Matematyka Dyskretna

7. Dyskretna teoria prawdopodobieństwa

Dystrybuanta, wartość oczekiwana, odchylenie standardowe

i

Dystrybuantą zmiennej losowej X nazywamy funkcję $F_X\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taką, że:

$$F_X(k) = P(X \leq k)$$

Przykład:

Rzucamy dwiema symetrycznymi kostkami: czterościenną (z liczbą oczek od 1 do 4) i sześciościenną. Niech:

$X_{min}(k,l) = min\{k,l\}$, dla $(k,l) \in \Omega$

Zdefiniuj i narysuj dystrybuantę zmiennej losowej X_{min}.

i

$$X_{min}(\Omega) =$$

i

$$X_{min}(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$$

i

$$X_{min}(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$$

k	1	2	3	4
$P(X_{min} = k)$				

i

$$X_{min}(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$$

k	1	2	3	4
$P(X_{min} = k)$				

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	4	4	4

i

$$X_{min}(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$$

k	1	2	3	4
$P(X_{min} = k)$	$\frac{9}{24}$			

	1	2	3	4	5	6
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
2	**1**	2	2	2	2	2
3	**1**	2	3	3	3	3
4	**1**	2	3	4	4	4

i

$$X_{min}(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$$

k	1	2	3	4
$P(X_{min} = k)$	$\frac{9}{24}$	$\frac{7}{24}$		

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
3	1	**2**	3	3	3	3
4	1	**2**	3	4	4	4

i

$$X_{min}(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$$

k	1	2	3	4
$P(X_{min} = k)$	$\frac{9}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{5}{24}$	

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	**3**	**3**	**3**	**3**
4	1	2	**3**	4	4	4

i

$$X_{min}(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$$

k	1	2	3	4
$P(X_{min} = k)$	$\frac{9}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{3}{24}$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3
4	1	2	3	**4**	**4**	**4**

i

$$X_{min}(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$F_{X_{min}}(k) = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

k	1	2	3	4
$P(X_{min} = k)$	$\frac{9}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{3}{24}$

i

$$X_{min}(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$F_{X_{min}}(k) = \begin{cases} 0 \; dla \; k \in (-\infty, 1) \\ \\ \\ \end{cases}$$

k	1	2	3	4
$P(X_{min} = k)$	$\frac{9}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{3}{24}$

i

$$X_{min}(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$F_{X_{min}}(k) = \begin{cases} 0 \; dla \; k \in (-\infty, 1) \\ \frac{9}{24} \; dla \; k \in [1,2) \\ \\ \end{cases}$$

k	1	2	3	4
$P(X_{min} = k)$	$\frac{9}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{3}{24}$

i

$$X_{min}(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$F_{X_{min}}(k) = \begin{cases} 0 \; dla \; k \in (-\infty, 1) \\ \frac{9}{24} \; dla \; k \in [1,2) \\ \frac{16}{24} \; dla \; k \in [2,3) \\ \end{cases}$$

k	1	2	3	4
$P(X_{min} = k)$	$\frac{9}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{3}{24}$

i

$$X_{min}(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$F_{X_{min}}(k) = \begin{cases} 0, dla\ k \in (-\infty, 1) \\ \frac{9}{24}\ dla\ k \in [1,2) \\ \frac{16}{24}\ dla\ k \in [2,3) \\ \frac{21}{24}\ dla\ k \in [3,4) \end{cases}$$

k	1	2	3	4
$P(X_{min} = k)$	$\frac{9}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{3}{24}$

i

$$X_{min}(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$F_{X_{min}}(k) = \begin{cases} 0 \; dla \; k \in (-\infty, 1) \\ \frac{9}{24} \; dla \; k \in [1,2) \\ \frac{16}{24} \; dla \; k \in [2,3) \\ \frac{21}{24} \; dla \; k \in [3,4) \\ 1 \; dla \; k \in [4, \infty) \end{cases}$$

k	1	2	3	4
$P(X_{min} = k)$	$\frac{9}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{3}{24}$

Własności dystrybuanty dyskretnej zmiennej losowej:

- funkcja niemalejąca
- przyjmuje wartości z przedziału $[0,1]$
- prawostronnie ciągła

i

Przykład:

Niech:

$$F_X(k) = \begin{cases} 0\ dla\ k \in (-\infty, -2) \\ 0{,}3\ dla\ k \in [-2{,}3) \\ 0{,}35\ dla\ k \in [3{,}5) \\ 0{,}85\ dla\ k \in [5{,}7) \\ 1\ dla\ k \in [7, \infty) \end{cases}$$

Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.

i

$$F_X(k) = \begin{cases} 0\ dla\ k \in (-\infty, -2) \\ 0{,}3\ dla\ k \in [-2{,}3) \\ 0{,}35\ dla\ k \in [3{,}5) \\ 0{,}85\ dla\ k \in [5{,}7) \\ 1\ dla\ k \in [7, \infty) \end{cases}$$

$$X(\Omega) =$$

i

$$F_X(k) = \begin{cases} 0 \; dla \; k \in (-\infty, -2) \\ 0{,}3 \; dla \; k \in [-2{,}3) \\ 0{,}35 \; dla \; k \in [3{,}5) \\ 0{,}85 \; dla \; k \in [5{,}7) \\ 1 \; dla \; k \in [7, \infty) \end{cases}$$

$$X(\Omega) = \{-2, 3, 5{,}7\}$$

k	-2	3	5	7
$P(X = k)$				

i

$$F_X(k) = \begin{cases} 0\ dla\ k \in (-\infty, -2) \\ 0{,}3\ dla\ k \in [-2{,}3) \\ 0{,}35\ dla\ k \in [3{,}5) \\ 0{,}85\ dla\ k \in [5{,}7) \\ 1\ dla\ k \in [7, \infty) \end{cases}$$

$$X(\Omega) = \{-2, 3, 5{,}7\}$$

$$P(X = -2) =$$

k	-2	3	5	7
$P(X = k)$				

i

$$F_X(k) = \begin{cases} 0 \; dla \; k \in (-\infty, -2) \\ 0{,}3 \; dla \; k \in [-2{,}3) \\ 0{,}35 \; dla \; k \in [3{,}5) \\ 0{,}85 \; dla \; k \in [5{,}7) \\ 1 \; dla \; k \in [7, \infty) \end{cases}$$

$$X(\Omega) = \{-2, 3, 5{,}7\}$$

$$P(X = -2) = 0{,}3 - 0 = 0{,}3$$

$$P(X = 3) =$$

k	-2	3	5	7
$P(X = k)$	$0{,}3$			

i

$$F_X(k) = \begin{cases} 0\ dla\ k \in (-\infty, -2) \\ 0{,}3\ dla\ k \in [-2{,}3) \\ 0{,}35\ dla\ k \in [3{,}5) \\ 0{,}85\ dla\ k \in [5{,}7) \\ 1\ dla\ k \in [7, \infty) \end{cases}$$

$$X(\Omega) = \{-2, 3, 5{,}7\}$$

$$P(X = -2) = 0{,}3 - 0 = 0{,}3$$

$$P(X = 3) = 0{,}35 - 0{,}3 = 0{,}05$$

$$P(X = 5) =$$

k	-2	3	5	7
$P(X = k)$	$0{,}3$	$0{,}05$		

i

$$F_X(k) = \begin{cases} 0 \; dla \; k \in (-\infty, -2) \\ 0{,}3 \; dla \; k \in [-2{,}3) \\ 0{,}35 \; dla \; k \in [3{,}5) \\ 0{,}85 \; dla \; k \in [5{,}7) \\ 1 \; dla \; k \in [7, \infty) \end{cases}$$

$$X(\Omega) = \{-2, 3, 5{,}7\}$$

$$P(X = -2) = 0{,}3 - 0 = 0{,}3$$

$$P(X = 3) = 0{,}35 - 0{,}3 = 0{,}05$$

$$P(X = 5) = 0{,}85 - 0{,}35 = 0{,}5$$

$$P(X = 7) =$$

k	-2	3	5	7
$P(X = k)$	$0{,}3$	$0{,}05$	$0{,}5$	

i

$$F_X(k) = \begin{cases} 0 \ dla \ k \in (-\infty, -2) \\ 0{,}3 \ dla \ k \in [-2{,}3) \\ 0{,}35 \ dla \ k \in [3{,}5) \\ 0{,}85 \ dla \ k \in [5{,}7) \\ 1 \ dla \ k \in [7, \infty) \end{cases}$$

$$X(\Omega) = \{-2, 3, 5{,}7\}$$

$$P(X = -2) = 0{,}3 - 0 = 0{,}3$$

$$P(X = 3) = 0{,}35 - 0{,}3 = 0{,}05$$

$$P(X = 5) = 0{,}85 - 0{,}35 = 0{,}5$$

$$P(X = 7) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$$

k	-2	3	5	7
$P(X = k)$	$0{,}3$	$0{,}05$	$0{,}5$	$0{,}15$

Przykład:

Rzucamy symetryczną monetą aż do momentu gdy wypadnie pierwszy orzeł. Niech zmienna losowa Z oznacza liczbę wykonanych rzutów. Znajdź rozkład prawdopodobieństwa Z, dystrybuantę oraz oblicz: $P(Z = 6)$, $P(4 \leq Z \leq 5)$, $P(Z \leq 20)$, $P(Z > 10)$, $P(Z \geq 30)$, $P(5 \leq Z < 15)$.

i

$$Z(\Omega) =$$

i

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}$$

k	1	2	3	…	n	…
$P(Z = k)$						

i

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}$$

k	1	2	3	$\ldots$	n	$\ldots$
$P(Z = k)$	$\frac{1}{2}$					

i

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}$$

k	1	2	3	…	n	…
$P(Z = k)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$				

i

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}$$

k	1	2	3	$\dots$	n	$\dots$
$P(Z = k)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\dots$		

i

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}$$

k	1	2	3	$\dots$	n	$\dots$
$P(Z = k)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\dots$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\dots$

i

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}$$

k	1	2	3	…	n	…
$P(Z = k)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	…	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	…

$$F_Z(k) = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

i

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}$$

k	1	2	3	…	n	…
$P(Z = k)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	…	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	…

$$F_Z(k) = \begin{cases} 0 \ dla \ k \in (-\infty, 1) \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

i

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}$$

k	1	2	3	…	n	…
$P(Z = k)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	…	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	…

$$F_Z(k) = \begin{cases} 0 \; dla \; k \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{2} \; dla \; k \in [1,2) \\ \\ \\ \end{cases}$$

i

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}$$

k	1	2	3	…	n	…
$P(Z = k)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	…	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	…

$$F_Z(k) = \begin{cases} 0 \; dla \; k \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{2} \; dla \; k \in [1,2) \\ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \; dla \; k \in [2,3) \\ \dots \end{cases}$$

i

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}$$

k	1	2	3	…	n	…
$P(Z = k)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	…	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	…

$$F_Z(k) = \begin{cases} 0 \ dla \ k \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{2} \ dla \ k \in [1,2) \\ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 dla \ k \in [2,3) \\ \dots \\ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n dla \ k \in [n, n+1) \\ \dots \end{cases}$$

i

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}$$

k	1	2	3	…	n	…
$P(Z = k)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	…	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	…

$$P(Z = 6) =$$

i

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}$$

k	1	2	3	…	n	…
$P(Z = k)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	…	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	…

$$P(Z = 6) = \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$P(4 \leq Z \leq 5) =$$

i

$$Z(\Omega) = \mathbb{N}$$

k	1	2	3	...	n	...
$P(Z = k)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	...	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	...

$$P(Z = 6) = \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$P(4 \leq Z \leq 5) = P(Z = 4) + P(Z = 5) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$P(Z \leq 20) =$$

i

$Z(\Omega) = \mathbb{N}$

k	1	2	3	…	n	…
$P(Z = k)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	…	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	…

$$P(Z = 6) = \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$P(4 \leq Z \leq 5) = P(Z = 4) + P(Z = 5) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$P(Z \leq 20) = F_Z(20)$ (bo $F_Z(k) = P(Z \leq k)$ z definicji)

i

$$F_Z(k) = \begin{cases} 0 \; dla \; k \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{2} \; dla \; k \in [1,2) \\ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \; dla \; k \in [2,3) \\ \dots \\ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \; dla \; k \in [n, n+1) \\ \dots \end{cases}$$

$$F_Z(n) =$$

i

$$F_Z(k) = \begin{cases} 0 \; dla \; k \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{2} \; dla \; k \in [1,2) \\ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \; dla \; k \in [2,3) \\ \dots \\ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \; dla \; k \in [n, n+1) \\ \dots \end{cases}$$

$$F_Z(n) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n =$$

i

$$F_Z(k) = \begin{cases} 0\ dla\ k \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{2}\ dla\ k \in [1,2) \\ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\ dla\ k \in [2,3) \\ \dots \\ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\ dla\ k \in [n, n+1) \\ \dots \end{cases}$$

$$F_Z(n) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} =$$

i

$$F_Z(k) = \begin{cases} 0 \; dla \; k \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{2} \; dla \; k \in [1,2) \\ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \; dla \; k \in [2,3) \\ \dots \\ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \; dla \; k \in [n, n+1) \\ \dots \end{cases}$$

$$F_Z(n) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

i

$$F_Z(n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

$$P(Z \leq 20) = F_Z(20) =$$

i

$$F_Z(n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

$$P(Z \leq 20) = F_Z(20) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

$$P(Z > 10) =$$

i

$$F_Z(n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

$$P(Z \leq 20) = F_Z(20) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

$$P(Z > 10) = 1 - P(Z \leq 10) =$$

i

$$F_Z(n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

$$P(Z \leq 20) = F_Z(20) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

$$P(Z > 10) = 1 - P(Z \leq 10) = 1 - F_Z(10) =$$

i

$$F_Z(n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

$$P(Z \leq 20) = F_Z(20) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

$$P(Z > 10) = 1 - P(Z \leq 10) = 1 - F_Z(10) = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$P(Z \geq 30) =$$

i

$$F_Z(n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

$$P(Z \leq 20) = F_Z(20) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

$$P(Z > 10) = 1 - P(Z \leq 10) = 1 - F_Z(10) = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$P(Z \geq 30) = 1 - P(Z < 30) =$$

i

$$F_Z(n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

$$P(Z \leq 20) = F_Z(20) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

$$P(Z > 10) = 1 - P(Z \leq 10) = 1 - F_Z(10) = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$P(Z \geq 30) = 1 - P(Z < 30) = 1 - P(Z \leq 29) =$$

i

$$F_Z(n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

$$P(Z \leq 20) = F_Z(20) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

$$P(Z > 10) = 1 - P(Z \leq 10) = 1 - F_Z(10) = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$P(Z \geq 30) = 1 - P(Z < 30) = 1 - P(Z \leq 29) = 1 - F_Z(29) =$$
$$1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{29}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{29}$$

$$P(5 \leq Z < 15) =$$

i

$$F_Z(n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

$$P(Z \le 20) = F_Z(20) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

$$P(Z > 10) = 1 - P(Z \le 10) = 1 - F_Z(10) = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$P(Z \ge 30) = 1 - P(Z < 30) = 1 - P(Z \le 29) = 1 - F_Z(29) =$$

$$1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{29}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{29}$$

$$P(5 \le Z < 15) = P(Z < 15) - P(Z < 5) =$$

i

$$F_Z(n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

$$P(Z \leq 20) = F_Z(20) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

$$P(Z > 10) = 1 - P(Z \leq 10) = 1 - F_Z(10) = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$P(Z \geq 30) = 1 - P(Z < 30) = 1 - P(Z \leq 29) = 1 - F_Z(29) =$$
$$1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{29}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{29}$$

$$P(5 \leq Z < 15) = P(Z < 15) - P(Z < 5) = P(Z \leq 14) - P(Z \leq 4) =$$

i

$$F_Z(n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

$$P(Z \leq 20) = F_Z(20) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

$$P(Z > 10) = 1 - P(Z \leq 10) = 1 - F_Z(10) = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$P(Z \geq 30) = 1 - P(Z < 30) = 1 - P(Z \leq 29) = 1 - F_Z(29) =$$
$$1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{29}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{29}$$

$$P(5 \leq Z < 15) = P(Z < 15) - P(Z < 5) = P(Z \leq 14) - P(Z \leq 4) =$$
$$F_Z(14) - F_Z(4) =$$

i

$$F_Z(n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

$$P(Z \leq 20) = F_Z(20) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

$$P(Z > 10) = 1 - P(Z \leq 10) = 1 - F_Z(10) = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$P(Z \geq 30) = 1 - P(Z < 30) = 1 - P(Z \leq 29) = 1 - F_Z(29) =$$
$$1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{29}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{29}$$

$$P(5 \leq Z < 15) = P(Z < 15) - P(Z < 5) = P(Z \leq 14) - P(Z \leq 4) =$$
$$F_Z(14) - F_Z(4) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{14} - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{4}\right) =$$

i

$$F_Z(n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

$$P(Z \leq 20) = F_Z(20) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$$

$$P(Z > 10) = 1 - P(Z \leq 10) = 1 - F_Z(10) = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$P(Z \geq 30) = 1 - P(Z < 30) = 1 - P(Z \leq 29) = 1 - F_Z(29) =$$
$$1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{29}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{29}$$

$$P(5 \leq Z < 15) = P(Z < 15) - P(Z < 5) = P(Z \leq 14) - P(Z \leq 4) =$$
$$F_Z(14) - F_Z(4) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{14} - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{14}$$

i

Dystrybuanta często ułatwia obliczenie prawdopodobieństwa znalezienia się zmiennej losowej w przedziale liczbowym, gdyż:

$$F_X(k) = P(X \in (-\infty, k])$$

Czyli:

$$P(X \leq b) = F_X(b)$$

$$P(X > a) = 1 - F_X(a)$$

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

i

Wartością oczekiwaną (wartością przeciętną, nadzieją matematyczną, średnią) dyskretnej zmiennej losowej X nazywamy liczbę:

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$$

Często wartość oczekiwaną liczymy ze wzoru:

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

i

Dowód:

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}) =$$

i

Dowód:

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = \sum_{k \in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega \in \Omega: \\ X(\omega)=k}} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}) =$$

i

Dowód:

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = \sum_{k \in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega \in \Omega: \\ X(\omega)=k}} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}) =$$

$$\sum_{k \in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega \in \Omega: \\ X(\omega)=k}} k \cdot P(\{\omega\}) =$$

i

Dowód:

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = \sum_{k \in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega \in \Omega: \\ X(\omega) = k}} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}) =$$

$$\sum_{k \in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega \in \Omega: \\ X(\omega) = k}} k \cdot P(\{\omega\}) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot \sum_{\substack{\omega \in \Omega: \\ X(\omega) = k}} P(\{\omega\}) =$$

i

Dowód:

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = \sum_{k \in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega \in \Omega: \\ X(\omega)=k}} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}) =$$

$$\sum_{k \in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega \in \Omega: \\ X(\omega)=k}} k \cdot P(\{\omega\}) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot \sum_{\substack{\omega \in \Omega: \\ X(\omega)=k}} P(\{\omega\}) =$$

$$\sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Interpretacja fizyczna

Masa odcinka $(-\infty,x>$ wynosi $F(x)$, wartość oczekiwana jest współrzędną środka masy.

Przykład:

Niech X oznacza wynik rzutu symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz średnią wartość zmiennej losowej X.

i

$$X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$$

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

i

$$X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$$

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k) =$$

i

$$X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$$

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k) =$$

$$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} =$$

i

$X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k) =$

$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} =$

$\frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{1}{6} \cdot 21 = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

Przykład:

Gra polega na wyciągnięciu trzech kul z urny zawierającej 1 kulę białą, 5 czerwonych i 10 czarnych. Jeśli gracz wyciągnie same kule czerwone, to wygrywa 10 zł, jeśli wyciągnie kule we wszystkich kolorach, to wygrywa 2 zł. Za udział w grze gracz płaci 1 zł. Oblicz średni zysk prowadzącego grę.

i

Z – zysk prowadzącego grę (w złotówkach)

i

Z – zysk prowadzącego grę (w złotówkach), $E(Z) = ?$

i

Z – zysk prowadzącego grę (w złotówkach), $E(Z)=?$

$Z(\Omega)=$

i

Z – zysk prowadzącego grę (w złotówkach), $E(Z) = ?$

$Z(\Omega) = \{1, -1, -9\}$

k	1	-1	-9
$P(Z = k)$			

$|\Omega| =$

i

Z – zysk prowadzącego grę (w złotówkach), $E(Z) = ?$

$Z(\Omega) = \{1, -1, -9\}$

k	1	-1	-9
$P(Z = k)$			

$$|\Omega| = |C_{16}^3| = \binom{16}{3} = \frac{16!}{3!\cdot 13!} = \frac{16\cdot 15\cdot 14}{2\cdot 3} = 16 \cdot 5 \cdot 7 = 560$$

i

Z – zysk prowadzącego grę (w złotówkach), $E(Z) =$?

$Z(\Omega) = \{1, -1, -9\}$

k	1	-1	-9
$P(Z = k)$			

$|\Omega| = |C_{16}^{3}| = \binom{16}{3} = \frac{16!}{3!\cdot 13!} = \frac{16\cdot 15\cdot 14}{2\cdot 3} = 16 \cdot 5 \cdot 7 = 560$

$P(Z = -9) =$

i

Z – zysk prowadzącego grę (w złotówkach), $E(Z) =$?

$$Z(\Omega) = \{1, -1, -9\}$$

k	1	-1	-9
$P(Z = k)$			

$$|\Omega| = |C_{16}^3| = \binom{16}{3} = \frac{16!}{3! \cdot 13!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{2 \cdot 3} = 16 \cdot 5 \cdot 7 = 560$$

$$P(Z = -9) = \frac{|C_5^3|}{560} = \frac{10}{560} = \frac{1}{56}$$

i

Z – zysk prowadzącego grę (w złotówkach), $E(Z) = ?$

$$Z(\Omega) = \{1, -1, -9\}$$

k	1	-1	-9
$P(Z = k)$			$\frac{1}{56}$

$$|\Omega| = |C_{16}^3| = \binom{16}{3} = \frac{16!}{3! \cdot 13!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{2 \cdot 3} = 16 \cdot 5 \cdot 7 = 560$$

$$P(Z = -9) = \frac{|C_5^3|}{560} = \frac{10}{560} = \frac{1}{56}$$

i

Z – zysk prowadzącego grę (w złotówkach), $E(Z) =$?

$Z(\Omega) = \{1, -1, -9\}$

k	1	-1	-9
$P(Z = k)$			$\frac{1}{56}$

$$|\Omega| = |C_{16}^{3}| = \binom{16}{3} = \frac{16!}{3!\cdot 13!} = \frac{16\cdot 15\cdot 14}{2\cdot 3} = 16 \cdot 5 \cdot 7 = 560$$

$$P(Z = -9) = \frac{|C_5^3|}{560} = \frac{10}{560} = \frac{1}{56}$$

$$P(Z = -1) =$$

i

Z – zysk prowadzącego grę (w złotówkach), $E(Z) = ?$

$Z(\Omega) = \{1, -1, -9\}$

k	1	-1	-9
$P(Z = k)$			$\frac{1}{56}$

$$|\Omega| = |C_{16}^3| = \binom{16}{3} = \frac{16!}{3! \cdot 13!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{2 \cdot 3} = 16 \cdot 5 \cdot 7 = 560$$

$$P(Z = -9) = \frac{|C_5^3|}{560} = \frac{10}{560} = \frac{1}{56}$$

$$P(Z = -1) = \frac{|C_{10}^1| \cdot |C_5^1| \cdot |C_1^1|}{560} = \frac{50}{560} = \frac{5}{56}$$

i

Z – zysk prowadzącego grę (w złotówkach), $E(Z) = ?$

$$Z(\Omega) = \{1, -1, -9\}$$

k	1	-1	-9
$P(Z = k)$		$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

$$|\Omega| = |C_{16}^3| = \binom{16}{3} = \frac{16!}{3! \cdot 13!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{2 \cdot 3} = 16 \cdot 5 \cdot 7 = 560$$

$$P(Z = -9) = \frac{|C_5^3|}{560} = \frac{10}{560} = \frac{1}{56}$$

$$P(Z = -1) = \frac{|C_{10}^1| \cdot |C_5^1| \cdot |C_1^1|}{560} = \frac{50}{560} = \frac{5}{56}$$

i

Z – zysk prowadzącego grę (w złotówkach), $E(Z) =$?

$Z(\Omega) = \{1, -1, -9\}$

k	1	-1	-9
$P(Z = k)$	$\frac{50}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

$$|\Omega| = |C_{16}^{3}| = \binom{16}{3} = \frac{16!}{3!\cdot 13!} = \frac{16\cdot 15\cdot 14}{2\cdot 3} = 16 \cdot 5 \cdot 7 = 560$$

$$P(Z = -9) = \frac{|C_5^3|}{560} = \frac{10}{560} = \frac{1}{56}$$

$$P(Z = -1) = \frac{|C_{10}^1|\cdot|C_5^1|\cdot|C_1^1|}{560} = \frac{50}{560} = \frac{5}{56}$$

i

Z – zysk prowadzącego grę (w złotówkach), $E(Z) = ?$

$Z(\Omega) = \{1, -1, -9\}$

k	1	-1	-9
$P(Z = k)$	$\frac{50}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

$E(Z) =$

i

Z – zysk prowadzącego grę (w złotówkach), $E(Z) =?$

$Z(\Omega) = \{1, -1, -9\}$

k	1	-1	-9
$P(Z = k)$	$\frac{50}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

$$E(Z) = 1 \cdot \frac{50}{56} - 1 \cdot \frac{5}{56} - 9 \cdot \frac{1}{56} =$$

i

Z – zysk prowadzącego grę (w złotówkach), $E(Z) = ?$

$Z(\Omega) = \{1, -1, -9\}$

k	1	-1	-9
$P(Z = k)$	$\frac{50}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

$$E(Z) = 1 \cdot \frac{50}{56} - 1 \cdot \frac{5}{56} - 9 \cdot \frac{1}{56} = \frac{50}{56} - \frac{5}{56} - \frac{9}{56} = \frac{36}{56} \approx 0{,}64$$

Przykład:

Ile musiałaby być równa główna wygrana w poprzedniej grze, aby gra była sprawiedliwa?

i

Gra jest **sprawiedliwa** jeśli średnia wygrana gracza (średnia wygrana prowadzącego grę) jest równa 0.

i

Z – zysk prowadzącego grę (w złotówkach)

x – główna wygrana (w złotówkach)

$$Z(\Omega) = \{1, -1, ?\}$$

i

Z – zysk prowadzącego grę (w złotówkach)

x – główna wygrana (w złotówkach)

$Z(\Omega) = \{1, -1, 1 - x\}$

i

Z – zysk prowadzącego grę (w złotówkach)

x – główna wygrana (w złotówkach)

$$Z(\Omega) = \{1, -1, 1 - x\}$$

k	1	-1	$1 - x$
$P(Z = k)$	$\frac{50}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

$$E(Z) =$$

i

Z – zysk prowadzącego grę (w złotówkach)

x – główna wygrana (w złotówkach)

$Z(\Omega) = \{1, -1, 1 - x\}$

k	1	-1	$1 - x$
$P(Z = k)$	$\frac{50}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

$$E(Z) = 1 \cdot \frac{50}{56} - 1 \cdot \frac{5}{56} + (1 - x) \cdot \frac{1}{56} =$$

i

Z – zysk prowadzącego grę (w złotówkach)

x – główna wygrana (w złotówkach)

$Z(\Omega) = \{1, -1, 1 - x\}$

k	1	-1	$1 - x$
$P(Z = k)$	$\frac{50}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

$$E(Z) = 1 \cdot \frac{50}{56} - 1 \cdot \frac{5}{56} + (1 - x) \cdot \frac{1}{56} = \frac{50}{56} - \frac{5}{56} + \frac{1-x}{56} = \frac{46-x}{56} =$$

i

Z – zysk prowadzącego grę (w złotówkach)

x – główna wygrana (w złotówkach)

$Z(\Omega) = \{1, -1, 1 - x\}$

k	1	-1	$1 - x$
$P(Z = k)$	$\frac{50}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

$E(Z) = 1 \cdot \frac{50}{56} - 1 \cdot \frac{5}{56} + (1 - x) \cdot \frac{1}{56} = \frac{50}{56} - \frac{5}{56} + \frac{1-x}{56} =$
$\frac{46-x}{56} = 0 \Rightarrow$

i

Z – zysk prowadzącego grę (w złotówkach)

x – główna wygrana (w złotówkach)

$Z(\Omega) = \{1, -1, 1 - x\}$

k	1	-1	$1 - x$
$P(Z = k)$	$\frac{50}{56}$	$\frac{5}{56}$	$\frac{1}{56}$

$$E(Z) = 1 \cdot \frac{50}{56} - 1 \cdot \frac{5}{56} + (1 - x) \cdot \frac{1}{56} = \frac{50}{56} - \frac{5}{56} + \frac{1-x}{56} =$$

$$\frac{46-x}{56} = 0 \Rightarrow 46 - x = 0 \Rightarrow x = 46$$

Własności wartości oczekiwanej:

- $E(a) = a$ dla $a \in \mathbb{R}$
- $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$ dla $a \in \mathbb{R}$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

i

- $E(X + a) = E(X) + a$ dla $a \in \mathbb{R}$

  E(X) jest miarą położenia.

- $E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$
- dla dowolnej funkcji $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mamy

  $E\big(f(X)\big) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k) \cdot P(X = k)$

- jeżeli X i Y są niezależne, to

  $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

i

- jeżeli $X_1, X_2, \dots, X_n$ są niezależne, to
$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$

Definicja:

$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$

Własność: $E(a) = a$ dla $a \in \mathbb{R}$

i

Definicja:

$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$

Własność: $E(a) = a$ dla $a \in \mathbb{R}$

Dowód: $E(a) =$

i

Definicja:

$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$

Własność: $E(a) = a$ dla $a \in \mathbb{R}$

Dowód: $E(a) = a \cdot 1 = a$

i

Definicja:

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Własność: $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$ dla $a \in \mathbb{R}$

i

Definicja:

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Własność: $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$ dla $a \in \mathbb{R}$

Dowód: $E(a \cdot X) =$

i

Definicja:

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Własność: $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$ dla $a \in \mathbb{R}$

Dowód: $E(a \cdot X) = \sum_{k \in X(\Omega)} a \cdot k \cdot P(X = k) =$

Definicja:

$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$

Własność: $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$ dla $a \in \mathbb{R}$

Dowód: $E(a \cdot X) = \sum_{k \in X(\Omega)} a \cdot k \cdot P(X = k) =$
$a \cdot \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k) =$

i

Definicja:

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Własność: $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$ dla $a \in \mathbb{R}$

Dowód: $E(a \cdot X) = \sum_{k \in X(\Omega)} a \cdot k \cdot P(X = k) =$
$a \cdot \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k) = a \cdot E(X)$

i

Definicja:

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Własność: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

i

Definicja:

$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$

Własność: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Dowód: $E(X + Y) =$

i

Definicja:

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Własność: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Dowód: $E(X + Y) = \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ l \in Y(\Omega)}} (k + l) \cdot P(X = k, Y = l) =$

Definicja:

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Własność: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Dowód: $E(X + Y) = \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ l \in Y(\Omega)}} (k + l) \cdot P(X = k, Y = l) =$

$$\sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ l \in Y(\Omega)}} k \cdot P(X = k, Y = l) + \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ l \in Y(\Omega)}} l \cdot P(X = k, Y = l) =$$

i

Definicja:

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Własność: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Dowód: $E(X + Y) = \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ l \in Y(\Omega)}} (k + l) \cdot P(X = k, Y = l) =$

$$\sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ l \in Y(\Omega)}} k \cdot P(X = k, Y = l) + \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ l \in Y(\Omega)}} l \cdot P(X = k, Y = l) =$$

$$\sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot \sum_{l \in Y(\Omega)} P(X = k, Y = l) +$$
$$\sum_{l \in Y(\Omega)} l \cdot \sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k, Y = l) =$$

i

Definicja:

$$E(X) = \sum_{k\in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Własność: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Dowód: $E(X + Y) = \sum_{\substack{k\in X(\Omega) \\ l\in Y(\Omega)}} (k + l) \cdot P(X = k, Y = l) =$

$$\sum_{\substack{k\in X(\Omega) \\ l\in Y(\Omega)}} k \cdot P(X = k, Y = l) + \sum_{\substack{k\in X(\Omega) \\ l\in Y(\Omega)}} l \cdot P(X = k, Y = l) =$$

$$\sum_{k\in X(\Omega)} k \cdot \sum_{l\in Y(\Omega)} P(X = k, Y = l) +$$
$$\sum_{l\in Y(\Omega)} l \cdot \sum_{k\in X(\Omega)} P(X = k, Y = l) =$$
$$\sum_{k\in X(\Omega)} k \cdot P(X = k) + \sum_{l\in Y(\Omega)} l \cdot P(Y = l) =$$

i

Definicja:

$$E(X) = \sum_{k\in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Własność: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Dowód: $E(X + Y) = \sum_{\substack{k\in X(\Omega)\\ l\in Y(\Omega)}} (k + l) \cdot P(X = k, Y = l) =$

$\sum_{\substack{k\in X(\Omega)\\ l\in Y(\Omega)}} k \cdot P(X = k, Y = l) + \sum_{\substack{k\in X(\Omega)\\ l\in Y(\Omega)}} l \cdot P(X = k, Y = l) =$

$\sum_{k\in X(\Omega)} k \cdot \sum_{l\in Y(\Omega)} P(X = k, Y = l) +$

$\sum_{l\in Y(\Omega)} l \cdot \sum_{k\in X(\Omega)} P(X = k, Y = l) =$

$\sum_{k\in X(\Omega)} k \cdot P(X = k) + \sum_{l\in Y(\Omega)} l \cdot P(Y = l) = E(X) + E(Y)$

i

Definicja:

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Własność: $E(X + a) = E(X) + a$ dla $a \in \mathbb{R}$

i

Definicja:

$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$

Własność: $E(X + a) = E(X) + a$ dla $a \in \mathbb{R}$

Dowód: $E(X + a) =$

i

Definicja:

$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$

Własność: $E(X + a) = E(X) + a$ dla $a \in \mathbb{R}$

Dowód: $E(X + a) = E(X) + E(a) =$

i

Definicja:

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Własność: $E(X + a) = E(X) + a$ dla $a \in \mathbb{R}$

Dowód: $E(X + a) = E(X) + E(a) = E(X) + a$

i

Definicja:

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Własność: $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

i

Definicja:

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Własność: $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

Dowód: $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + X_n) =$

i

Definicja:

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Własność: $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

Dowód: $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + X_n) =$

$E\Big((X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1}) + X_n\Big) =$

i

Definicja:

$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$

Własność: $E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

Dowód: $E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + X_n) = E\big((X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1}) + X_n\big) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1}) + E(X_n) = \cdots =$

i

Definicja:

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Własność: $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

Dowód: $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + X_n) = E\big((X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1}) + X_n\big) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1}) + E(X_n) = \cdots = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{n-1}) + E(X_n) =$

i

Definicja:

$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$

Własność: $E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

Dowód: $E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + X_n) = E\big((X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1}) + X_n\big) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1}) + E(X_n) = \cdots = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{n-1}) + E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

i

Definicja:

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Własność: $E\big(f(X)\big) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k) \cdot P(X = k)$

i

Definicja:

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Własność: $E\big(f(X)\big) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k) \cdot P(X = k)$

Dowód: wynika z definicji

i

Definicja:

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Własność: X, Y – niezależne $\Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

i

Definicja:

$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$

Własność: X, Y – niezależne $\Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

Dowód: $E(X \cdot Y) =$

i

Definicja:

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Własność: X, Y – niezależne $\Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

Dowód: $E(X \cdot Y) = \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ l \in Y(\Omega)}} k \cdot l \cdot P(X = k, Y = l) =$

Definicja:

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Własność: X, Y – niezależne $\Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

Dowód: $E(X \cdot Y) = \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ l \in Y(\Omega)}} k \cdot l \cdot P(X = k, Y = l) =$

$$\sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ l \in Y(\Omega)}} k \cdot l \cdot P(X = k) \cdot P(Y = l) =$$

i

Definicja:

$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$

Własność: X, Y – niezależne $\Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

Dowód: $E(X \cdot Y) = \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ l \in Y(\Omega)}} k \cdot l \cdot P(X = k, Y = l) =$

$\sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ l \in Y(\Omega)}} k \cdot l \cdot P(X = k) \cdot P(Y = l) =$

$\left(\sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)\right) \cdot \left(\sum_{l \in Y(\Omega)} l \cdot P(Y = l)\right) =$

i

Definicja:

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$$

Własność: X, Y – niezależne $\Rightarrow E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

Dowód: $E(X \cdot Y) = \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ l \in Y(\Omega)}} k \cdot l \cdot P(X = k, Y = l) =$

$$\sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ l \in Y(\Omega)}} k \cdot l \cdot P(X = k) \cdot P(Y = l) =$$

$$\left(\sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)\right) \cdot \left(\sum_{l \in Y(\Omega)} l \cdot P(Y = l)\right) = E(X) \cdot E(Y)$$

i

Definicja:

$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$

Własność: $X_1, X_2, \dots, X_n$ – niezależne ⇒ $E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$

i

Definicja:

$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$

Własność: $X_1, X_2, \dots, X_n$ – niezależne $\Rightarrow E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$

Dowód: $E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = E(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_{n-1} \cdot X_n) =$

i

Definicja:

$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$

Własność: $X_1, X_2, \dots, X_n$ – niezależne $\Rightarrow E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$

Dowód: $E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_{n-1} \cdot X_n) =$
$E\big((X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_{n-1}) \cdot X_n\big) =$

i

Definicja:

$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$

Własność: $X_1, X_2, \dots, X_n$ – niezależne $\Rightarrow E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$

Dowód: $E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_{n-1} \cdot X_n) =$
$E\big((X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_{n-1}) \cdot X_n\big) = E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_{n-1}) \cdot E(X_n) =$

i

Definicja:

$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$

Własność: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – niezależne $\Rightarrow E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$

Dowód: $E(\prod_{i=1}^{n} X_i) = E(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_{n-1} \cdot X_n) =$
$E\big((X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_{n-1}) \cdot X_n\big) = E(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_{n-1}) \cdot E(X_n) =$
$\ldots = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot \ldots \cdot E(X_{n-1}) \cdot E(X_n) =$

i

Definicja:

$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X = k)$

Własność: $X_1, X_2, \dots, X_n$ – niezależne $\Rightarrow E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$

Dowód: $E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_{n-1} \cdot X_n) =$
$E\big((X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_{n-1}) \cdot X_n\big) = E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_{n-1}) \cdot E(X_n) =$
$\dots = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot \dots \cdot E(X_{n-1}) \cdot E(X_n) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$

i

Jeśli zmienna losowa X ma rozkład jednostajny tzn. $\bigwedge_{k \in X(\omega)} P(X = k) = \frac{1}{n}$, to wartość oczekiwana jest średnią arytmetyczną wartości funkcji X. Ogólnie, wartość oczekiwana jest tzw. średnią ważoną z przybieranych wartości k z odpowiadającymi im prawdopodobieństwami jako wagami.

Przykład:

Rzucamy dwiema symetrycznymi kostkami. Niech X_1 oznacza wynik rzutu na pierwszej kostce, X_2 oznacza wynik rzutu na drugiej kostce, zaś X_s – sumę oczek na obydwu kostkach. Oblicz $E(X_1)$, $E(X_2)$, $E(X_s)$, $E(X_1^2)$, $E(2X_2 - 3)$, $E(X_1 \cdot X_2)$.

i

k	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}$$

$$X_s =$$

i

k	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}$$

$$X_s = X_1 + X_2$$

i

k	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}$$

$$X_s = X_1 + X_2$$

$$E(X_s) = E(X_1 + X_2) =$$

i

k	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}$$

$$X_s = X_1 + X_2$$

$$E(X_s) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

i

k	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}$$

$$X_s = X_1 + X_2$$

$$E(X_s) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$E(X_1^2) =$$

i

k	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}$$

$$X_s = X_1 + X_2$$

$$E(X_s) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$E(X_1^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} =$$

i

k	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}$$

$$X_s = X_1 + X_2$$

$$E(X_s) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$E(X_1^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} =$$
$$\frac{1}{6} \cdot (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = \frac{1}{6} \cdot 91 = \frac{91}{6}$$

i

k	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}$$

$$E(2X_2 - 3) =$$

i

k	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}$$

$$E(2X_2 - 3) = 2 \cdot E(X_2) - 3 =$$

i

k	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}$$

$$E(2X_2 - 3) = 2 \cdot E(X_2) - 3 = 2 \cdot \frac{7}{2} - 3 = 7 - 3 = 4$$

$$E(X_1 \cdot X_2) =$$

i

k	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}$$

$$E(2X_2 - 3) = 2 \cdot E(X_2) - 3 = 2 \cdot \frac{7}{2} - 3 = 7 - 3 = 4$$

$E(X_1 \cdot X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2)$ (bo X_1, X_2 – niezależne)

i

k	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}$$

$$E(2X_2 - 3) = 2 \cdot E(X_2) - 3 = 2 \cdot \frac{7}{2} - 3 = 7 - 3 = 4$$

$E(X_1 \cdot X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2)$ (bo X_1, X_2 – niezależne)

$$E(X_1 \cdot X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2) = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{4}$$

i

Wariancją dyskretnej zmiennej losowej X nazywamy liczbę:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right),$$

czyli:

$$D^2(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} \left(k - E(X)\right)^2 \cdot P(X = k)$$

i

Własności wariancji:

- $\boldsymbol{D^2(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2}$
- $D^2(a) = 0$ dla $a \in \mathbb{R}$
- $D^2(a \cdot X) = a^2 \cdot D^2(X)$ dla $a \in \mathbb{R}$
- $D^2(X + a) = D^2(X)$

Wariancja jest miarą rozrzutu.

i

- jeśli X i Y są niezależne, to
  $D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$
- jeśli $X_1, X_2, \dots, X_n$ są niezależne, to
  $D^2(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D^2(X_i)$

i

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

i

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

Dowód: $D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) =$

i

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

Dowód: $D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) =$

$$E\left(X^2 - 2XE(X) + \left(E(X)\right)^2\right) =$$

i

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

Dowód: $D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) =$

$E\left(X^2 - 2XE(X) + \left(E(X)\right)^2\right) =$

$E(X^2) - E\left(2XE(X)\right) + E\left(\left(E(X)\right)^2\right) =$

i

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

Dowód: $D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) =$

$$E\left(X^2 - 2XE(X) + \left(E(X)\right)^2\right) =$$

$$E(X^2) - E\big(2XE(X)\big) + E\left(\left(E(X)\right)^2\right) =$$

$$E(X^2) - 2E(X)E(X) + \left(E(X)\right)^2 =$$

i

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

Dowód: $D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) =$

$E\left(X^2 - 2XE(X) + \left(E(X)\right)^2\right) =$

$E(X^2) - E\left(2XE(X)\right) + E\left(\left(E(X)\right)^2\right) =$

$E(X^2) - 2E(X)E(X) + \left(E(X)\right)^2 =$

$E(X^2) - 2\left(E(X)\right)^2 + \left(E(X)\right)^2 =$

i

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

Dowód: $D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) =$

$E\left(X^2 - 2XE(X) + \left(E(X)\right)^2\right) =$

$E(X^2) - E\left(2XE(X)\right) + E\left(\left(E(X)\right)^2\right) =$

$E(X^2) - 2E(X)E(X) + \left(E(X)\right)^2 =$

$E(X^2) - 2\left(E(X)\right)^2 + \left(E(X)\right)^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

i

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(a) = 0$ dla $a \in \mathbb{R}$

i

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(a) = 0$ dla $a \in \mathbb{R}$

Dowód: $D^2(a) = \ E\left(\left(a - E(a)\right)^2\right) =$

i

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(a) = 0$ dla $a \in \mathbb{R}$

Dowód: $D^2(a) = E\left(\left(a - E(a)\right)^2\right) = E((a-a)^2) =$

i

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(a) = 0$ dla $a \in \mathbb{R}$

Dowód: $D^2(a) = E\left(\left(a - E(a)\right)^2\right) = E((a - a)^2) =$

$E(0^2) =$

i

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(a) = 0$ dla $a \in \mathbb{R}$

Dowód: $D^2(a) = E\left(\left(a - E(a)\right)^2\right) = E((a - a)^2) = E(0^2) = 0$

i

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(a \cdot X) = a^2 \cdot D^2(X)$ dla $a \in \mathbb{R}$

i

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(a \cdot X) = a^2 \cdot D^2(X)$ dla $a \in \mathbb{R}$

Dowód: $D^2(a \cdot X) = E\left(\left(a \cdot X - E(a \cdot X)\right)^2\right) =$

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(a \cdot X) = a^2 \cdot D^2(X)$ dla $a \in \mathbb{R}$

Dowód: $D^2(a \cdot X) = \ E\left(\left(a \cdot X - E(a \cdot X)\right)^2\right) =$

$E\left(\left(a \cdot X - a \cdot E(X)\right)^2\right) =$

i

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(a \cdot X) = a^2 \cdot D^2(X)$ dla $a \in \mathbb{R}$

Dowód: $D^2(a \cdot X) = \ E\left(\left(a \cdot X - E(a \cdot X)\right)^2\right) =$

$$E\left(\left(a \cdot X - a \cdot E(X)\right)^2\right) = E\left(\left(a \cdot (X - E(X))\right)^2\right) =$$

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(a \cdot X) = a^2 \cdot D^2(X)$ dla $a \in \mathbb{R}$

Dowód: $D^2(a \cdot X) = E\left(\left(a \cdot X - E(a \cdot X)\right)^2\right) =$

$E\left(\left(a \cdot X - a \cdot E(X)\right)^2\right) = E\left(\left(a \cdot (X - E(X))\right)^2\right) =$

$E\left(a^2 \cdot \left(X - E(X)\right)^2\right) =$

i

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(a \cdot X) = a^2 \cdot D^2(X)$ dla $a \in \mathbb{R}$

Dowód: $D^2(a \cdot X) = E\left(\left(a \cdot X - E(a \cdot X)\right)^2\right) =$

$$E\left(\left(a \cdot X - a \cdot E(X)\right)^2\right) = E\left(\left(a \cdot (X - E(X))\right)^2\right) =$$

$$E\left(a^2 \cdot \left(X - E(X)\right)^2\right) = a^2 \cdot E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) =$$

i

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(a \cdot X) = a^2 \cdot D^2(X)$ dla $a \in \mathbb{R}$

Dowód: $D^2(a \cdot X) = E\left(\left(a \cdot X - E(a \cdot X)\right)^2\right) =$

$$E\left(\left(a \cdot X - a \cdot E(X)\right)^2\right) = E\left(\left(a \cdot (X - E(X))\right)^2\right) =$$

$$E\left(a^2 \cdot \left(X - E(X)\right)^2\right) = a^2 \cdot E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = a^2 \cdot D^2(X)$$

i

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(X + a) = D^2(X)$

i

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(X+a) = D^2(X)$

Dowód: $D^2(X+a) = E\left(\left((X+a) - E(X+a)\right)^2\right) =$

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(X + a) = D^2(X)$

Dowód: $D^2(X + a) = E\left(\left((X + a) - E(X + a)\right)^2\right) =$

$$E\left(\left(X + a - (E(X) + a)\right)^2\right) =$$

i

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(X + a) = D^2(X)$

Dowód: $D^2(X + a) = E\left(\left((X + a) - E(X + a)\right)^2\right) =$

$E\left(\left(X + a - (E(X) + a)\right)^2\right) = E((X + a - E(X) - a)^2) =$

i

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(X + a) = D^2(X)$

Dowód: $D^2(X + a) = E\left(\left((X + a) - E(X + a)\right)^2\right) =$

$$E\left(\left(X + a - (E(X) + a)\right)^2\right) = E((X + a - E(X) - a)^2) =$$

$$E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) =$$

i

Definicja:

$$D^2(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

Własność: $D^2(X + a) = D^2(X)$

Dowód: $D^2(X + a) = E\left(\left((X + a) - E(X + a)\right)^2\right) =$

$E\left(\left(X + a - (E(X) + a)\right)^2\right) = E((X + a - E(X) - a)^2) =$

$E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = D^2(X)$

i

Wzór:

$$D^2(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

Własność: X, Y - niezależne $\Rightarrow D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$

i

Wzór:

$$D^2(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

Własność: X, Y - niezależne $\Rightarrow D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$

Dowód: $D^2(X+Y) = E((X+Y)^2) - \big(E(X+Y)\big)^2 =$

i

Wzór:

$$D^2(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

Własność: X, Y- niezależne $\Rightarrow D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$

Dowód: $D^2(X+Y) = E((X+Y)^2) - \big(E(X+Y)\big)^2 =$

$E(X^2 + 2XY + Y^2) - \big(E(X) + E(Y)\big)^2 =$

i

Wzór:

$$D^2(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

Własność: X, Y - niezależne $\Rightarrow D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$

Dowód: $D^2(X+Y) = E((X+Y)^2) - \big(E(X+Y)\big)^2 =$

$E(X^2 + 2XY + Y^2) - \big(E(X) + E(Y)\big)^2 =$

$E(X^2) + E(2XY) + E(Y^2) - \left(\big(E(X)\big)^2 + 2E(X)E(Y) + \big(E(Y)\big)^2\right) =$

i

Wzór:

$$D^2(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

Własność: X, Y - niezależne $\Rightarrow D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$

Dowód: $D^2(X+Y) = E((X+Y)^2) - \big(E(X+Y)\big)^2 =$

$E(X^2 + 2XY + Y^2) - \big(E(X) + E(Y)\big)^2 =$

$E(X^2) + E(2XY) + E(Y^2) - \left(\big(E(X)\big)^2 + 2E(X)E(Y) + \big(E(Y)\big)^2\right) =$

$E(X^2) + 2E(X)E(Y) + E(Y^2) - \big(E(X)\big)^2 - 2E(X)E(Y) - \big(E(Y)\big)^2 =$

i

Wzór:

$$D^2(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

Własność: X, Y - niezależne $\Rightarrow D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$

Dowód: $D^2(X+Y) = E((X+Y)^2) - \left(E(X+Y)\right)^2 =$

$E(X^2 + 2XY + Y^2) - \left(E(X) + E(Y)\right)^2 =$

$E(X^2) + E(2XY) + E(Y^2) - \left(\left(E(X)\right)^2 + 2E(X)E(Y) + \left(E(Y)\right)^2\right) =$

$E(X^2) + 2E(X)E(Y) + E(Y^2) - \left(E(X)\right)^2 - 2E(X)E(Y) - \left(E(Y)\right)^2 =$

$E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 + E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2 =$

i

Wzór:

$$D^2(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

Własność: X, Y - niezależne $\Rightarrow D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$

Dowód: $D^2(X+Y) = E((X+Y)^2) - \left(E(X+Y)\right)^2 =$

$E(X^2 + 2XY + Y^2) - \left(E(X) + E(Y)\right)^2 =$

$E(X^2) + E(2XY) + E(Y^2) - \left(\left(E(X)\right)^2 + 2E(X)E(Y) + \left(E(Y)\right)^2\right) =$

$E(X^2) + 2E(X)E(Y) + E(Y^2) - \left(E(X)\right)^2 - 2E(X)E(Y) - \left(E(Y)\right)^2 =$

$E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 + E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2 = D^2(X) + D^2(Y)$

i

Wzór:

$$D^2(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

Własność: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – niezależne $\Rightarrow D^2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D^2(X_i)$

i

Wzór:

$$D^2(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

Własność: $X_1, X_2, \dots, X_n$ – niezależne $\Rightarrow D^2(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D^2(X_i)$

Dowód: $D^2(\sum_{i=1}^{n} X_i) = D^2(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + X_n) =$

i

Wzór:

$$D^2(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

Własność: $X_1, X_2, \dots, X_n$ – niezależne $\Rightarrow D^2(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D^2(X_i)$

Dowód: $D^2(\sum_{i=1}^{n} X_i) = D^2(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + X_n) =$
$D^2\big((X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1}) + X_n\big) =$

i

Wzór:

$$D^2(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

Własność: $X_1, X_2, \dots, X_n$ – niezależne $\Rightarrow D^2(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D^2(X_i)$

Dowód: $D^2(\sum_{i=1}^{n} X_i) = D^2(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + X_n) =$

$D^2\big((X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1}) + X_n\big) =$

$D^2(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1}) + D^2(X_n) =$

i

Wzór:

$$D^2(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

Własność: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – niezależne $\Rightarrow D^2(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D^2(X_i)$

Dowód: $D^2(\sum_{i=1}^{n} X_i) = D^2(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + X_n) =$

$D^2\big((X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1}) + X_n\big) =$

$D^2(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1}) + D^2(X_n) =$

$\ldots = D^2(X_1) + D^2(X_2) + \cdots + D^2(X_{n-1}) + D^2(X_n) = \sum_{i=1}^{n} D^2(X_i)$

i

Interpretacja fizyczna:

Wariancja zmiennej losowej jest momentem bezwładności względem środka ciężkości masy jednostkowej rozmieszczonej wzdłuż osi OX zgodnie z rozkładem prawdopodobieństwa tej zmiennej.

i

Pewną wadą wariancji jest to, że jej wymiar jest kwadratem wymiaru zmiennej losowej X. Wady tej nie ma odchylenie standardowe D(X).

Odchyleniem standardowym dyskretnej zmiennej losowej X nazywamy liczbę:

$$D(X) = \sqrt{D^2(X)}$$

Przykład:

Rzucamy dwiema symetrycznymi kostkami. Niech X_1 oznacza wynik rzutu na pierwszej kostce, X_2 oznacza wynik rzutu na drugiej kostce, zaś X_s – sumę oczek na obydwu kostkach. Oblicz $D(X_1)$, $D(X_2)$, $D(X_s)$, $D(2X_2 - 3)$.

i

$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}, E(X_1^2) = \frac{91}{6}, X_1, X_2$ – niezależne

$X_s = X_1 + X_2$

i

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}, E(X_1^2) = \frac{91}{6}, X_1, X_2 - \text{niezależne}$$

$$X_s = X_1 + X_2$$

$$D^2(X_1) = E(X_1^2) - \left(E(X_1)\right)^2 =$$

i

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}, E(X_1^2) = \frac{91}{6}, X_1, X_2 - \text{niezależne}$$

$$X_s = X_1 + X_2$$

$$D^2(X_1) = E(X_1^2) - \left(E(X_1)\right)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

i

$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}, E(X_1^2) = \frac{91}{6}, X_1, X_2$ – niezależne

$X_s = X_1 + X_2$

$D^2(X_1) = E(X_1^2) - \left(E(X_1)\right)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$

$D(X_1) =$

i

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}, E(X_1^2) = \frac{91}{6}, X_1, X_2 - \text{niezależne}$$

$$X_s = X_1 + X_2$$

$$D^2(X_1) = E(X_1^2) - \left(E(X_1)\right)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

$$D(X_1) = \sqrt{\frac{35}{12}} = D(X_2)$$

i

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}, E(X_1^2) = \frac{91}{6}, X_1, X_2 - \text{niezależne}$$

$$X_s = X_1 + X_2$$

$$D^2(X_1) = E(X_1^2) - \left(E(X_1)\right)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

$$D(X_1) = \sqrt{\frac{35}{12}} = D(X_2)$$

$$D^2(X_s) = D^2(X_1 + X_2) =$$

i

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}, E(X_1^2) = \frac{91}{6}, X_1, X_2 - \text{niezależne}$$

$$X_s = X_1 + X_2$$

$$D^2(X_1) = E(X_1^2) - \left(E(X_1)\right)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

$$D(X_1) = \sqrt{\frac{35}{12}} = D(X_2)$$

$$D^2(X_s) = D^2(X_1 + X_2) = D^2(X_1) + D^2(X_2) =$$

i

$$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}, E(X_1^2) = \frac{91}{6}, X_1, X_2 - \text{niezależne}$$

$$X_s = X_1 + X_2$$

$$D^2(X_1) = E(X_1^2) - \left(E(X_1)\right)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

$$D(X_1) = \sqrt{\frac{35}{12}} = D(X_2)$$

$$D^2(X_s) = D^2(X_1 + X_2) = D^2(X_1) + D^2(X_2) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{70}{12} \Rightarrow D(X_s) =$$

i

$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}, E(X_1^2) = \frac{91}{6}, X_1, X_2$ – niezależne

$$X_s = X_1 + X_2$$

$$D^2(X_1) = E(X_1^2) - \left(E(X_1)\right)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

$$D(X_1) = \sqrt{\frac{35}{12}} = D(X_2)$$

$$D^2(X_s) = D^2(X_1 + X_2) = D^2(X_1) + D^2(X_2) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{70}{12} \Rightarrow D(X_s) = \sqrt{\frac{70}{12}}$$

i

$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}, E(X_1^2) = \frac{91}{6}, X_1, X_2$ – niezależne

$X_s = X_1 + X_2$

$$D^2(X_1) = E(X_1^2) - \left(E(X_1)\right)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

$$D(X_1) = \sqrt{\frac{35}{12}} = D(X_2)$$

$$D^2(X_s) = D^2(X_1 + X_2) = D^2(X_1) + D^2(X_2) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{70}{12} \Rightarrow D(X_s) = \sqrt{\frac{70}{12}}$$

$$D^2(2X_2 - 3) =$$

i

$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}, E(X_1^2) = \frac{91}{6}, X_1, X_2$ – niezależne

$X_s = X_1 + X_2$

$D^2(X_1) = E(X_1^2) - \big(E(X_1)\big)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$

$D(X_1) = \sqrt{\frac{35}{12}} = D(X_2)$

$D^2(X_s) = D^2(X_1 + X_2) = D^2(X_1) + D^2(X_2) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{70}{12} \Rightarrow D(X_s) = \sqrt{\frac{70}{12}}$

$D^2(2X_2 - 3) = D^2(2X_2) =$

i

$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}, E(X_1^2) = \frac{91}{6}, X_1, X_2$ – niezależne

$X_s = X_1 + X_2$

$D^2(X_1) = E(X_1^2) - \left(E(X_1)\right)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$

$D(X_1) = \sqrt{\frac{35}{12}} = D(X_2)$

$D^2(X_s) = D^2(X_1 + X_2) = D^2(X_1) + D^2(X_2) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{70}{12} \Rightarrow D(X_s) = \sqrt{\frac{70}{12}}$

$D^2(2X_2 - 3) = D^2(2X_2) = 4 \cdot D^2(X_2) =$

i

$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}, E(X_1^2) = \frac{91}{6}, X_1, X_2$ – niezależne

$X_s = X_1 + X_2$

$D^2(X_1) = E(X_1^2) - \left(E(X_1)\right)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$

$D(X_1) = \sqrt{\frac{35}{12}} = D(X_2)$

$D^2(X_s) = D^2(X_1 + X_2) = D^2(X_1) + D^2(X_2) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{70}{12} \Rightarrow D(X_s) = \sqrt{\frac{70}{12}}$

$D^2(2X_2 - 3) = D^2(2X_2) = 4 \cdot D^2(X_2) = 4 \cdot \frac{35}{12} = \frac{35}{3} \Rightarrow D(2X_2 - 3) =$

i

$E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}, E(X_1^2) = \frac{91}{6}, X_1, X_2$ – niezależne

$$X_s = X_1 + X_2$$

$$D^2(X_1) = E(X_1^2) - \big(E(X_1)\big)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

$$D(X_1) = \sqrt{\frac{35}{12}} = D(X_2)$$

$$D^2(X_s) = D^2(X_1 + X_2) = D^2(X_1) + D^2(X_2) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{70}{12} \Rightarrow D(X_s) = \sqrt{\frac{70}{12}}$$

$$D^2(2X_2 - 3) = D^2(2X_2) = 4 \cdot D^2(X_2) = 4 \cdot \frac{35}{12} = \frac{35}{3} \Rightarrow D(2X_2 - 3) = \sqrt{\frac{35}{3}}$$

i

Rozkłady dyskretne (dwumianowy, geometryczny i Poissona)

Rozkład zero-jedynkowy:

$X(\Omega) = \{0,1\}$

$P(X = 0) = q, P(X = 1) = p,$

zatem: $p + q = 1$

i

Niech X ma rozkład zero-jedynkowy.

Wtedy: $E(X) = p,\qquad D(X) = \sqrt{pq}.$

Dowód

$$X(\Omega) = \{0,1\}$$

k	0	1
P(X)	q	p

$$E(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

i

$$D^2(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = p$$

$$D^2(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = p - p^2$$
$$= p \cdot (1 - p) = pq$$

$$D(X) = \sqrt{D^2(X)} = \sqrt{pq}$$

i

Próba Bernoulliego to doświadczenie losowe z dwoma możliwymi wynikami (**sukcesem** lub **porażką**).

Próba Bernoulliego ma rozkład zero-jedynkowy, gdzie:

- 1 oznacza sukces z prawdopodobieństwem p
- 0 oznacza porażkę z prawdopodobieństwem q

i

Rozkład dwumianowy opisuje liczbę sukcesów w ciągu n **niezależnych** prób Bernoulliego o stałym prawdopodobieństwie sukcesu p:

X – liczba sukcesów w ciągu n niezależnych prób Bernoulliego

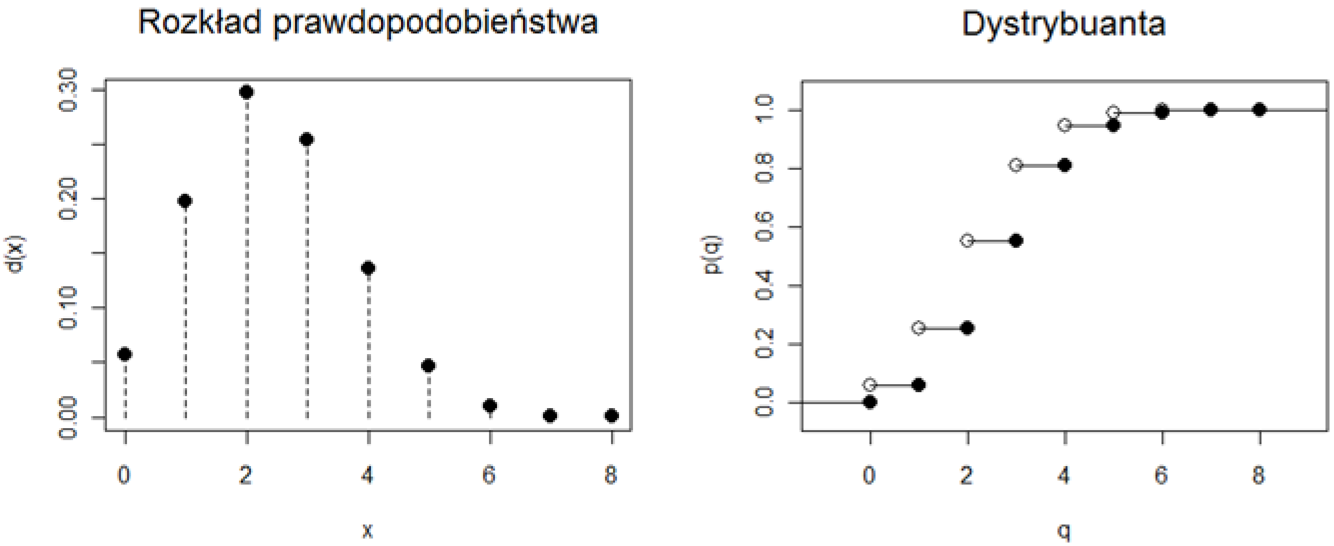
$X \sim B(n, p)$ (czytamy: X ma rozkład dwumianowy o parametrach n i p)

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

i

$$\bigwedge_{k\in\{0,1,2,\dots,n\}} P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

Rozkład prawdopodobieństwa i dystrybuanta zmiennej losowej o rozkładzie dwumianowym



Przykład

Strzelasz 5 razy do tarczy. Trafiasz z prawdopodobieństwem p. Oblicz prawdopodobieństwo, że trafisz dokładnie 3 razy?

X_i – i-ty strzał do tarczy (1 – trafienie, 0 – chybienie)

i

k	0	1
$P(X_i=k)$	q	p

X – liczba sukcesów (trafień do tarczy)

$$X \sim B(5, p)$$

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$$

$$P(X = 3) = ?$$

i

Możliwy wynik: $(1 + 0 + 0 + 1 + 1)$, jego prawd.: $pqqpp = p^3q^2$

Inne wyniki: $(1 + 1 + 0 + 1 + 0)$, $(0 + 1 + 0 + 1 + 1)$, …

i

$P(X = 3) = \binom{5}{3} p^3 q^2$, gdzie $\binom{5}{3}$ – wybór miejsc dla trafień

Jeśli $X \sim B(n, p)$, to:

$$X = X_1 + X_2 + \ \ldots + X_n$$

gdzie: X_i – zmienna losowa o rozkładzie zero-jedynkowym (i-ta próba Bernoulliego)

i

Niech X ma rozkład dwumianowy. Wtedy:

$E(X) = np, \qquad D(X) = \sqrt{npq}.$

Dowód

$X \sim B(n, p)$

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, gdzie: X_i – i-ta próba Bernoulliego

$E(X_i) = p, \qquad D^2(X_i) = pq$

i

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$
$$= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$
$$= p + p + \cdots + p = np$$

$$D^2(X) = D^2(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ – niezależne

$$D^2(X) = D^2(X_1) + D^2(X_2) + \cdots + D^2(X_n)$$
$$= pq + pq + \cdots + pq = npq$$

$$D(X) = \sqrt{npq}$$

Przykład

Losujemy 10 razy ze zwracaniem z talii 52 kart. Oblicz prawdopodobieństwo wyciągnięcia dokładnie dwóch asów. Oblicz średnią liczbę wyciągniętych asów w takim doświadczeniu losowym.

X – liczba sukcesów (wyciągniętych asów)

i

$$X \sim B(10, \frac{1}{13})$$

$$P(X = 2) =?, E(X) =?$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \left(\frac{1}{13}\right)^2 \left(\frac{12}{13}\right)^8$$

$$E(X) = np = 10 \cdot \frac{1}{13} = \frac{10}{13}$$

i

Rozkład geometryczny opisuje liczbę wykonanych **niezależnych** prób Bernoulliego o stałym prawdopodobieństwie sukcesu $p > 0$ aż do pierwszego sukcesu:

X – liczba przeprowadzonych niezależnych prób Bernoulliego

$X \sim G(p)$ (czytamy: X ma rozkład geometryczny o parametrze p)

i

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

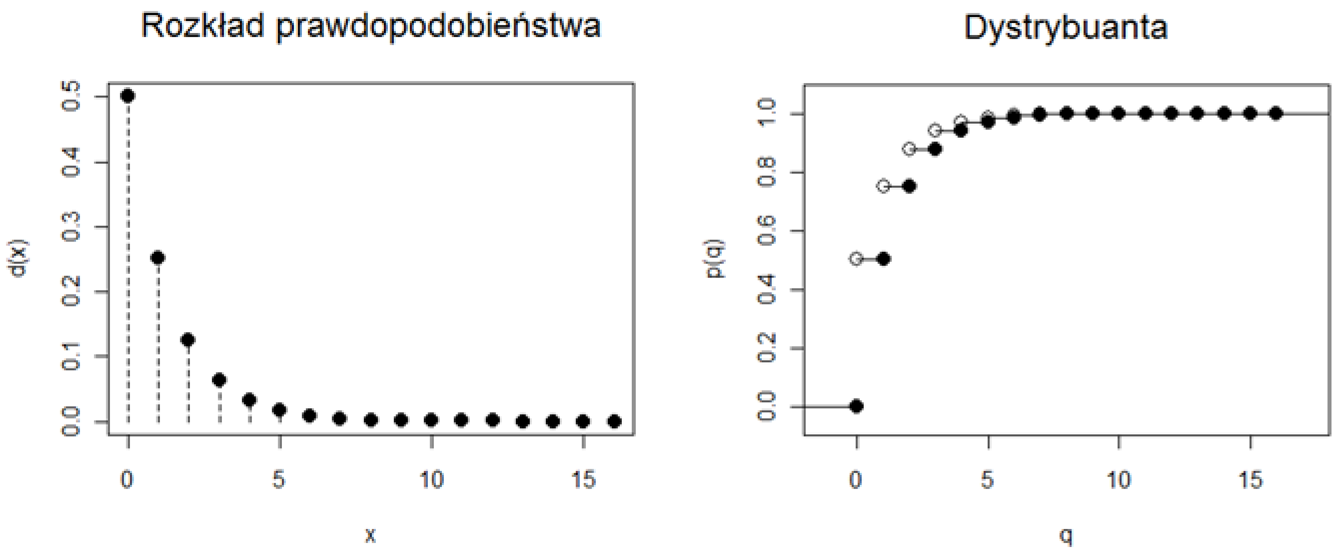
$$\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} P(X = k) = q^{k-1} p$$

Niech X ma rozkład geometryczny. Wtedy:

$$E(X) = \frac{1}{p}, \qquad D(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}.$$

i

Rozkład prawdopodobieństwa i dystrybuanta zmiennej losowej o rozkładzie geometrycznym



i

Przykład

Losujemy karty ze zwracaniem z talii 52 kart aż do pierwszego asa. Oblicz prawdopodobieństwo, że asa wyciągniemy za czwartym razem. Oblicz średnią liczbę losowań w tym doświadczeniu losowym.

X – liczba prób (losowań do pierwszego asa)

i

$$X \sim G(\frac{1}{13})$$

$$P(X = 4) =?, E(X) =?$$

$$P(X = k) = q^{k-1}p$$

$$P(X = 4) = \left(\frac{12}{13}\right)^3 \cdot \frac{1}{13}$$

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{13}} = 13$$

Rozkład Poissona

$$X \sim Pois(\lambda)$$

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots\}$$

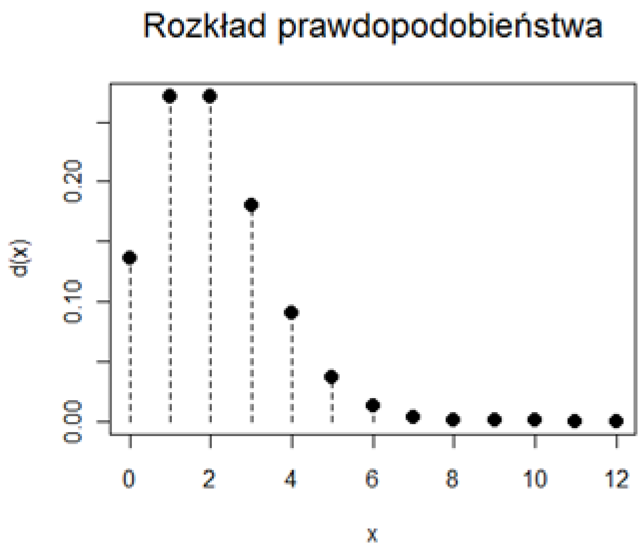
$P(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$, gdzie: $\lambda > 0$

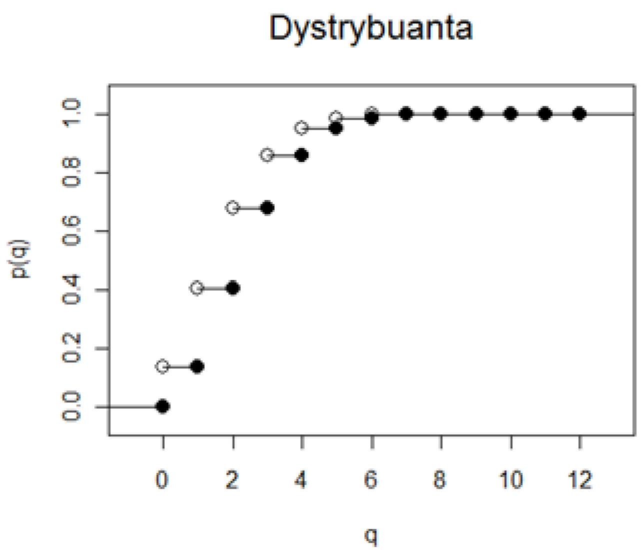
Niech X ma rozkład Poissona.

Wtedy: $E(X) = \lambda$, $D(X) = \sqrt{\lambda}$.

i

Rozkład prawdopodobieństwa i dystrybuanta zmiennej losowej o rozkładzie Poissona





Przybliżanie rozkładu dwumianowego rozkładem Poissona

Jeśli $p \leq 0{,}01,\ n \geq 100,\ \ np \in [0{,}1; 10]$,

to: $B(n, p) \approx Pois(np)$.

i

Przykład

Oblicz prawdopodobieństwo, że partia 3000 elementów zawiera trzy lub cztery elementy wadliwe, jeśli prawdopodobieństwo wytworzenia elementu wadliwego wynosi 0,001. Ile średnio elementów wadliwych zawiera taka partia?

i

X – liczba sukcesów (elementów wadliwych)

$X \sim B(3000; 0{,}001)$

$P(X \in \{3{,}4\}) = ?$, $E(X) = ?$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$P(X \in \{3{,}4\}) = P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{3000}{3} 0{,}001^3 \cdot 0{,}999^{2997} + \binom{3000}{4} 0{,}001^4 \cdot 0{,}999^{2996} \approx 0{,}3922693362$$

i

$$E(X) = np = 3000 \cdot 0{,}001 = 3$$

i

Przybliżenie rozkładem Poissona:

$$n = 3000 \geq 100, p = 0{,}001 \leq 0{,}01, \lambda = np$$
$$= 3 \in [0{,}1; 10]$$

$$X \sim B(3000; 0{,}001) \approx Pois(3)$$

i

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-3}\frac{3^k}{k!}$$

$$P(X\in\{3{,}4\})=P(X=3)+P(X=4)=$$

$$e^{-3}\frac{3^3}{3!}+e^{-3}\frac{3^4}{4!}=e^{-3}\left(\frac{27}{6}+\frac{81}{24}\right)=$$

$$e^{-3}\left(\frac{108}{24}+\frac{81}{24}\right)=\frac{189}{24}e^{-3}\approx 0{,}3920731633$$

$$E(X)=\lambda=3$$

$$X\sim Pois(3)\ \approx 0{,}3920731633$$

$$X\sim B(3000;0{,}001)\approx 0{,}3922693362$$