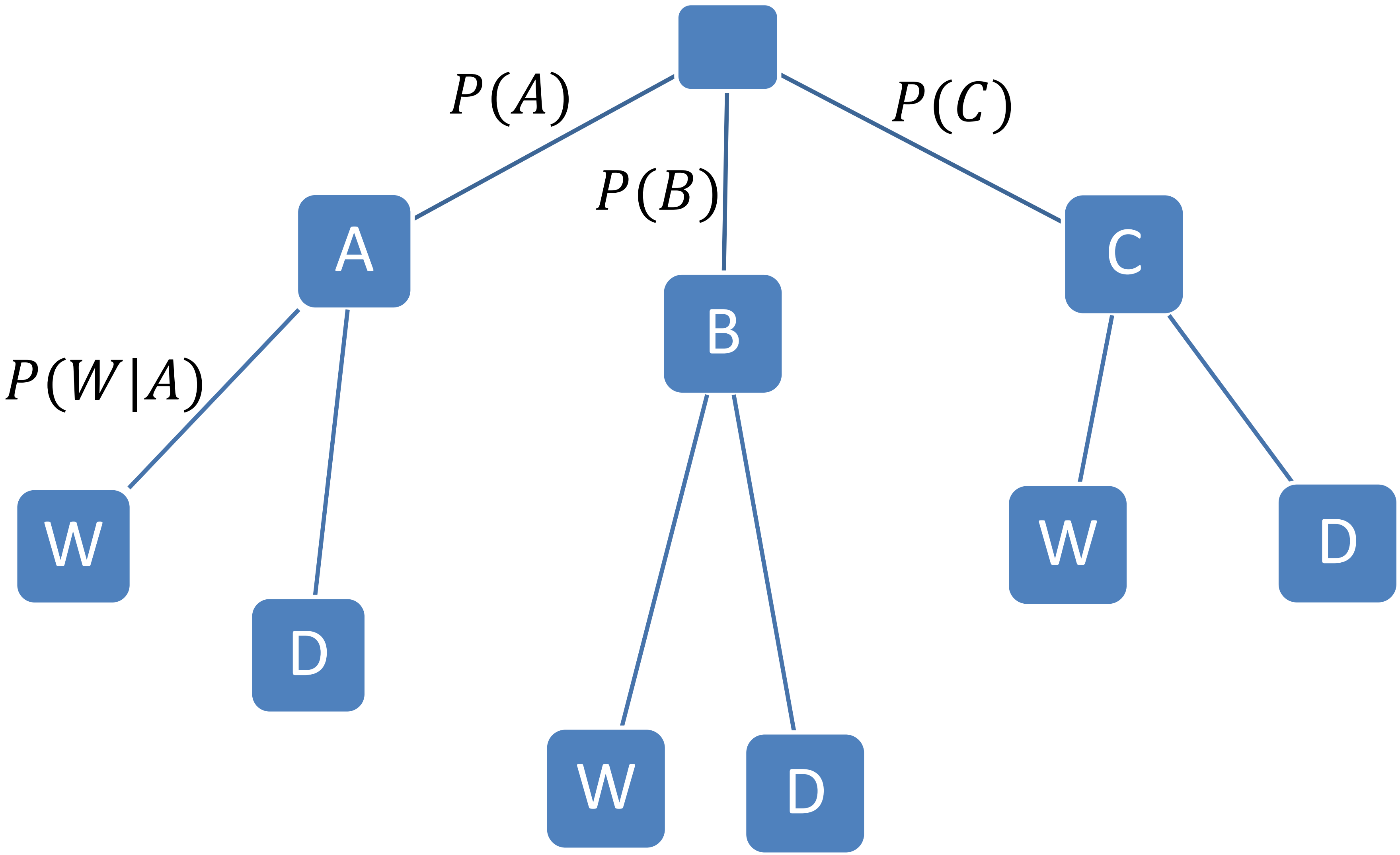
Firma	A	B	C
Części kupione	40%	10%	50%
Części wadliwe	5%	20%	3%

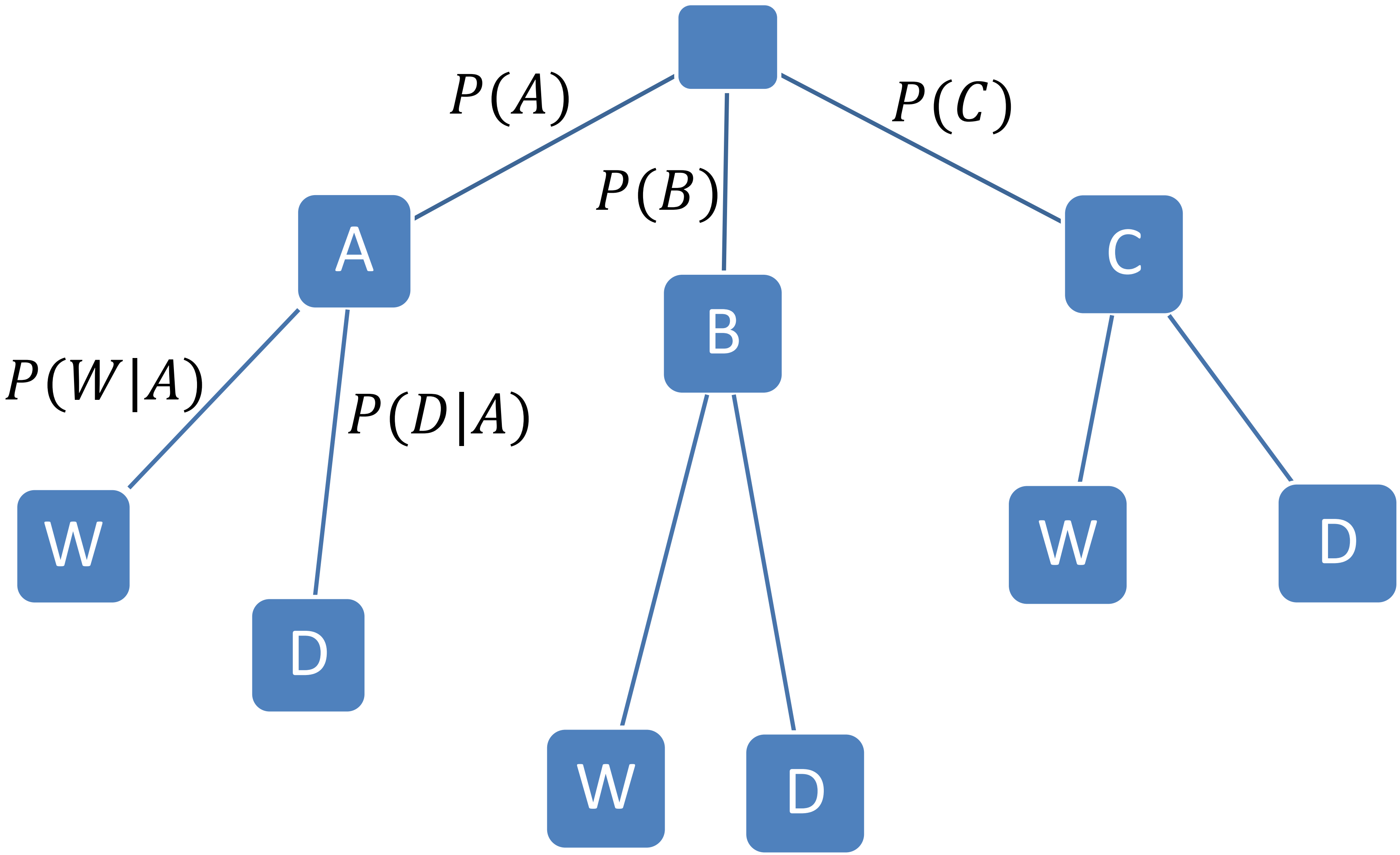
Oblicz prawdopodobieństwo zakupienia części wadliwej.

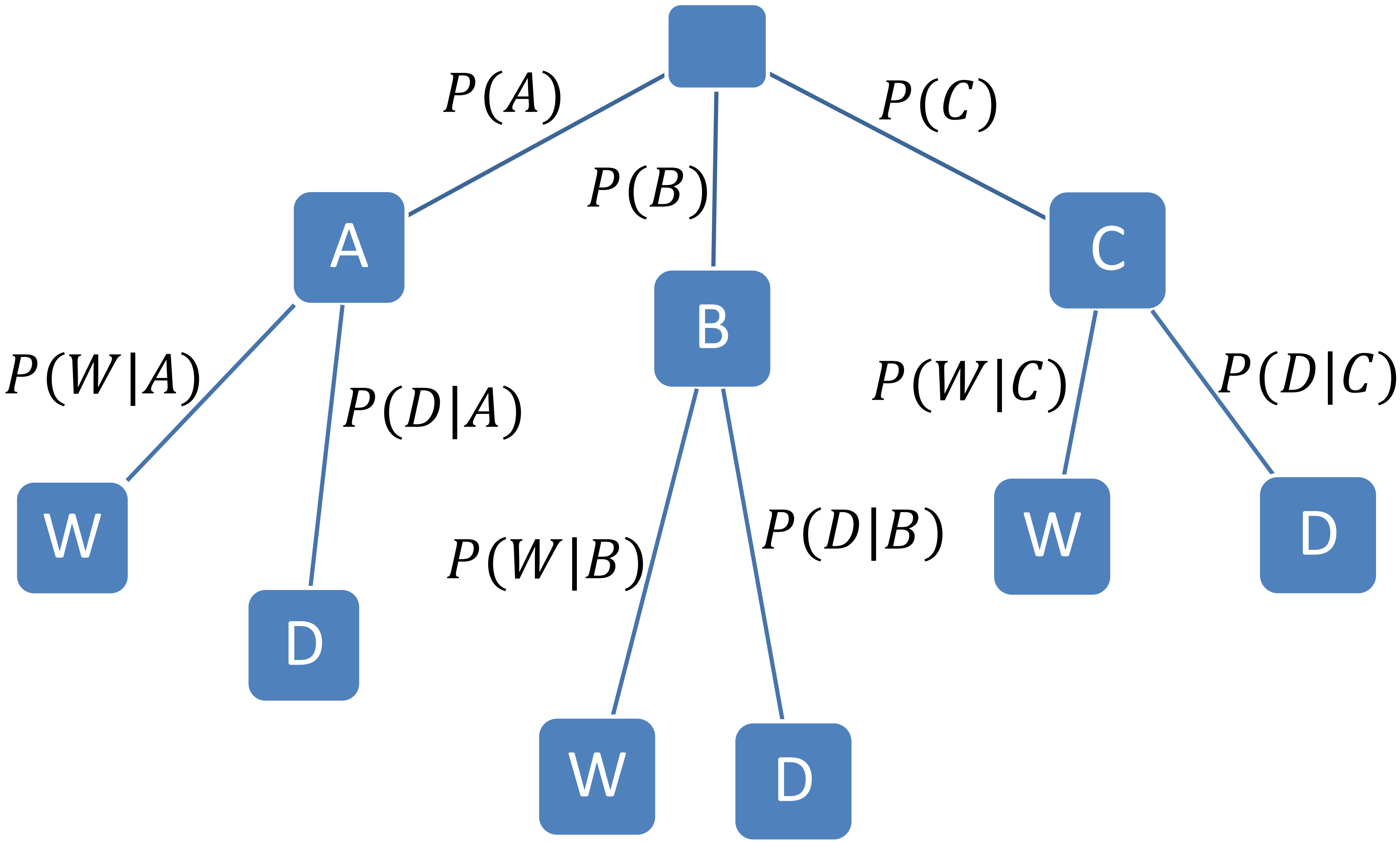

A
B
C
W
D
W
D
W
D

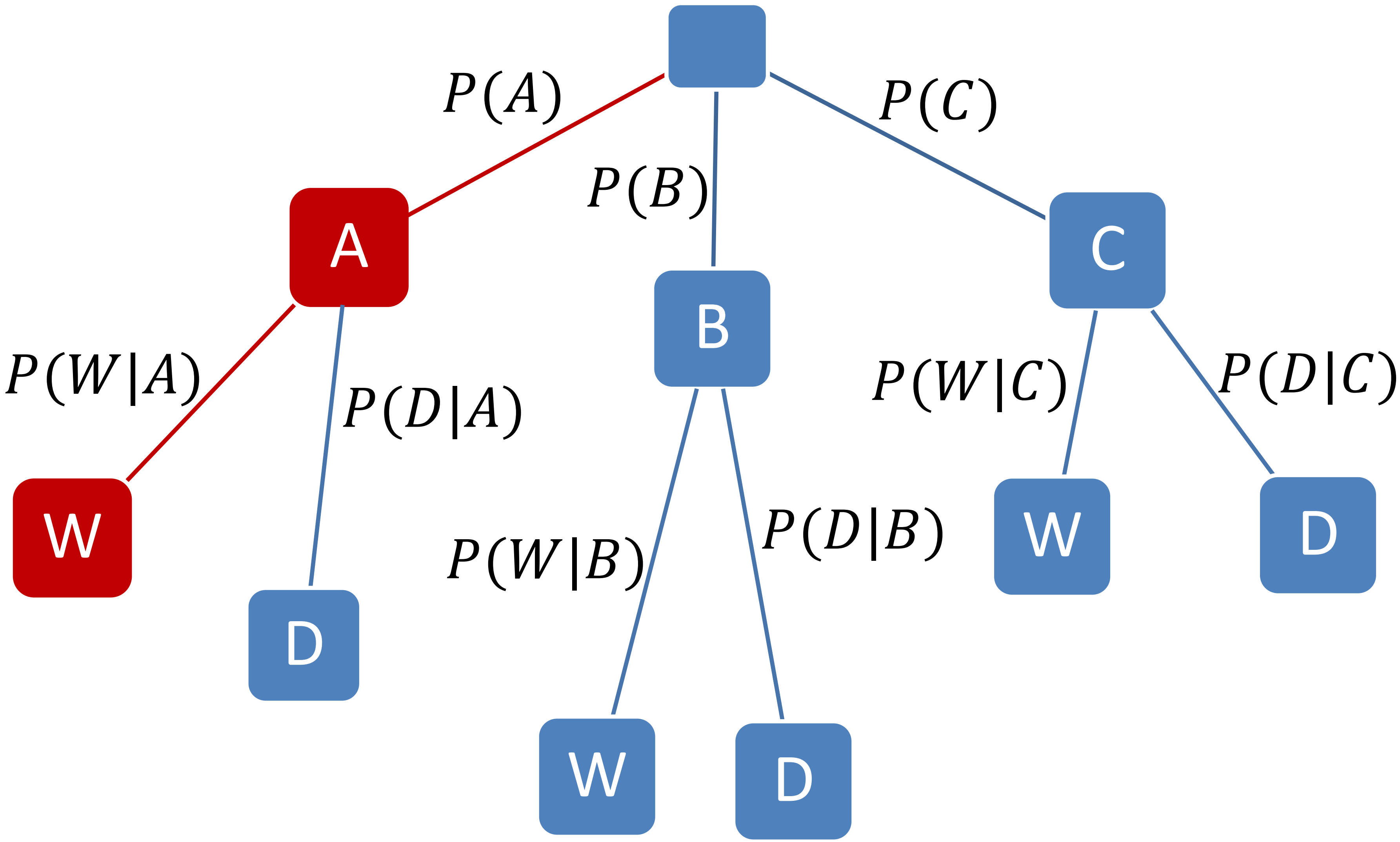


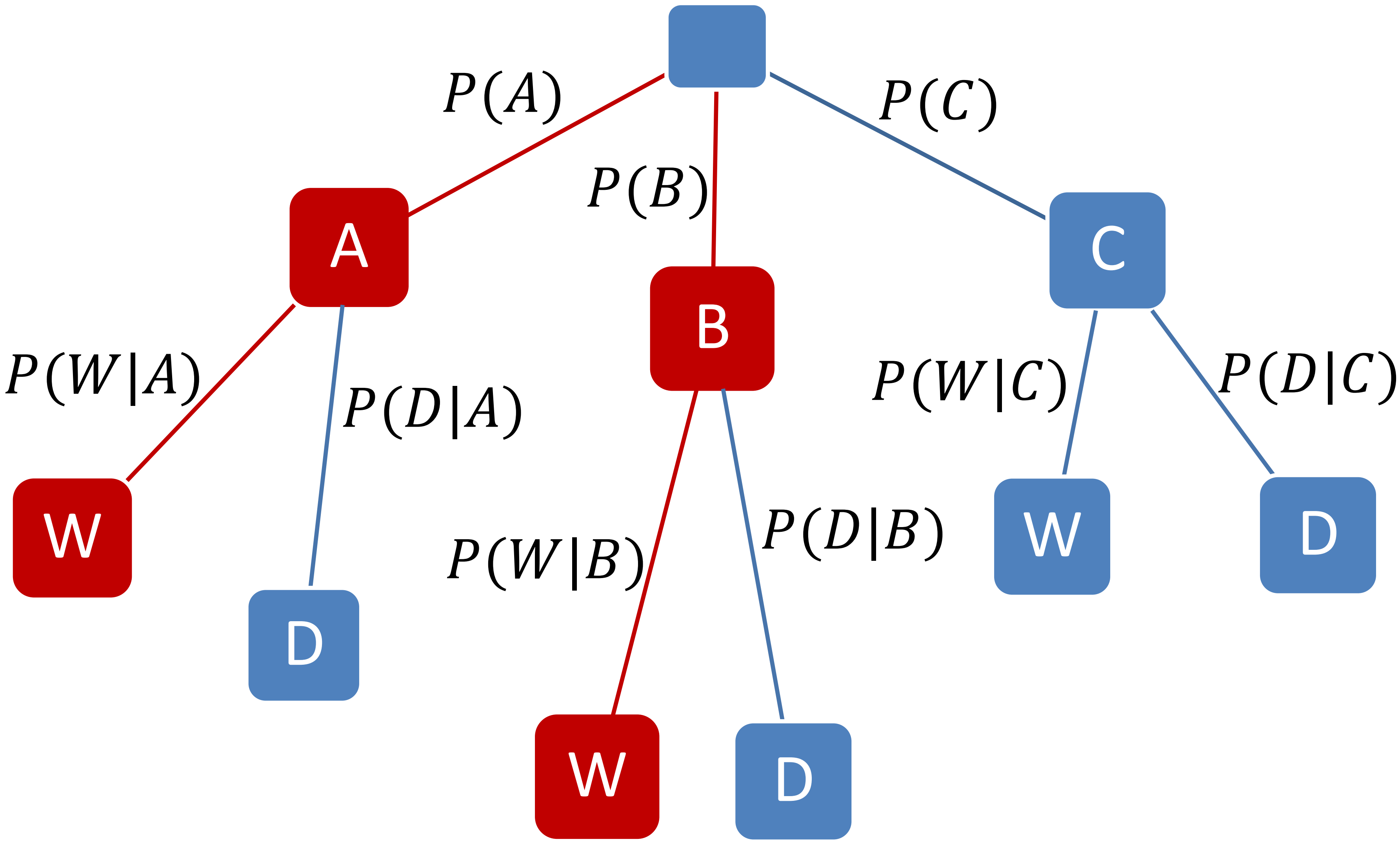
P(A)
P(B)
P(C)
A
B
C
W
D
W
D
W
D


$P(A)$
$P(B)$
$P(C)$
$P(W|A)$
A
B
C
W
D
W
D
W
D

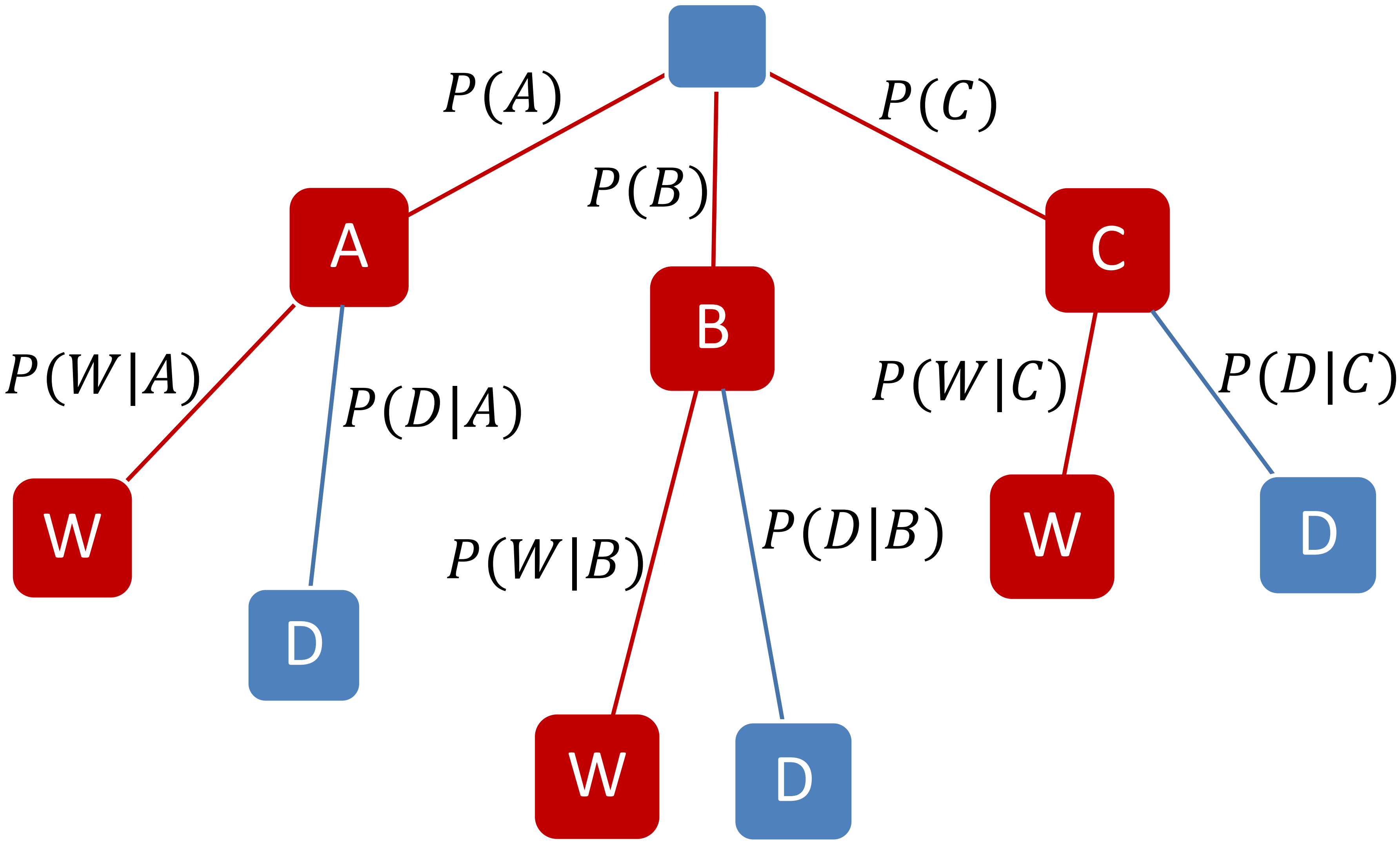

P(A)
P(B)
P(C)
A
B
C
P(W|A)
P(D|A)
W
D
W
D
W
D


$P(A)$
$P(B)$
$P(C)$
A
B
C
$P(W|A)$
$P(D|A)$
$P(W|B)$
$P(D|B)$
$P(W|C)$
$P(D|C)$
W
D
W
D
W
D

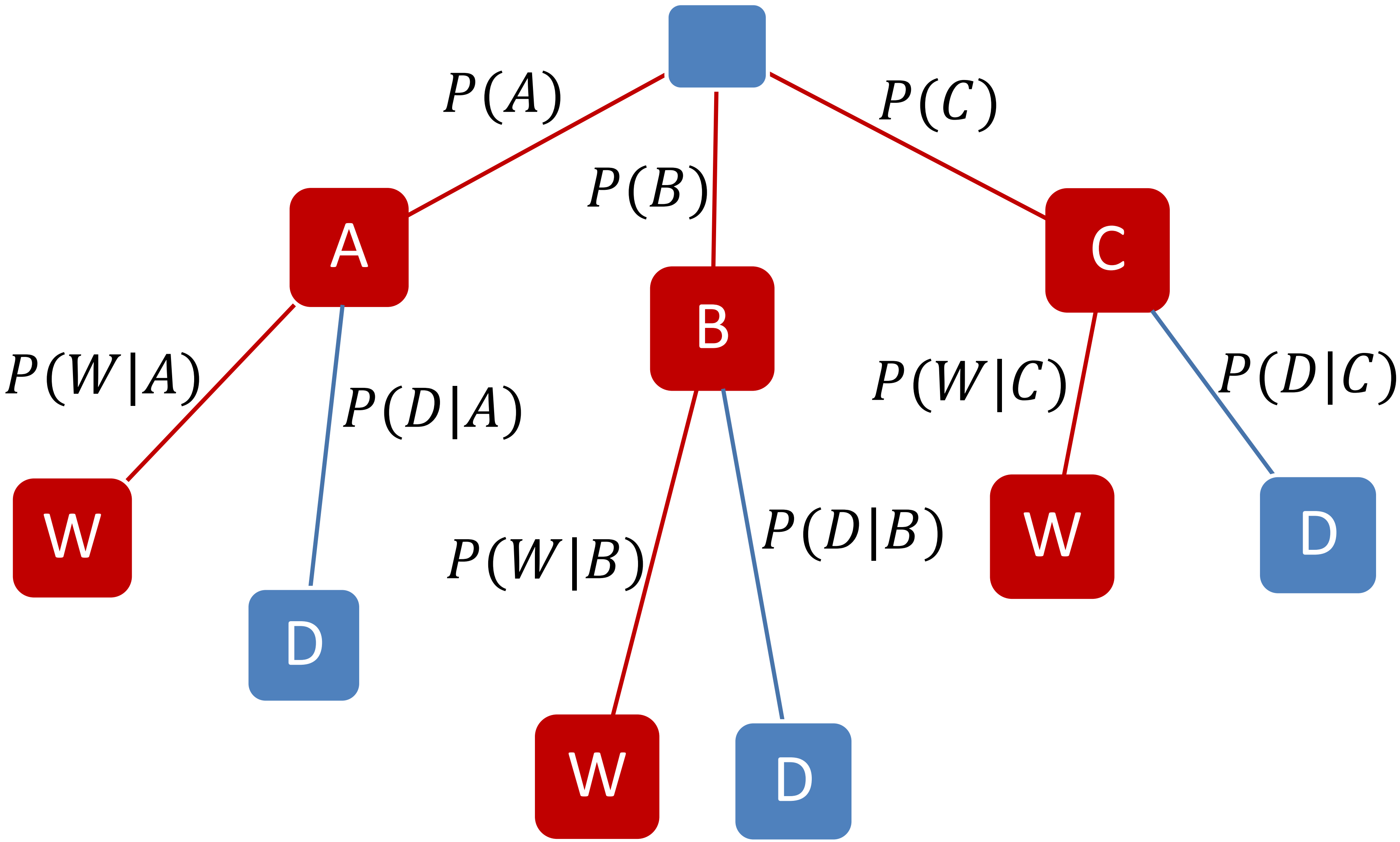

$P(A)$
$P(B)$
$P(C)$
A
B
C
$P(W|A)$
$P(D|A)$
$P(W|B)$
$P(D|B)$
$P(W|C)$
$P(D|C)$
W
D
W
D
W
D



$P(A)$
$P(B)$
$P(C)$
A
B
C
$P(W|A)$
$P(D|A)$
$P(W|C)$
$P(D|C)$
W
D
$P(W|B)$
$P(D|B)$
W
D
W
D
W
D



$P(A)$
$P(B)$
$P(C)$
A
B
C
$P(W|A)$
$P(D|A)$
$P(W|B)$
$P(D|B)$
$P(W|C)$
$P(D|C)$
W
D
W
D
W
D



$$P(W) = P(A) \cdot P(W|A) + P(B) \cdot P(W|B) + P(C) \cdot P(W|C)$$

Zdarzenia losowe $B_1, B_2, \dots, B_n \subset \Omega$ nazywamy **układem zupełnym zdarzeń** jeśli:

- $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$
- $\bigwedge_{i \neq j} B_i \cap B_j = \emptyset$ (rozłączność)
- $\bigwedge_i P(B_i) > 0$

U nas układ zupełny zdarzeń tworzą: A, B i C:

U nas układ zupełny zdarzeń tworzą: A, B i C:

- $A \cup B \cup C = \Omega$

U nas układ zupełny zdarzeń tworzą: A, B i C:

- $A \cup B \cup C = \Omega$
- $A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset, B \cap C = \emptyset$

U nas układ zupełny zdarzeń tworzą: A, B i C:

- $A \cup B \cup C = \Omega$
- $A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset, B \cap C = \emptyset$
- $P(A) > 0, P(B) > 0, P(C) > 0$

Prawdopodobieństwo całkowite (zupełne):

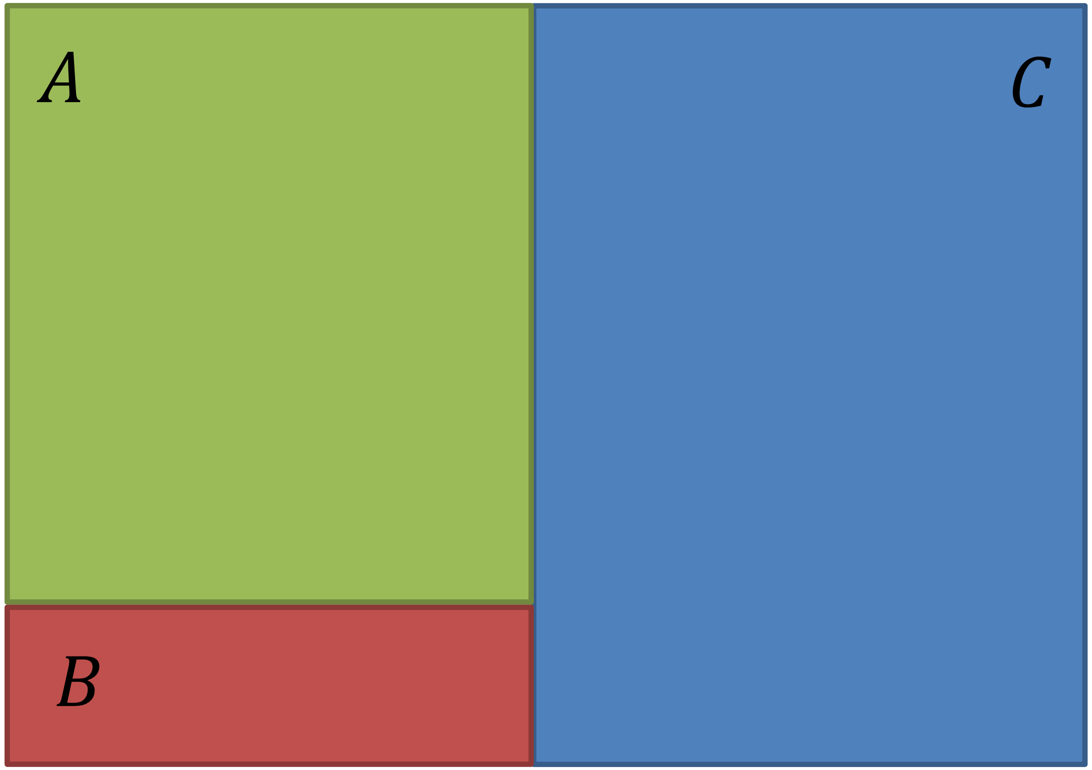
Niech $B_1, B_2, \dots, B_n \subset \Omega$ tworzą układ zupełny zdarzeń. Wtedy dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

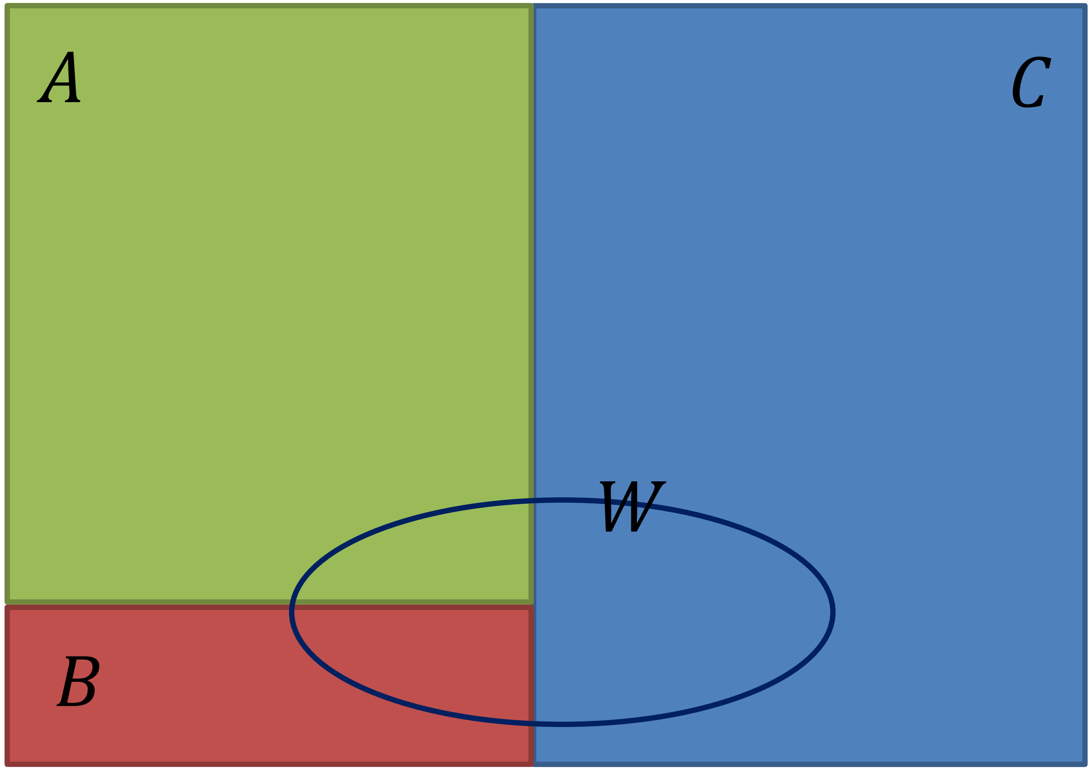
U nas:

$$P(W) = P(A) \cdot P(W|A) + P(B) \cdot P(W|B) + P(C) \cdot P(W|C)$$

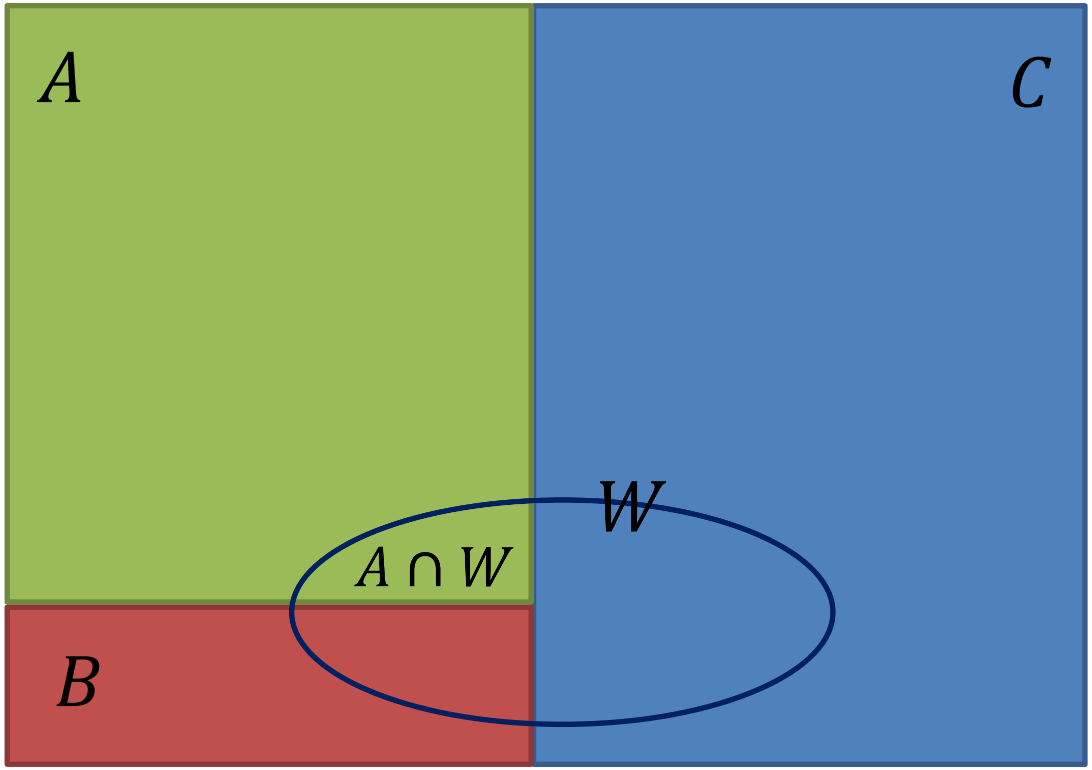
Poprawność wzoru na prawdopodobieństwo całkowite (szkic):



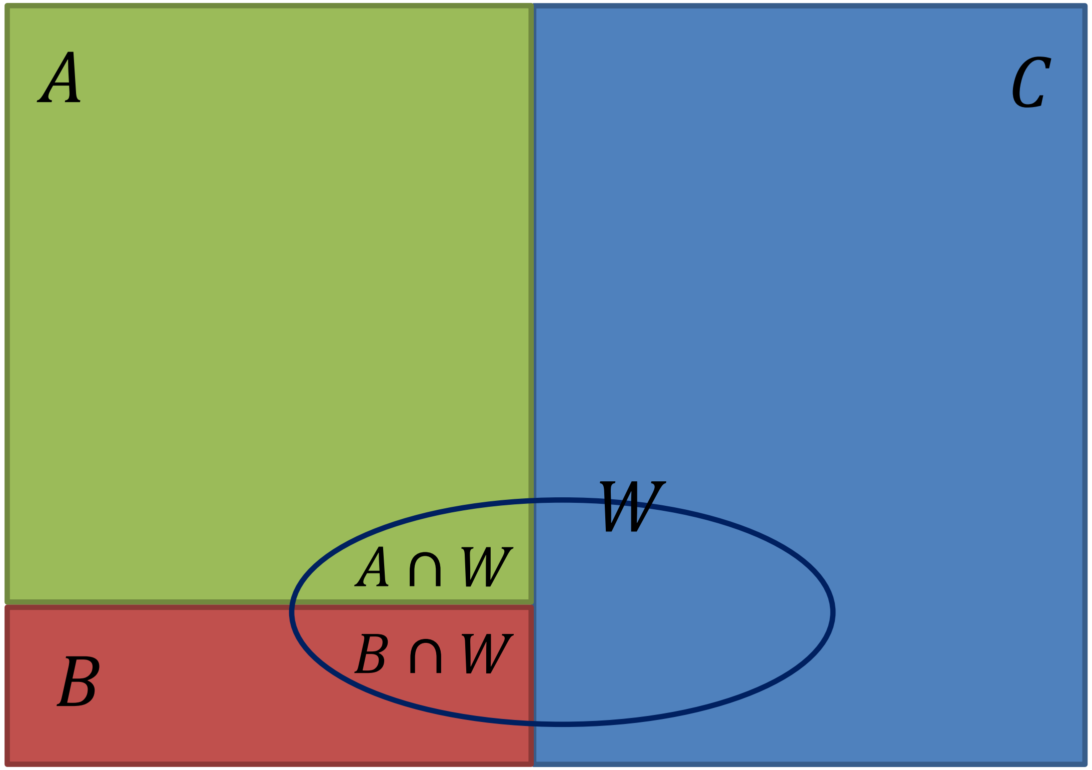
Poprawność wzoru na prawdopodobieństwo całkowite (szkic):



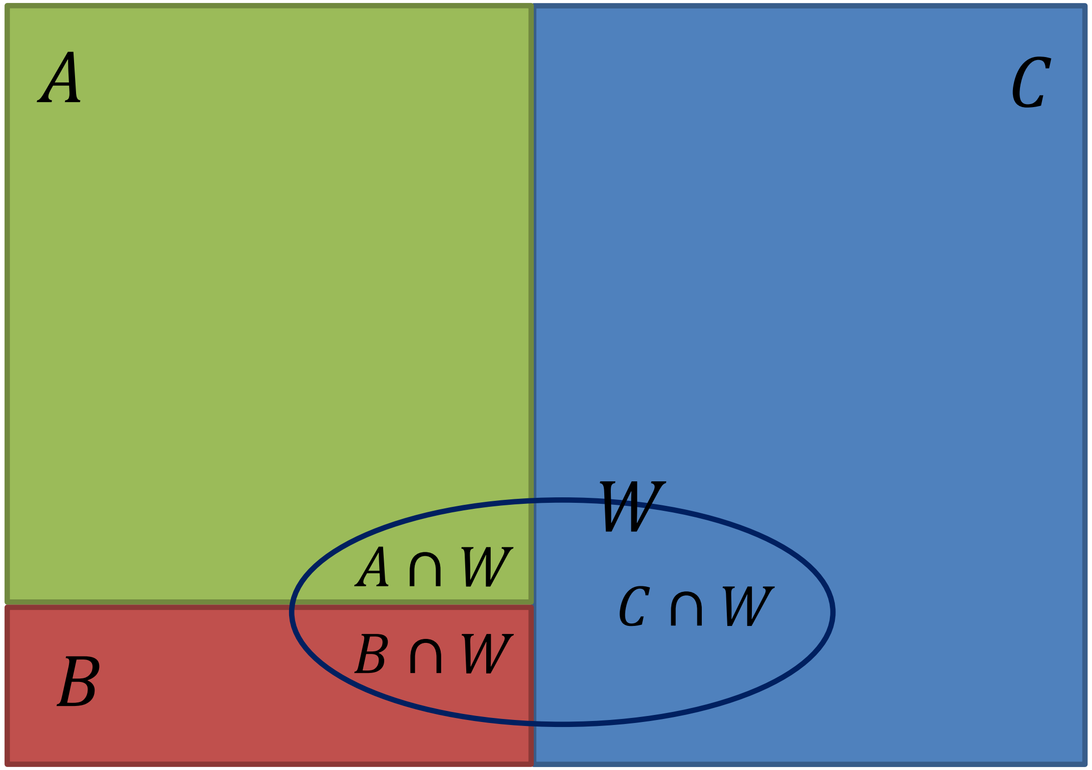
Poprawność wzoru na prawdopodobieństwo całkowite (szkic):



Poprawność wzoru na prawdopodobieństwo całkowite (szkic):

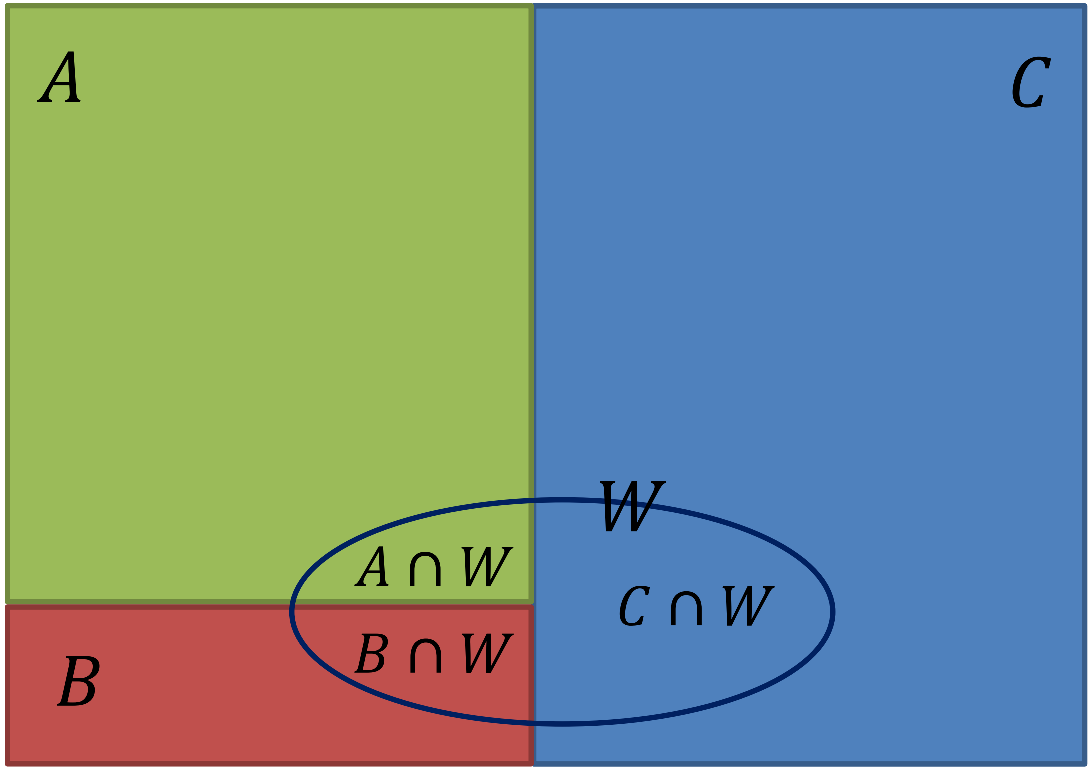


Poprawność wzoru na prawdopodobieństwo całkowite (szkic):



Poprawność wzoru na prawdopodobieństwo całkowite (szkic):

$$W = (A \cap W) \cup (B \cap W) \cup (C \cap W)$$



Poprawność wzoru na prawdopodobieństwo całkowite (szkic):

$$W = (A \cap W) \cup (B \cap W) \cup (C \cap W)$$

$$P(W) = P(A \cap W) + P(B \cap W) + P(C \cap W)$$

Poprawność wzoru na prawdopodobieństwo całkowite (szkic):

$$W = (A \cap W) \cup (B \cap W) \cup (C \cap W)$$

$$P(W) = P(A \cap W) + P(B \cap W) + P(C \cap W)$$

$$P(W|A) = \frac{P(A \cap W)}{P(A)} \Rightarrow$$

Poprawność wzoru na prawdopodobieństwo całkowite (szkic):

$$W = (A \cap W) \cup (B \cap W) \cup (C \cap W)$$

$$P(W) = P(A \cap W) + P(B \cap W) + P(C \cap W)$$

$$P(W|A) = \frac{P(A \cap W)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap W) = P(A) \cdot P(W|A)$$

Poprawność wzoru na prawdopodobieństwo całkowite (szkic):

$$W = (A \cap W) \cup (B \cap W) \cup (C \cap W)$$

$$P(W) = P(A \cap W) + P(B \cap W) + P(C \cap W)$$

$$P(W|A) = \frac{P(A \cap W)}{P(A)} \Rightarrow \; P(A \cap W) = P(A) \cdot P(W|A)$$

$$P(B \cap W) = P(B) \cdot P(W|B)$$

$$P(C \cap W) = P(C) \cdot P(W|C)$$

Poprawność wzoru na prawdopodobieństwo całkowite (szkic):

$$W = (A \cap W) \cup (B \cap W) \cup (C \cap W)$$

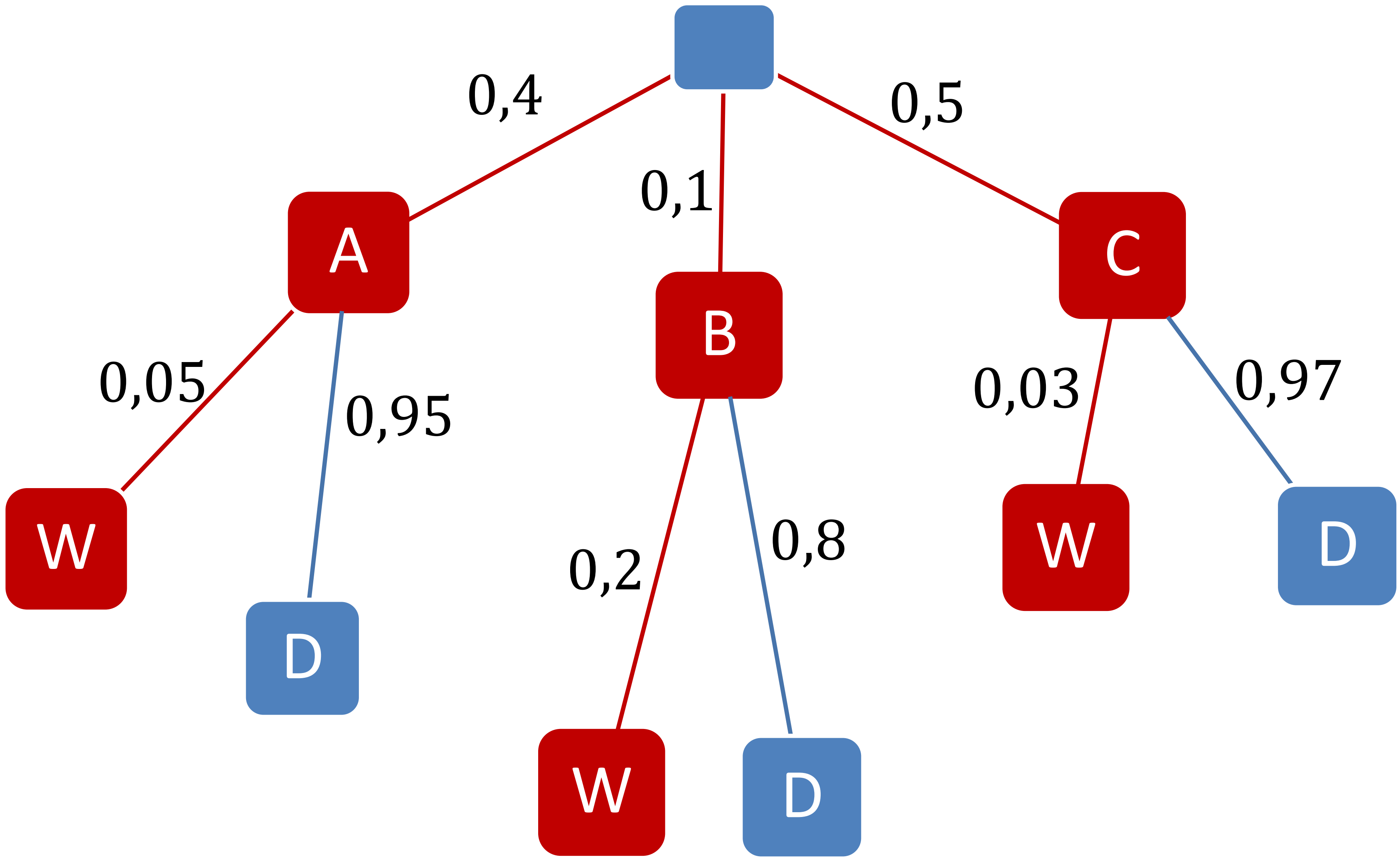
$$P(W) = P(A \cap W) + P(B \cap W) + P(C \cap W)$$

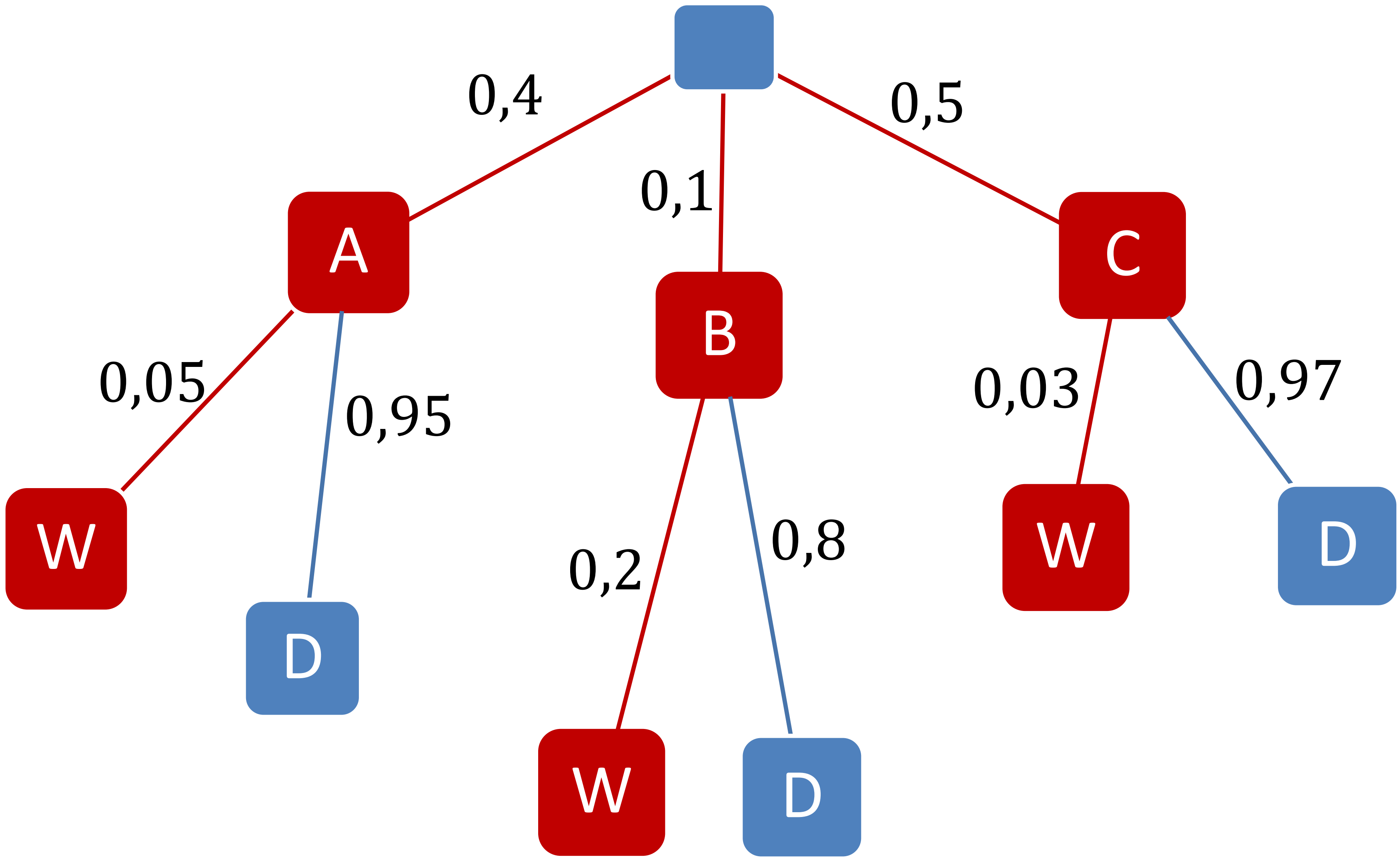
$$P(W|A) = \frac{P(A \cap W)}{P(A)} \Rightarrow \; P(A \cap W) = P(A) \cdot P(W|A)$$

$$P(B \cap W) = P(B) \cdot P(W|B)$$

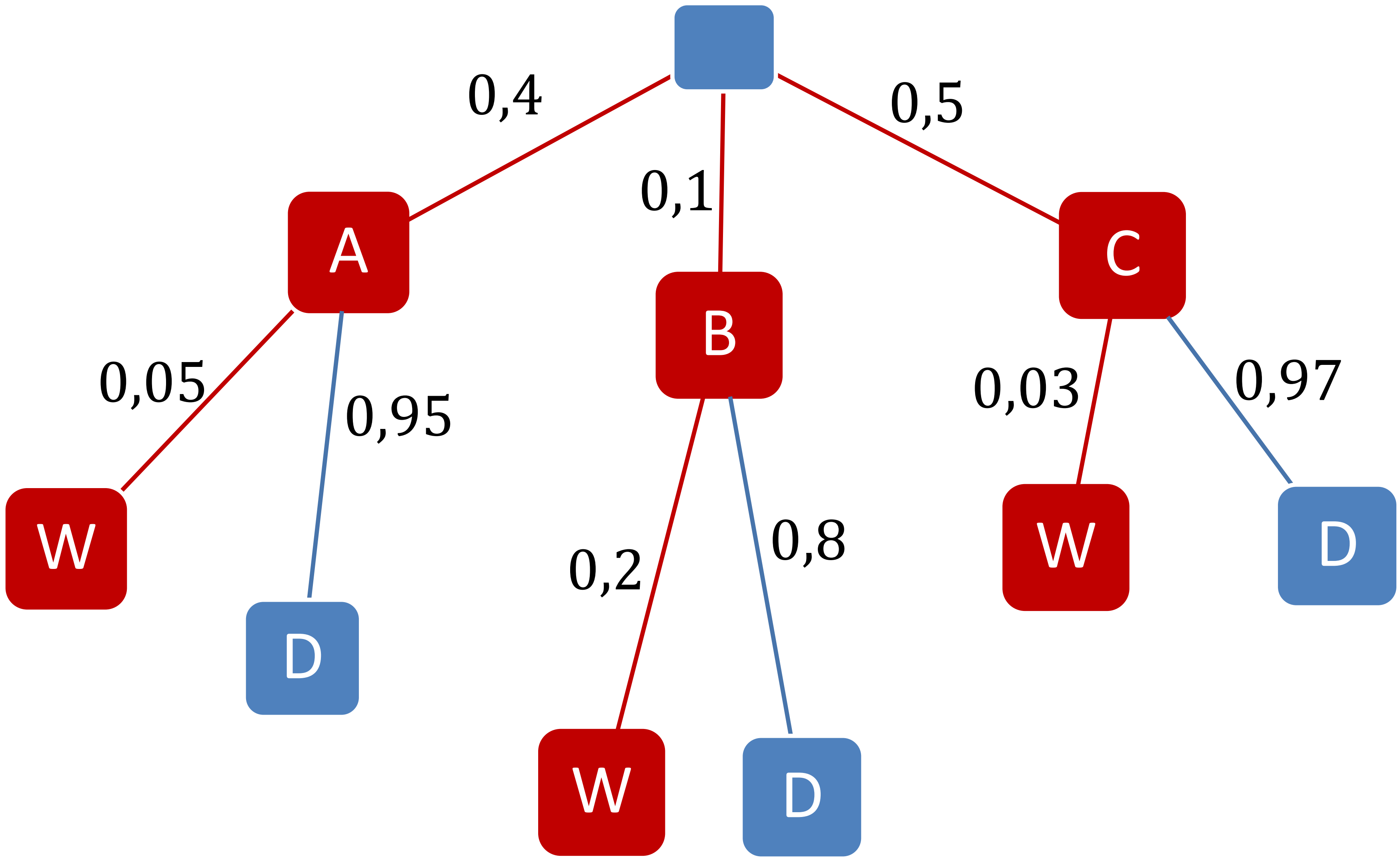
$$P(C \cap W) = P(C) \cdot P(W|C)$$

$$P(W) = P(A) \cdot P(W|A) + P(B) \cdot P(W|B) + P(C) \cdot P(W|C)$$


0,4
0,1
0,5
A
B
C
0,05
0,95
0,2
0,8
0,03
0,97
W
D
W
D
W
D



$$P(W) = 0{,}4 \cdot 0{,}05 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}03 =$$

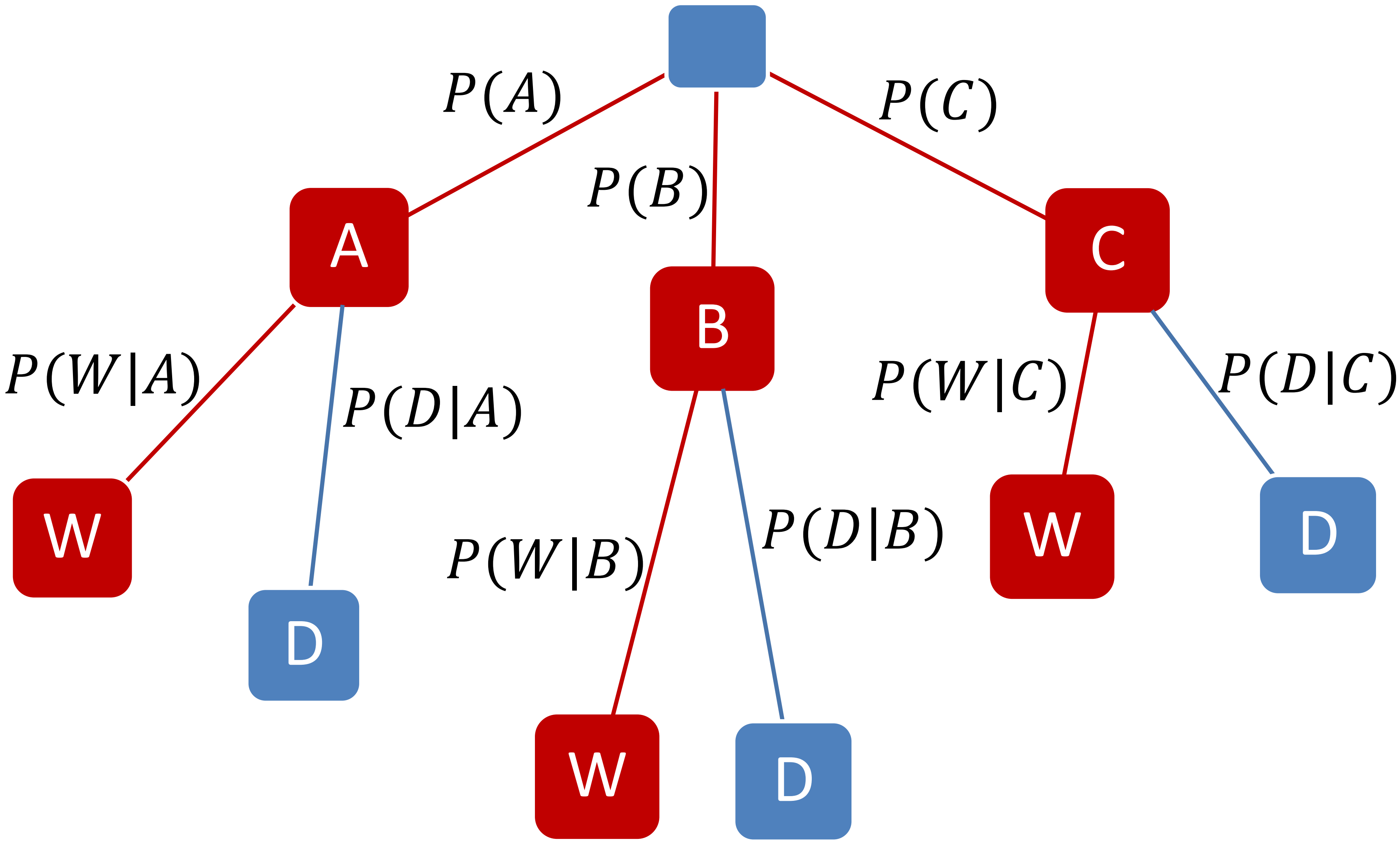


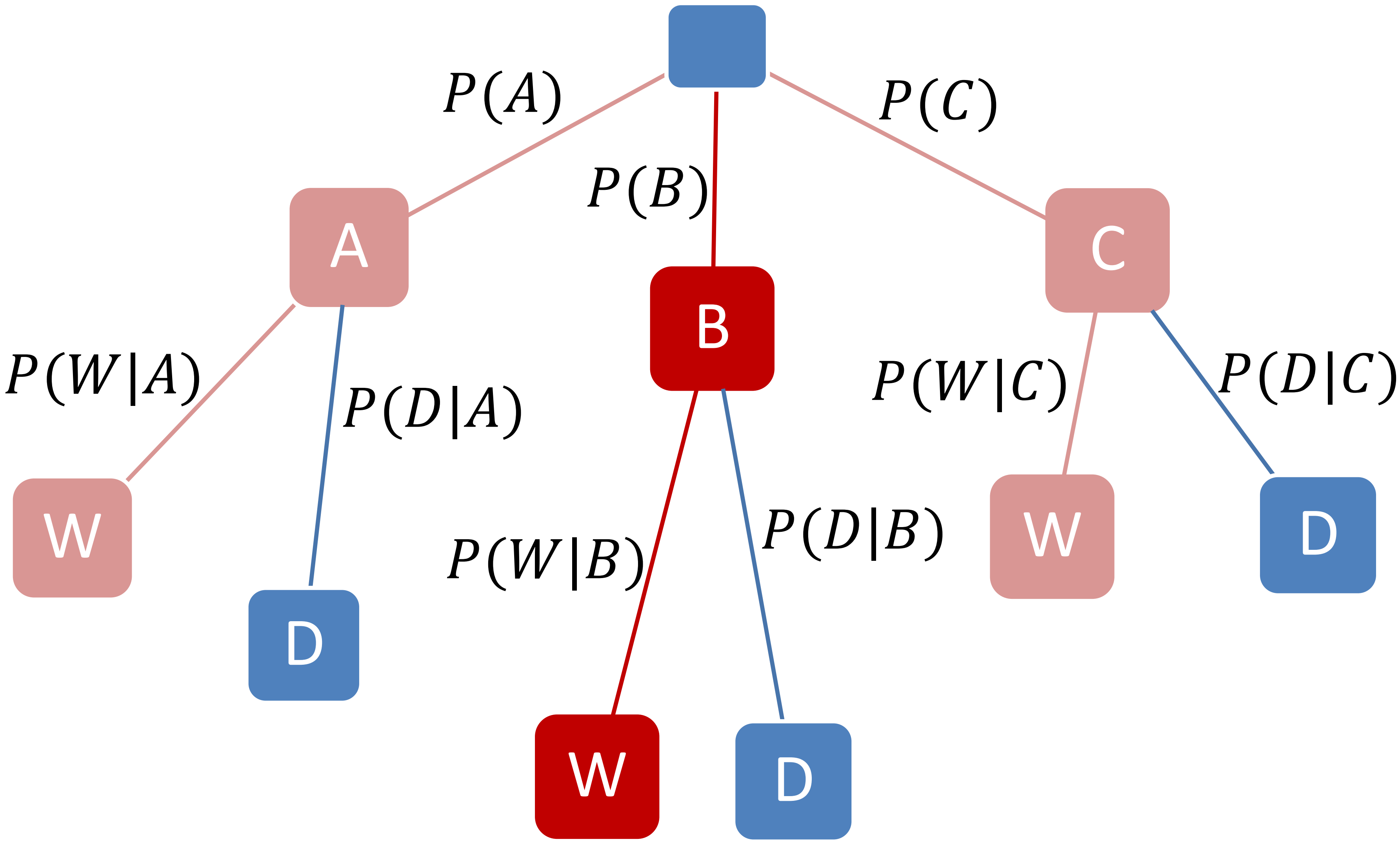
$$P(W) = 0{,}4 \cdot 0{,}05 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}03 =$$
$$0{,}02 + 0{,}02 + 0{,}015 = 0{,}055$$

Przykład:

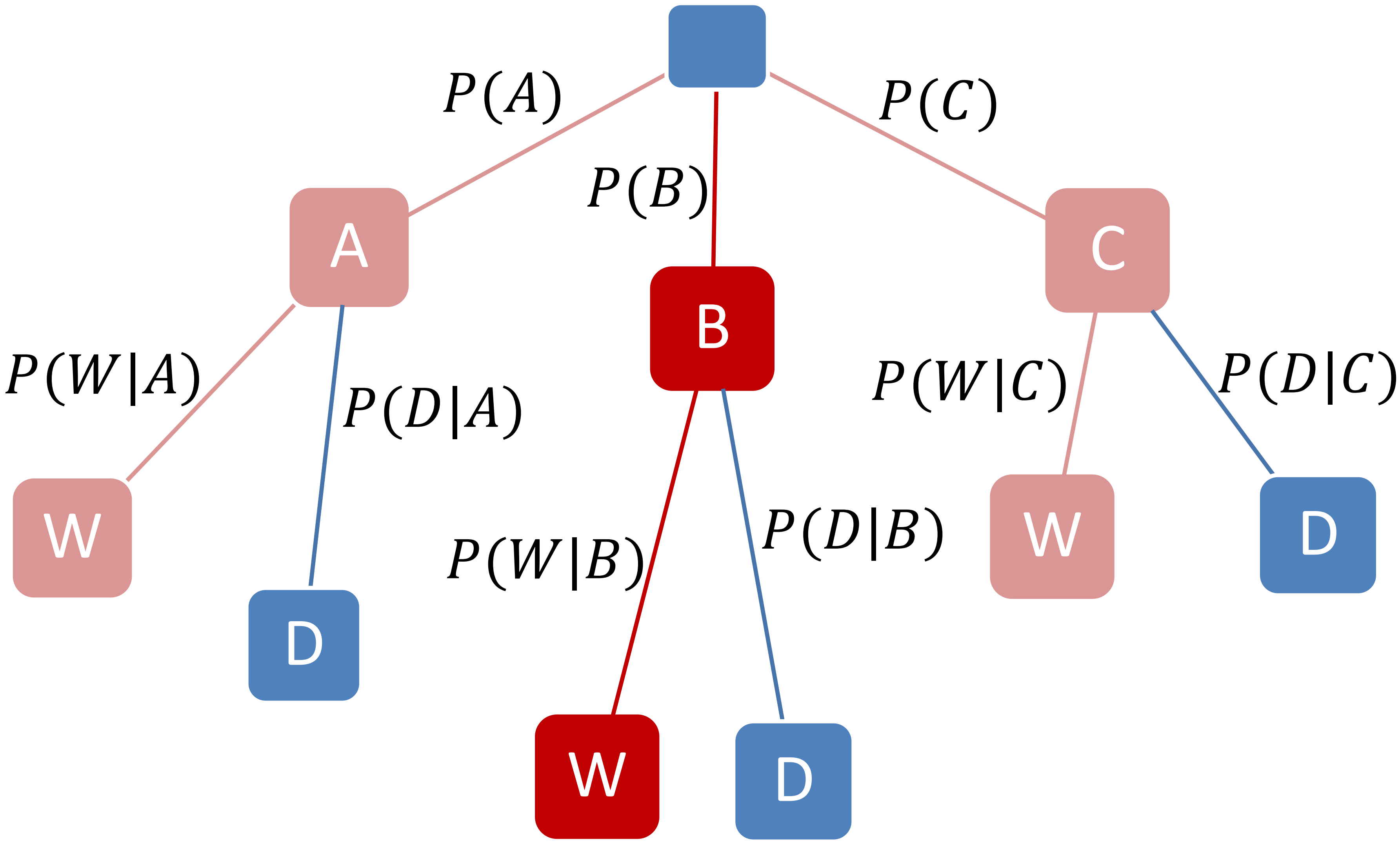
Firma	A	B	C
Części kupione	40%	10%	50%
Części wadliwe	5%	20%	3%

Wiadomo, że otrzymaliśmy część wadliwą. Oblicz prawdopodobieństwo, że została ona zakupiona w firmie B.


$P(A)$
$P(B)$
$P(C)$
A
B
C
$P(W|A)$
$P(D|A)$
$P(W|B)$
$P(D|B)$
$P(W|C)$
$P(D|C)$
W
D
W
D
W
D



P(A)
P(B)
P(C)
A
B
C
P(W|A)
P(D|A)
P(W|B)
P(D|B)
P(W|C)
P(D|C)
W
D
W
D
W
D



$$P(B|W) = ?$$

Wzór Bayesa:

Niech $B_1, B_2, \ldots, B_n \subset \Omega$ tworzą układ zupełny zdarzeń. Wtedy dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A|B_i)}, k \in \{1, 2, .., n\}$$

Dowód:

Niech $k \in \{1, 2, .., n\}$.

$P(B_k|A) =$

Dowód:

Niech $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)}$$

Dowód:

Niech $k \in \{1, 2, .., n\}$.

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A|B_k) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(B_k)}$$

Dowód:

Niech $k \in \{1, 2, .., n\}$.

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A|B_k) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(B_k)} \Rightarrow P(B_k \cap A) = P(B_k) \cdot P(A|B_k)$$

Dowód:

Niech $k \in \{1, 2, .., n\}$.

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A|B_k) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(B_k)} \Rightarrow P(B_k \cap A) = P(B_k) \cdot P(A|B_k)$$

$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A|B_i)$ (prawd. całkowite)

Dowód:

Niech $k \in \{1, 2, .., n\}$.

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A|B_k) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(B_k)} \Rightarrow P(B_k \cap A) = P(B_k) \cdot P(A|B_k)$$

$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A|B_i)$ (prawd. całkowite)

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} =$$

Dowód:

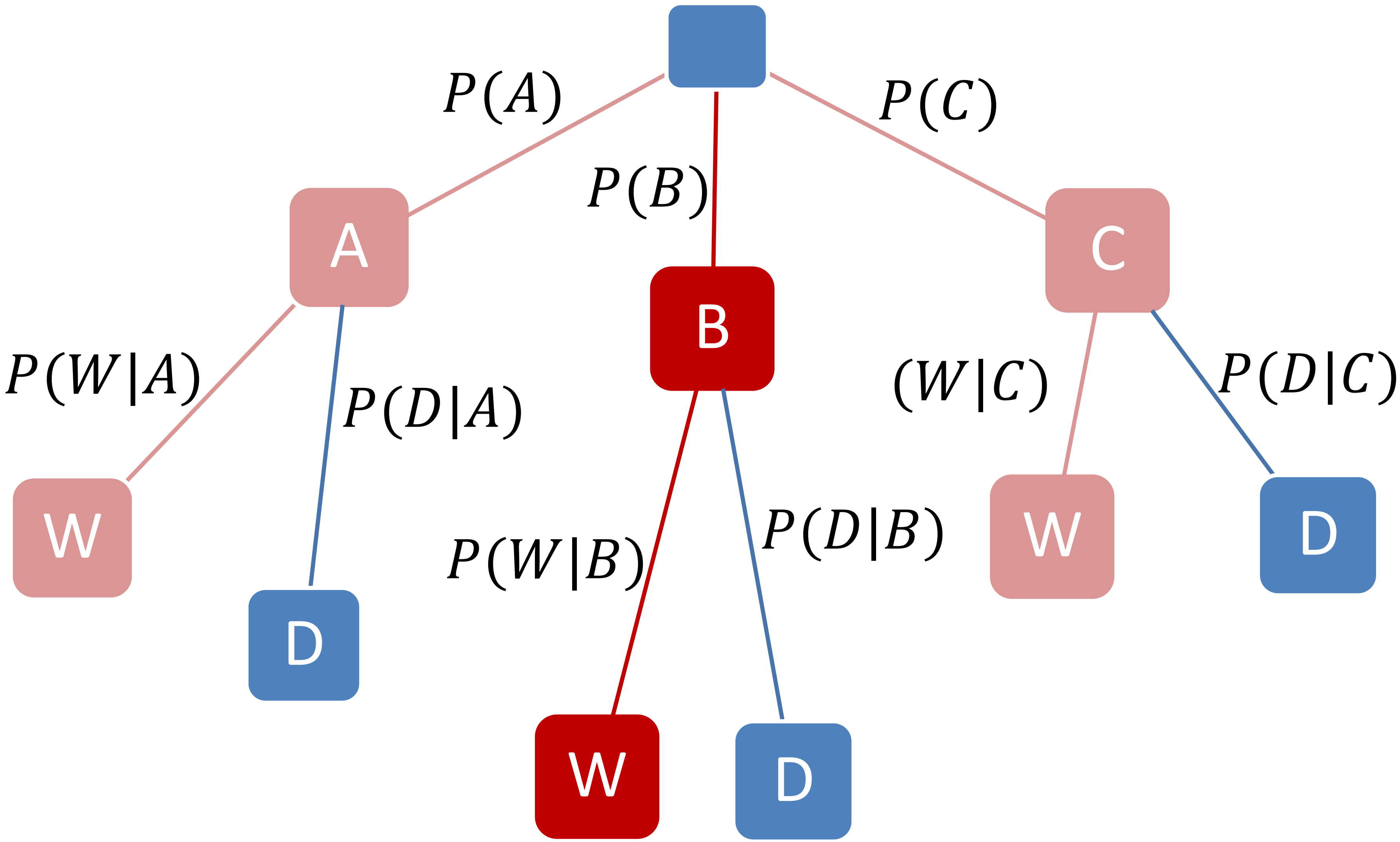
Niech $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)}$$

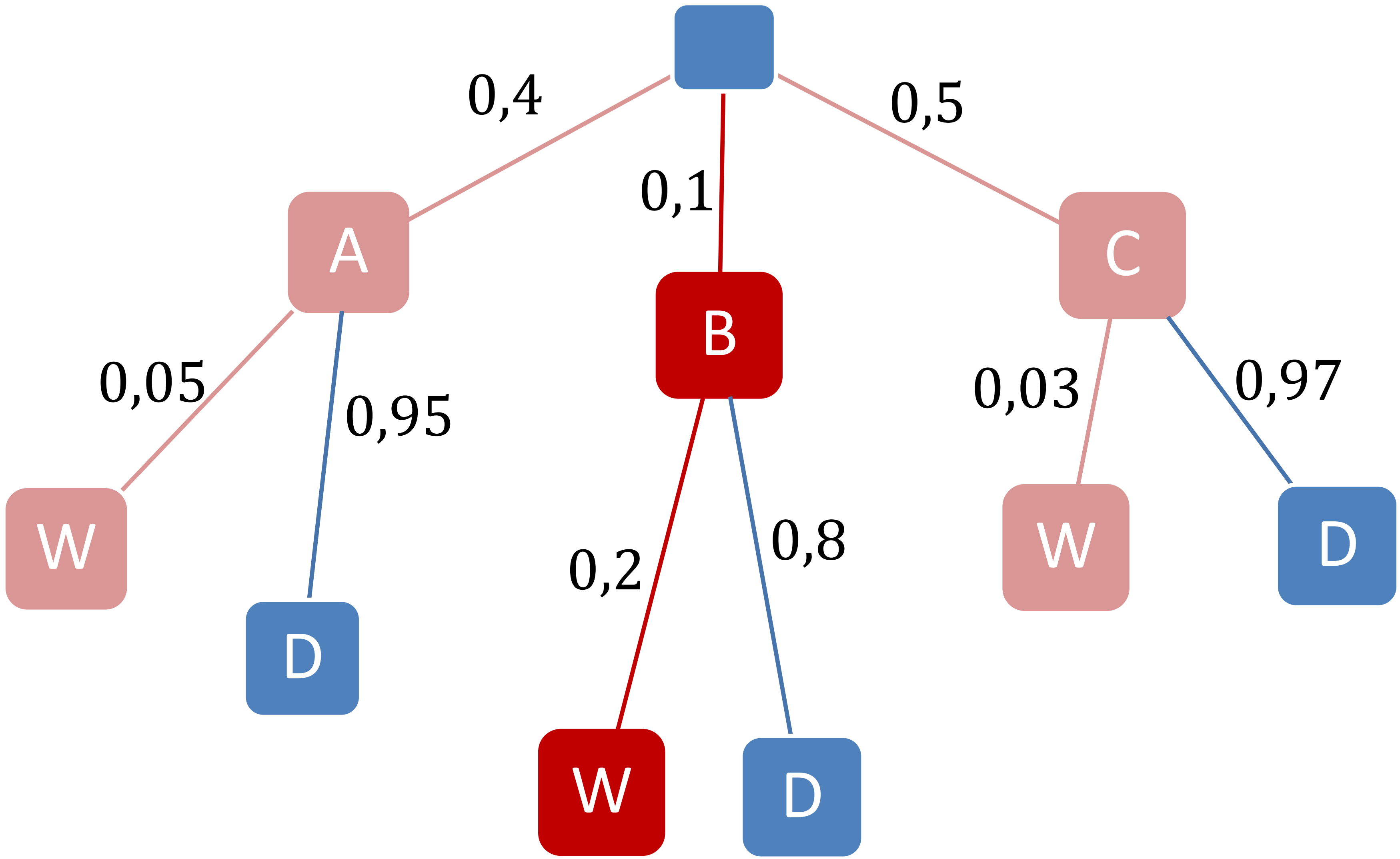
$$P(A|B_k) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(B_k)} \Rightarrow P(B_k \cap A) = P(B_k) \cdot P(A|B_k)$$

$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A|B_i)$ (prawd. całkowite)

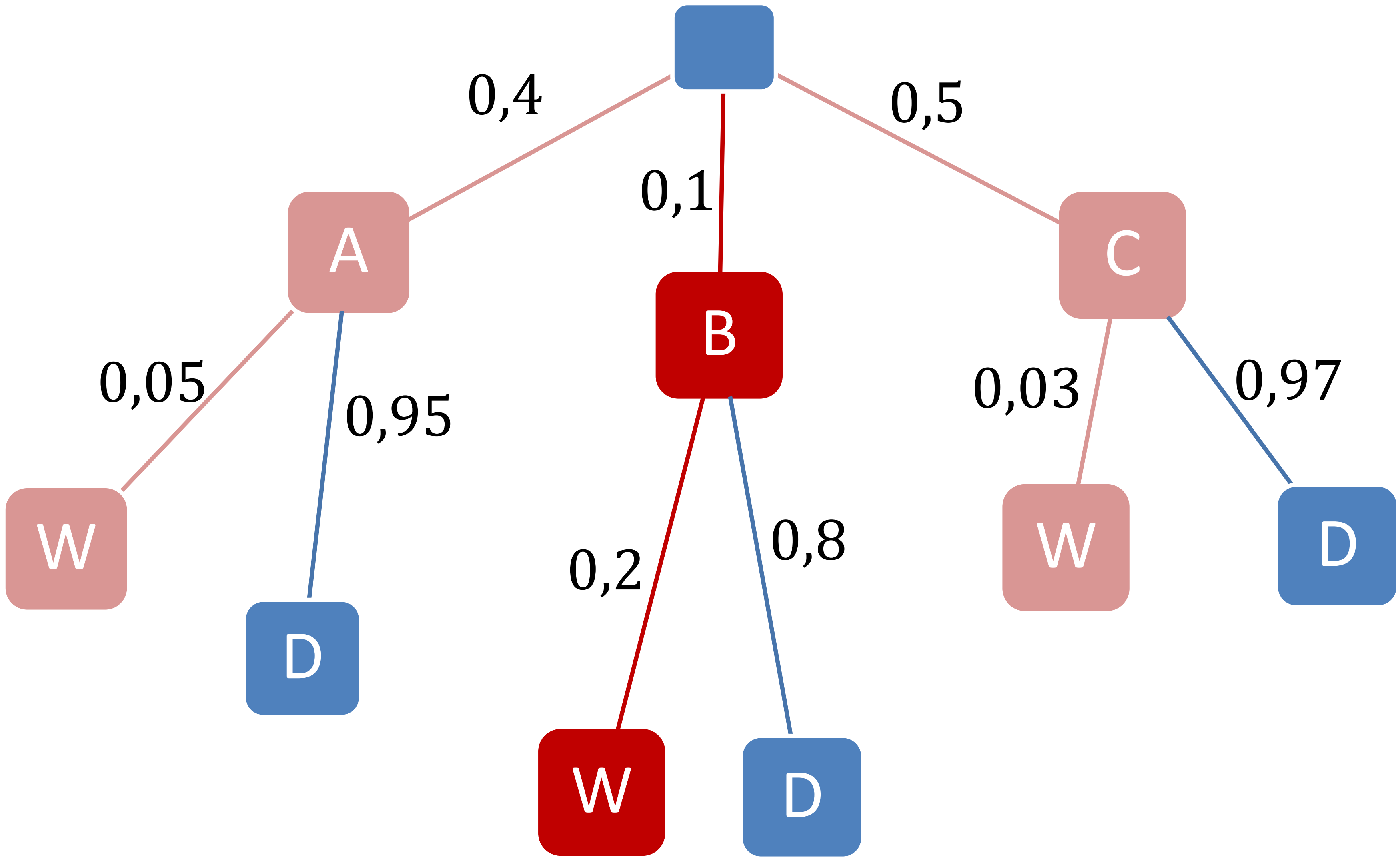
$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A|B_i)}$$



$$P(B|W) = \frac{P(B) \cdot P(W|B)}{P(A) \cdot P(W|A) + P(B) \cdot P(W|B) + P(C) \cdot P(W|C)}$$



$$P(B|W) = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}2}{0{,}4 \cdot 0{,}05 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}03} =$$



$$P(B|W) = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}2}{0{,}4 \cdot 0{,}05 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}03} = \frac{0{,}02}{0{,}055} = \frac{4}{11}$$

Przykład 2

Załóżmy, że na rynku znajdują się tylko dwa rodzaje oleju (O1 i O2). Prawdopodobieństwo awarii w ciągu roku zespołu napędowego przy stosowaniu oleju O1 wynosi 0,02; analogicznie prawdopodobieństwo, przy zastosowaniu oleju O2 wynosi 0,01. Jakie jest prawdopodobieństwo awarii w ciągu roku zespołu napędowego losowo wybranego samochodu, jeśli wiadomo, że 70% kierowców stosuje olej O1, a 70% olej O2?

Jaka jest częstość stosowania oleju O1 w samochodach ulegających awarii?

Przyjmijmy oznaczenia:

A1- kierowca stosuje olej O1

A2- kierowca stosuje olej O2

A - silnik ulegnie awarii w ciągu roku.

P(A)=P(A\A1)P(A1)+ P(A\A2)P(A2)=

=0,02*0,7+0,01*0,3=0,017

$$P(A1|A) = \frac{P(A1) \cdot P(A|A1)}{P(A)} = \frac{0{,}7 * 0{,}02}{0{,}017} = \frac{14}{17}$$

$$P(A2|A) = \frac{P(A2) \cdot P(A|A2)}{P(A)} = \frac{0{,}3 * 0{,}01}{0{,}017} = \frac{3}{17}$$

Przeprowadzane w praktyce badania i eksperymenty mają różnorodny charakter, niemniej jednak wiążą się z rejestracją jakichś sygnałów (danych). Mogą to być np. odczyty na skali, końcowe parametry procesu technologicznego, brak lub wyrób spełniający wymagania normy, prędkość cząsteczki gazu itp. Sygnały te często albo same mają pewne wartości liczbowe, albo można im przypisać pewne charakterystyki liczbowe (np. liczba braków w danej partii produkcji).

Takie charakterystyki liczbowe, które przy powtórzeniach eksperymentu przyjmują różne wartości, określa się mianem **zmiennych losowych**.

Dowolną funkcję $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy **zmienną losową** określoną na przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω.

Symbolem $X(\Omega)$ oznaczamy **zbiór wartości zmiennej losowej** X:

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \colon \omega \in \Omega\}$$

Przykład 1:

Odbiór partii produktów. Rozważmy losowanie produktów z partii w celu zbadania ich jakości. Określmy zmienną losową:

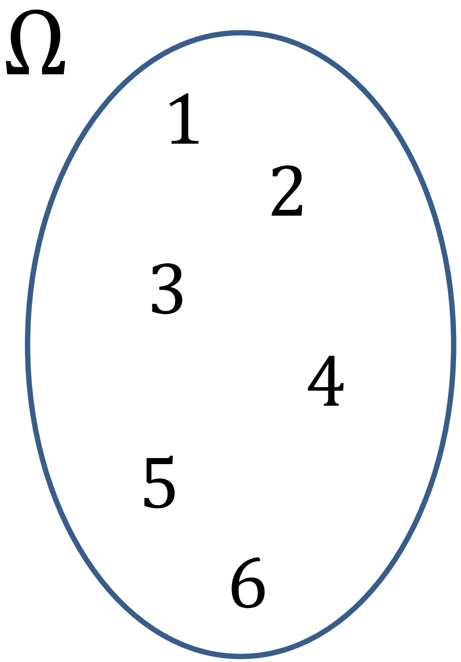
$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & jeśli \;\; \omega \equiv wylosowano\ wyrób\ wadliwy \\ 0, & jeśli \;\; \omega \equiv wylosowano\ wyrób\ dobry \end{cases}$$

Ta zmienna losowa przyjmuje tylko dwie wartości i jest nazywana zerojedynkową.

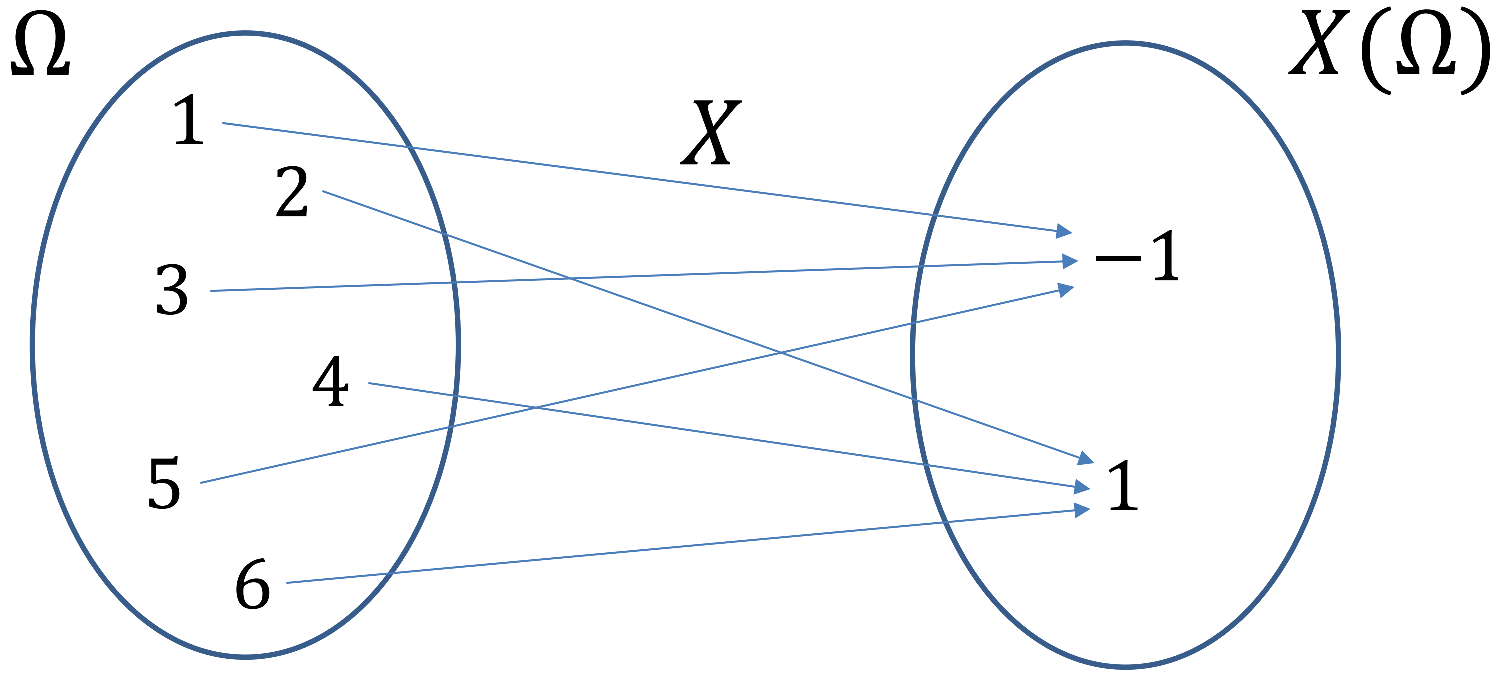
Przykład 2:

Rzucamy raz sześcienną kostką do gry.

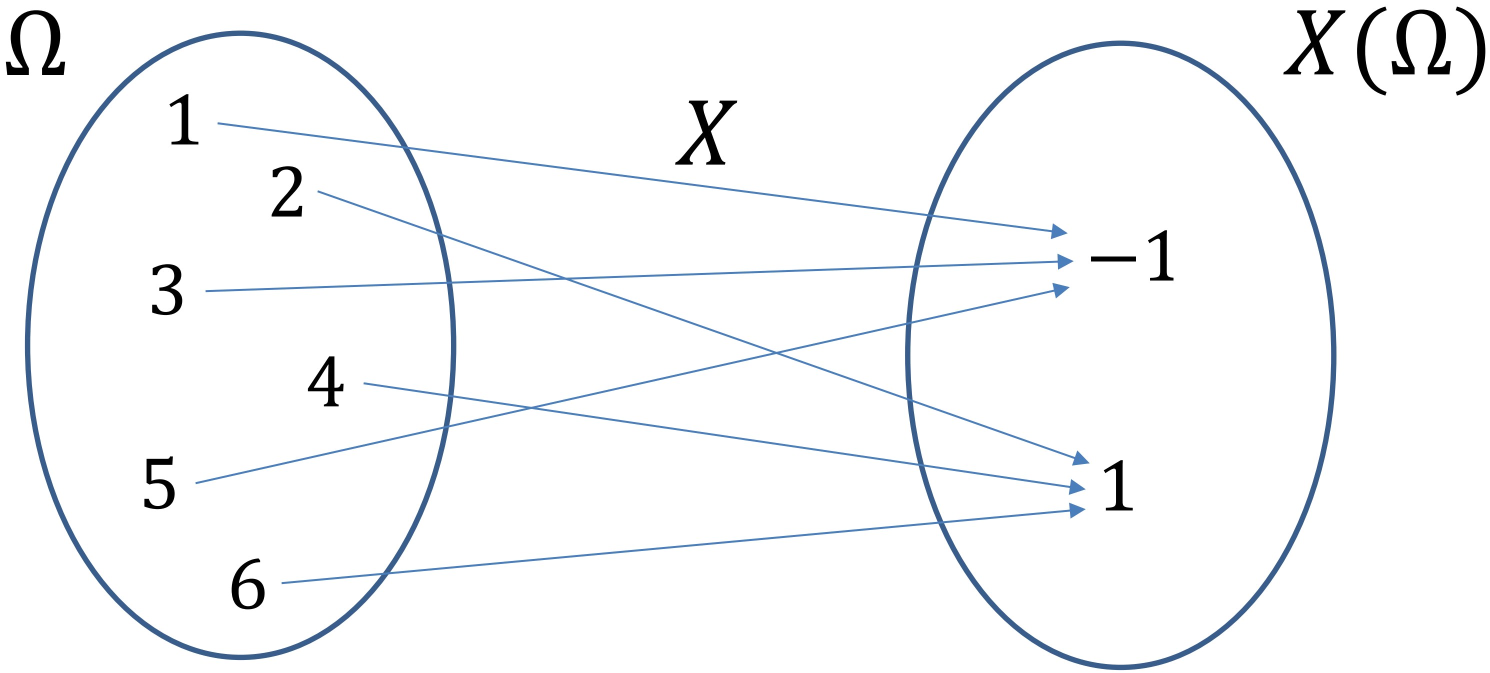
Rzucamy raz sześcienną kostką do gry.



Rzucamy raz sześcienną kostką do gry.



Rzucamy raz sześcienną kostką do gry.



$X(\Omega) = \{-1,1\}$

Zmienną losową X nazywamy **dyskretną (skokową)** jeśli $X(\Omega)$ jest przeliczalny.

Dwa zbiory X i Y nazywamy **równolicznymi**, jeśli istnieje bijekcja $f: X \to Y$.

Zbiór **przeliczalny** to zbiór skończony lub równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych $\mathbb{N}$.

- $\mathbb{N}$ – przeliczalny
- $\mathbb{Z}$ – przeliczalny
- $\mathbb{Q}$ – przeliczalny
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – nieprzeliczalny
- $\mathbb{R}$ – nieprzeliczalny

Zmienna losowa jest typu dyskretnego (skokowego), jeżeli dla pewnego, skończonego lub nie, zbioru $W=\{k_1,k_2,\ldots\}$ zachodzi:

$$p_i \equiv P(\{\omega \in \Omega: X(\omega)=k_i\})>0 \quad \text{dla } k_i \in W$$

$$\text{oraz} \quad \sum p_i = 1$$

Punkty k_i nazywa się punktami skokowymi (atomami), a p_i skokami funkcji rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.

Przykład:

Rzucamy dwoma symetrycznymi kostkami.

Niech:

$$X_s(k,l) = k + l, \text{ dla } (k,l) \in \Omega$$

$$X_s(\Omega) =$$

$$X_s(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$$

$$X_s(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$$

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X_s = k)$											

$$X_s(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$$

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X_s = k)$											

$$P(X_s = 2) =$$

$$X_s(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$$

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X_s = k)$											

$$P(X_s = 2) = P(\{(1,1)\}) =$$

$$X_s(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$$

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X_s = k)$											

$$P(X_s = 2) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$$

$$X_s(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$$

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X_s = k)$	$\frac{1}{36}$										

$$P(X_s = 2) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$$

$$X_s(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$$

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X_s = k)$	$\frac{1}{36}$										

$$P(X_s = 2) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$$

$$P(X_s = 3) =$$

$$X_s(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$$

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X_s = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$									

$$P(X_s = 2) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$$

$$P(X_s = 3) = P(\{(2,1), (1,2)\}) = \frac{2}{36}$$

$$X_s(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$$

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X_s = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$									

$$P(X_s = 2) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$$

$$P(X_s = 3) = P(\{(2,1), (1,2)\}) = \frac{2}{36}$$

$$P(X_s = 4) =$$

$$X_s(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$$

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X_s = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$								

$$P(X_s = 2) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$$

$$P(X_s = 3) = P(\{(2,1), (1,2)\}) = \frac{2}{36}$$

$$P(X_s = 4) = P(\{(3,1), (1,3), (2,2)\}) = \frac{3}{36}$$

$$X_s(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$$

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X_s = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$P(X_s = 2) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$$

$$P(X_s = 3) = P(\{(2,1), (1,2)\}) = \frac{2}{36}$$

$$P(X_s = 4) = P(\{(3,1), (1,3), (2,2)\}) = \frac{3}{36}$$

Funkcją rozkładu prawdopodobieństwa (krótko: **rozkładem prawdopodobieństwa**) zmiennej losowej dyskretnej X nazywamy funkcję $f_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ taką, że:

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{R}} f_X(k) = P(X = k)$$

Dla dowolnej funkcji rozkładu prawdopodobieństwa zachodzi:

$$\sum_{k \in X(\Omega)} f_X(k) = 1$$

$$X_s(\Omega) = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$$

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X_s = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = 1$$

Dyskretne zmienne losowe X i Y są **niezależne** jeśli:

$$\bigwedge_{\substack{k\in X(\Omega)\\ l\in Y(\Omega)}} P(X=k,Y=l)=P(X=k)\cdot P(Y=l)$$

Przykład:

Niech $X(\Omega) = \{-1,0\}, Y(\Omega) = \{1,2\}$ oraz:

$$P(X = 0, Y = 1) = 0{,}42$$

$$P(X = 0, Y = 2) = 0{,}28$$

$$P(X = -1, Y = 1) = 0{,}18$$

Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?

	$X = -1$	$X = 0$	$P(Y = l)$
$Y = 1$	0,18	0,42	
$Y = 2$		0,28	
$P(X = k)$			

	$X = -1$	$X = 0$	$P(Y = l)$
$Y = 1$	0,18	0,42	
$Y = 2$	0,12	0,28	
$P(X = k)$			

	$X = -1$	$X = 0$	$P(Y = l)$
$Y = 1$	0,18	0,42	0,6
$Y = 2$	0,12	0,28	0,4
$P(X = k)$	0,3	0,7	1

	$X = -1$	$X = 0$	$P(Y = l)$
$Y = 1$	0,18	0,42	0,6
$Y = 2$	0,12	0,28	0,4
$P(X = k)$	0,3	0,7	1

$$P(X = -1) \cdot P(Y = 1) =$$

	$X=-1$	$X=0$	$P(Y=l)$
$Y=1$	0,18	0,42	0,6
$Y=2$	0,12	0,28	0,4
$P(X=k)$	0,3	0,7	1

$$P(X=-1)\cdot P(Y=1)=0{,}3\cdot 0{,}6=0{,}18$$

	$X = -1$	$X = 0$	$P(Y = l)$
$Y = 1$	0,18	0,42	0,6
$Y = 2$	0,12	0,28	0,4
$P(X = k)$	0,3	0,7	1

$$P(X = -1) \cdot P(Y = 1) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18 = P(X = -1, Y = 1)$$

	$X=-1$	$X=0$	$P(Y=l)$
$Y=1$	0,18	0,42	0,6
$Y=2$	0,12	0,28	0,4
$P(X=k)$	0,3	0,7	1

$$P(X=-1)\cdot P(Y=1)=0{,}3\cdot 0{,}6=0{,}18=P(X=-1,Y=1)$$

$$P(X=-1)\cdot P(Y=2)=0{,}3\cdot 0{,}4=0{,}12=P(X=-1,Y=2)$$

	$X = -1$	$X = 0$	$P(Y = l)$
$Y = 1$	0,18	0,42	0,6
$Y = 2$	0,12	0,28	0,4
$P(X = k)$	0,3	0,7	1

$$P(X = -1) \cdot P(Y = 1) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18 = P(X = -1, Y = 1)$$

$$P(X = -1) \cdot P(Y = 2) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12 = P(X = -1, Y = 2)$$

$$P(X = 0) \cdot P(Y = 1) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42 = P(X = 0, Y = 1)$$

	$X = -1$	$X = 0$	$P(Y = l)$
$Y = 1$	0,18	0,42	0,6
$Y = 2$	0,12	0,28	0,4
$P(X = k)$	0,3	0,7	1

$$P(X = -1) \cdot P(Y = 1) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18 = P(X = -1, Y = 1)$$

$$P(X = -1) \cdot P(Y = 2) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12 = P(X = -1, Y = 2)$$

$$P(X = 0) \cdot P(Y = 1) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42 = P(X = 0, Y = 1)$$

$$P(X = 0) \cdot P(Y = 2) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28 = P(X = 0, Y = 2)$$

	$X=-1$	$X=0$	$P(Y=l)$
$Y=1$	0,18	0,42	0,6
$Y=2$	0,12	0,28	0,4
$P(X=k)$	0,3	0,7	1

$$P(X=-1)\cdot P(Y=1)=0{,}3\cdot 0{,}6=0{,}18=P(X=-1,Y=1)$$

$$P(X=-1)\cdot P(Y=2)=0{,}3\cdot 0{,}4=0{,}12=P(X=-1,Y=2)$$

$$P(X=0)\cdot P(Y=1)=0{,}7\cdot 0{,}6=0{,}42=P(X=0,Y=1)$$

$$P(X=0)\cdot P(Y=2)=0{,}7\cdot 0{,}4=0{,}28=P(X=0,Y=2)$$

X,Y – niezależne

Przykład:

Rzucamy dwa razy symetryczną kostką. Niech X_1 to wynik rzutu na pierwszej kostce, zaś X_s to suma oczek na obydwu kostkach. Czy zmienne losowe X_1 oraz X_s są niezależne?

Pokażemy, że zmienne X_1 i X_s są zależne:

Pokażemy, że zmienne X_1 i X_s są zależne:

$$P(X_1 = 1) =$$

Pokażemy, że zmienne X_1 i X_s są zależne:

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{6}$$

$$P(X_s = 12) =$$

Pokażemy, że zmienne X_1 i X_s są zależne:

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{6}$$

$$P(X_s = 12) = \frac{1}{36}$$

$$P(X_1 = 1, X_s = 12) =$$

Pokażemy, że zmienne X_1 i X_s są zależne:

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{6}$$

$$P(X_s = 12) = \frac{1}{36}$$

$$P(X_1 = 1, X_s = 12) = 0$$

Pokażemy, że zmienne X_1 i X_s są zależne:

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{6}$$

$$P(X_s = 12) = \frac{1}{36}$$

$$P(X_1 = 1, X_s = 12) = 0$$

$$P(X_1 = 1) \cdot P(X_s = 12) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{216}$$

Pokażemy, że zmienne X_1 i X_s są zależne:

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{6}$$

$$P(X_s = 12) = \frac{1}{36}$$

$$P(X_1 = 1, X_s = 12) = 0$$

$$P(X_1 = 1) \cdot P(X_s = 12) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{216} \neq P(X_1 = 1, X_s = 12)$$

Pokażemy, że zmienne X_1 i X_s są zależne:

$$P(X_1 = 1) = \frac{1}{6}$$

$$P(X_s = 12) = \frac{1}{36}$$

$$P(X_1 = 1, X_s = 12) = 0$$

$$P(X_1 = 1) \cdot P(X_s = 12) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{216} \neq P(X_1 = 1, X_s = 12)$$

X_1, X_s – zależne

Dyskretne zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_n$ są **niezależne** jeśli:

$$\bigwedge_{\substack{k_i \in X_i(\Omega) \\ i \in \{1,2,\dots,n\}}} P(X_1 = k_1,\ X_2 = k_2, \dots, X_n = k_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = k_i)$$